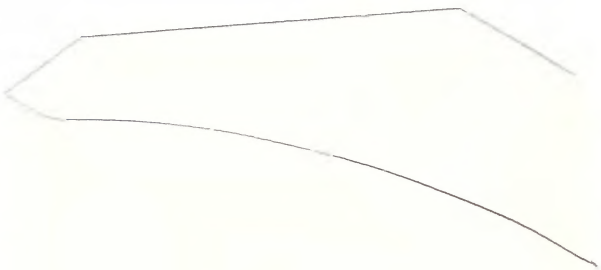
621.39
Т 33

ТЕОРИЯ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ

621.39
Т 33

ТЕОРИЯ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ

ТЕОРИЯ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ



ТЕОРИЯ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ

Под редакцией доктора технических наук
профессора П. А. Бакута

МОСКВА «РАДИО И СВЯЗЬ» 1984

УДК 621.37 : 621.391

Теория обнаружения сигналов / П. С. Акимов, П. А. Бакут, В. А. Богданович и др.; Под ред. П. А. Бакута. — М.: Радио и связь, 1984. — 440 с.

Рассматриваются специальные вопросы теории обнаружения сигналов, разработанные в последние годы: обнаружение сигналов с неизвестными параметрами, на фоне частично неизвестных помех и в условиях априорной неопределенности, на фоне негауссовских помех, единый алгоритм обнаружения-измерения. Излагаются различные методы решения этих задач, включающие непараметрическое обнаружение, несмещенные и инвариантные правила обнаружения, минимаксные (максиминные) правила обнаружения, последовательный анализ.

Для научных работников и аспирантов, работающих в области радиотехники, радиолокации и теории информации.

Табл. 4. Ил. 133. Библиогр. 285.

РЕЦЕНЗЕНТЫ: доктор техн. наук проф. Б. Р. ЛЕВИН и доктор техн. наук проф. Ю. Г. СОСУЛИН

Редакция литературы по кибернетике и вычислительной технике

Павел Сергеевич Акимов, Петр Алексеевич Бакут, Вениамин Алексеевич Богданович, Альберт Моисеевич Бриккер, Валерий Гизатович Валеев, Игорь Борисович Власов, Владимир Арсеньевич Корадо, Борис Алексеевич Розанов, Андрей Павлович Трифонов

ТЕОРИЯ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ

Редактор Н. Г. Давыдова

Художник К. М. Прасолов

Художественный редактор Л. Н. Сильянов

Технический редактор Г. И. Колосова

Корректор Т. Г. Захарова

ИБ № 556

Сдано в набор 18.05.83. Подписано в печать 9.02.84. Т-06608
Формат 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 3 Гарнитура литературная
Печать офсетн. Усл. печ. л. 27,5 Усл. кр.-отт. 27,5 Уч.-изд. л. 30,75 Тираж 6000 экз.
Изд. № 19698 Зак. № 1632 Цена 3 р. 70 к.
Издательство «Радио и связь», 101000, Москва, Почтамт, а/я 693

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
129041, Москва, Б. Переяславская ул., д. 46

Т 2402020000-99
046(01)-84 5-83

© Издательство «Радио и связь», 1984

Введение

Теория обнаружения является известным, хорошо разработанным вопросом статистической радиотехники, неоднократно излагавшимся в монографической и учебной литературе. Однако исследования по теории обнаружения продолжаются, о чем свидетельствуют регулярно появляющиеся журнальные статьи, посвященные этой теме. Естественно, рассматриваются только специальные вопросы теории обнаружения, сложные ситуации, свободные от ограничений предыдущих исследований, более близкие к реальности. Можно отметить следующие направления продолжающихся работ:

решение задачи обнаружения в условиях параметрической и непараметрической априорной неопределенности;

дальнейшее применение последовательного анализа к задачам обнаружения, его необходимые обобщения (например, на задачи с априорной неопределенностью), развитие уточненных методов расчета рабочих характеристик последовательных процедур;

решение задач обнаружения для негауссовских сигналов и помех;

решение задач статистического синтеза и исследования единого алгоритма обнаружения — измерения и алгоритма управления режимами радиолокационного наблюдения.

В настоящей монографии систематизируются и излагаются результаты исследований по ряду из вышеперечисленных направлений, проводившихся авторами в течение примерно последних десяти лет. Монография не предназначена для первоначального ознакомления с теорией обнаружения; предполагается, что читатель знаком с основами этой теории и ее классическими результатами.

Наиболее полно отправной материал по задачам с априорной неопределенностью содержится в третьей книге известной трехтомной монографии Б. Р. Левина [1], а также в монографии В. Г. Репина и Г. П. Тартаковского [2]. Авторы старались придерживаться обозначений, использованных в [1]. Задачи с негауссовскими сигналами, последовательный анализ, а также вопросы синтеза единого алгоритма обнаружения-измерения содержатся в монографии Ю. Г. Сосулина [3].

Первые три главы настоящей монографии посвящены различным подходам к задачам обнаружения сигналов в условиях параметрической априорной неопределенности. Эти задачи характеризуются тем, что функциональный вид распределения наблюдаемого процесса известен, а недостаток априорных сведений о помехах и сигналах выражается в незнании параметров этого распределения. Задача обнаружения сигналов при этом формулируется как задача проверки сложных ста-

тистических гипотез относительно распределения наблюдаемой выборки. Гипотеза H_1 о наличии сигнала заключается в том, что плотность распределения вероятностей выборки имеет вид $W_1(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$, где $\boldsymbol{\theta}$ — вектор неизвестных параметров сигнала и помехи; гипотеза H_0 об отсутствии сигнала заключается в том, что плотность распределения вероятностей выборки имеет вид $W_0(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$ (зависит, разумеется, лишь от помеховой части вектора неизвестных параметров).

В первой главе задача обнаружения сигналов в условиях параметрической априорной неопределенности решается классическим байесовским методом. Этот метод основан на том, что неизвестные параметры сигнала $\boldsymbol{\theta}$ предполагаются случайными с априорной плотностью вероятности $W(\boldsymbol{\theta})$. Знание априорной плотности вероятности позволяет перейти к безусловной плотности распределения вероятности выборки

$$W_1(\mathbf{x}) = \int_{\Theta} W_1(\mathbf{x}\,|\,\boldsymbol{\theta})\, W(\boldsymbol{\theta})\, d\boldsymbol{\theta}, \qquad (0.1)$$

т. е. можно исключить неизвестные параметры усреднением и гипотезу H_1 сделать простой. Ограничения этого метода хорошо известны: концепция случайности неизвестных параметров далеко не всегда может быть обоснована; следовательно, не всегда существует или может быть обоснованно предложена априорная плотность $W(\boldsymbol{\theta})$. Однако, даже если априорная плотность $W(\boldsymbol{\theta})$ задана и байесовский метод может быть применен, возникают математические трудности, связанные с усреднением по априорной плотности $W(\boldsymbol{\theta})$.

В первой главе эти трудности удается эффективно преодолеть и получить законченные результаты для асимптотического случая большого отношения сигнал-шум. При этом функция правдоподобия $W_1(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$ имеет ярко выраженный пик в окрестности истинного значения параметра $\boldsymbol{\theta}$, так что интеграл (0.1) вычисляется и имеет место приближенное равенство $W_1(\mathbf{x}) \approx W_1(\mathbf{x}|\widehat{\boldsymbol{\theta}})$, где $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ — оценка максимального правдоподобия параметра $\boldsymbol{\theta}$. Устанавливается связь между байесовским методом и методом максимального правдоподобия и удается получить ряд законченных результатов относительно структуры оптимального обнаружителя, рассчитать вероятности ошибок и характеристик обнаружения.

Большое место в первой главе уделяется изучению сходимости байесовского обнаружителя к обнаружителю максимального правдоподобия для различных типов неизвестных параметров (энергетических и неэнергетических) и различных видов сигналов (непрерывных и разрывных), а также моделированию процесса обнаружения на ЭВМ. В результате моделирования установлено удовлетворительное согласие асимптотических формул с экспериментальными зависимостями уже при отношении сигнал-шум, превышающем несколько единиц.

Вторая и третья главы посвящены решению задач обнаружения в условиях параметрической априорной неопределенности при отказе от использования априорного распределения неизвестных параметров. Различные показатели качества процесса обнаружения должны рассматриваться в этом случае по отдельности, и задачи их улучшения

оказываются противоречивыми. Для разрешения этих противоречий приходится вводить различного вида ограничения, откуда возникает большое число подходов к задачам оптимизации.

Формулировка задачи оптимизации обнаружения в условиях параметрической априорной неопределенности на качественном уровне весьма проста. Пусть $\varphi(\mathbf{x})$ — искомая оптимальная решающая функция (критерий). Нерандомизированная решающая функция, как известно, имеет вид

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \mathbf{X}_1; \\ 0, & \mathbf{x} \in \mathbf{X}_0. \end{cases}$$

Это означает, что гипотеза H_1 принимается при попадании выборки $\mathbf{x}$ в множество $\mathbf{X}_1$ и отвергается в противном случае. Рандомизированная решающая функция принимает любые значения $0 \leqslant \varphi(\mathbf{x}) \leqslant 1$, и при ее значении φ гипотеза H_1 принимается с вероятностью φ. Тогда вероятность ложной тревоги (значимость критерия)

$$\alpha(\hat{\theta}) = \int_{\mathbf{X}} \varphi(\mathbf{x})\, W_0(\mathbf{x} \mid \hat{\theta})\, d\mathbf{x}, \tag{0.2}$$

а вероятность правильного обнаружения (мощность критерия)

$$D(\hat{\theta}) = \int_{\mathbf{X}} \varphi(\mathbf{x})\, W_1(\mathbf{x} \mid \hat{\theta})\, d\mathbf{x}. \tag{0.3}$$

Задача оптимизации обнаружения заключается в таком выборе $\varphi(\mathbf{x})$, чтобы значение $\alpha(\hat{\theta})$ было *возможно меньше*, а $D(\hat{\theta})$ — *возможно больше*. Ясно, что эти два условия противоречивы. Кроме того, поскольку $\alpha(\hat{\theta})$ и $D(\hat{\theta})$ — функции, задача минимизации (максимизации) их значений в одной точке может находиться в противоречии с задачей минимизации (максимизации) их значений в другой. Поэтому необходимы дополнительные условия и ограничения.

Если зафиксировать каким-либо образом вероятность ложной тревоги $\alpha(\hat{\theta})$, то можно ставить задачу о существовании и нахождении такого критерия, при котором вероятность правильного обнаружения $D(\hat{\theta})$ *максимальна одновременно* для всех значений параметра $\hat{\theta}$. Такой критерий называется *равномерно наиболее мощным* (РНМ критерием) при заданном условии на $\alpha(\hat{\theta})$. Поиск РНМ критериев — одна из основных задач оптимизации обнаружения в условиях параметрической априорной неопределенности.

Вероятность ложной тревоги $\alpha(\hat{\theta})$ наиболее просто задать фиксированной, не зависящей от $\hat{\theta}$. Если такой критерий существует, то он называется *подобным*. Условие подобия часто позволяет настолько сузить класс критериев, что в нем обеспечивается существование РНМ критерия и становится ясным путь его нахождения. Однако, чтобы выделить единственное физическое решение, часто приходится налагать на искомый критерий весьма естественное условие несмещенности $\alpha(\hat{\theta}) \leqslant D(\hat{\theta})$.

Вторая глава посвящена отысканию *несмещенных* и *инвариантных* правил обнаружения сигналов в условиях параметрической априорной неопределенности. На основе принципов подобия и несмещенности в этой главе решен ряд сложных задач оптимизации обнаружения сигналов: на фоне гауссовского шума неизвестной мощности, на фоне гауссовского шума и квазидетерминированной помехи с неизвестными параметрами и др. Ряд задач оптимизации обнаружения решен с использованием принципа инвариантности. Этот принцип нужно отнести к весьма эффективным методам решения задач оптимизации. Он применим при наличии определенной симметрии в исходных данных задачи обнаружения, из которой следует инвариантность оптимального решающего правила относительно некоторой группы преобразований пространства выборок. Использование этой инвариантности (в сочетании с условиями, которые были перечислены выше) во многих случаях позволяет найти явный вид оптимального решающего правила.

В третьей главе приводится минимаксная постановка и решение задач оптимизации обнаружения в условиях параметрической априорной неопределенности при конечной дискретной выборке. Возможность минимаксной постановки этих задач очевидна. Если вернуться к выражениям (0.2) и (0.3), то задача, качественно заключающаяся в *уменьшении* $\alpha(\hat{\theta})$ и *увеличении* $D(\hat{\theta})$, может быть математически точно сформулирована, например, в виде

$$\min_{\hat{\theta}} D(\hat{\theta}) = \max_{\varphi(x)}, \quad \hat{\theta} \in \Theta_1;$$

$$\max_{\hat{\theta}} \alpha(\hat{\theta}) \leqslant \alpha, \quad \hat{\theta} \in \Theta_0,$$

где Θ_0 — область неизвестных параметров помехи; Θ_1 — контролируемая при оптимизации область неизвестных параметров смеси сигнала и помехи, т. е. фиксируется наибольший (по множеству параметров помехи Θ_0) уровень ложных тревог и при этом условии выбором решающего правила максимизируется минимальное (по множеству параметров смеси сигнала с помехой Θ_1) значение вероятности правильного обнаружения.

Рассматриваются и другие варианты минимаксного критерия, в том числе относительные минимаксные критерии, предполагающие более равномерное приближение к потенциальным характеристикам обнаружения в терминах вероятности правильного обнаружения или порогового отношения сигнал-шум.

Достоинство минимаксного подхода заключается в том, что оптимальные минимаксные правила всегда существуют. Исследованы условия, при которых РНМ и минимаксные правила среди несмещенных, подобных и инвариантных правил совпадают. Когда же РНМ правила не существуют, минимаксные правила служат их обобщением. В этой главе приводятся также методы синтеза минимаксных правил как для двоичного, так и для многоальтернативного обнаружения. В качестве

примера применения этих методов рассматривается задача обнаружения случайного сигнала на фоне коррелированных гауссовских помех с неизвестными интенсивностями.

Четвертая глава посвящена дальнейшему развитию методов последовательного анализа и их применению в задачах обнаружения сигналов. Последовательные методы, как известно, используют выборки не фиксированного заранее объема; эти методы предполагают управление ходом эксперимента на основе получаемой информации. Такая постановка задачи наиболее адекватна задаче обнаружения в сложной и нестационарной помеховой обстановке.

Известно, что весьма трудной, до конца не решенной, является задача расчета характеристик последовательной процедуры: нахождение порогов при заданных вероятностях ошибки (или, наоборот, вероятностей ошибок при заданных порогах), расчет средней длительности процесса наблюдения. Имеющиеся в литературе результаты относятся в основном к квазинепрерывному случаю, когда приращение решающей статистики за одно наблюдение мало (малое отношение сигнал-шум). Излагаются новые результаты по расчету характеристик последовательной процедуры при большом отношении сигнал-шум, полученные в основном численным расчетом, методом статистических испытаний (методом Монте-Карло), а в некоторых случаях и аналитически.

Применение последовательного анализа оказывается весьма полезным при решении задач обнаружения при наличии мешающих параметров. Благодаря регулируемому в ходе наблюдения объему выборки, в последовательном анализе ослабляются условия существования РНМ инвариантных критериев. Для малого отношения сигнал-шум в одном наблюдении (близкие альтернативы) удается построить эффективные инвариантные или почти инвариантные последовательные критерии. В качестве таких случаев рассматриваются задачи обнаружения сигнала на фоне помехи неизвестной мощности, а также задача обнаружения сигнала с фазой, изменяющейся от наблюдения к наблюдению по закону с неизвестными параметрами (сигнал с неизвестным доплеровским сдвигом).

Часть главы посвящена вопросам применения последовательных решающих правил в многоканальных системах обнаружения. В качестве первого приближения анализируется подход, основанный на независимом принятии решения в каждом канале. Показано, что этому подходу присущи потери, связанные с тем, что время, затрачиваемое на завершение анализа в каналах, где процедура затянулась, не используется для уточнения решений, принятых в остальных каналах. Этот недостаток устраняется в алгоритмах с зависимыми решениями, когда решение о прекращении наблюдения в каждом канале выносится с учетом совокупности значений статистик всех каналов. Рассматривается ряд алгоритмов такого типа, в том числе алгоритмов, построенных по принципу «комбинированной» решающей статистики, в которых решения в пользу H_0 и H_1 принимаются на основе различных статистик выборочных значений. Показано, что применение таких алгоритмов весьма эффективно в многоканальной системе с априорно неизвестным числом сигналов.

В пятой главе рассматриваются задачи обнаружения сигналов в негауссовских помехах. Внешние помехи радиолокационным, связным, радионавигационным системам в большинстве случаев являются негауссовскими. Существенно негауссовскими, в частности, являются преднамеренные активные помехи (например, хаотические импульсные помехи), помехи от соседних радиосистем, реверберационные помехи и отражения от крупных мешающих объектов и т. д. Негауссовские помехи весьма распространены, и задача улучшения качества обнаружителей благодаря более точному учету статистических свойств помех является важной.

Теория обнаружения в негауссовских помехах разработана в основном для двух моделей помех: в виде марковских процессов и в виде процессов, получающихся нелинейным преобразованием гауссовского шума. Основы теории обнаружения в негауссовских помехах заложены в трудах Р. Л. Стратоновича [4], Ю. Г. Сосулина [3], Б. Р. Левина, А. Ф. Кушнира и А. И. Пинского [5] и др. В пятой главе приводятся основные результаты этих исследований, а также оригинальные результаты автора главы. Дается подробное обоснование возможности использования вышеуказанных моделей помех. Основное внимание уделяется рассмотрению оптимальных алгоритмов и потенциальной помехоустойчивости систем обнаружения. Наряду с этим рассматривается возможность защиты от негауссовских помех фильтровых и корреляционных каналов обработки, входящих в приемоизмерительные тракты любых радиотехнических систем.

Шестая и седьмая главы посвящены непараметрическому обнаружению сигналов. Сюда относятся задачи обнаружения, в которых распределение вероятностей смеси сигнала с шумом и распределение шума неизвестны; при этом решение задач нельзя свести к наличию в распределениях неизвестных параметров. В случае параметрической неопределенности задачи обнаружения могли решаться исключением неизвестных параметров в результате усреднения по априорному распределению, поиском РНМ критериев при различных ограничениях, с помощью минимаксных методов. Получались алгоритмы, слабо чувствительные к статистическим характеристикам сигналов и шумов. Непараметрические методы обнаружения вообще не основываются на знании функционального вида распределений. Обычный путь преодоления непараметрической неопределенности заключается в поиске решающих статистик, не зависящих от распределения шума в достаточно широких пределах его изменения. При этом обеспечивается стабилизация на заданном уровне одной из вероятностей ошибок при переменной помеховой обстановке.

Синтез оптимальных непараметрических обнаружителей наталкивается на практически непреодолимые математические трудности. Решить эту задачу удается лишь в асимптотическом случае, когда число испытаний стремится к бесконечности. Теория асимптотически оптимальных алгоритмов обнаружения излагается в монографии Б. Р. Левина [1] и в седьмой главе настоящей монографии. Для выборок ограниченного объема непараметрические критерии приходится предлагать из эвристических соображений, а изучение и сравнение их произ-

водить прямым расчетом и анализом рабочих характеристик. Таким образом, были предложены знаковый и ранговый критерии, основанные соответственно на испытании знаковой статистики выборки (последовательности знаков элементов) и ранговой статистики (последовательности рангов выборки, т. е. последовательности номеров элементов, присвоенных в порядке их возрастания). Очевидно, что распределение вероятностей знаковой статистики не зависит от вида шума, если она независима и симметрично распределена (относительно нуля). Аналогично распределение вероятностей ранговой статистики не зависит от вида шума, если она независима и стационарна [1].

В шестой главе излагаются теория и принципы построения непараметрических обнаружителей для конечного числа наблюдений и альтернативы общего вида $F(\mathbf{x}|H_0) < F(\mathbf{x}|H_1)$, где $F(\mathbf{x}|H_0)$ и $F(\mathbf{x}|H_1)$ — функции распределения выборки соответственно для гипотезы H_0 (один шум) и гипотезы H_1 (сигнал с шумом). Такая альтернатива характерна для задач обнаружения радиосигналов. Изучаются в основном знаковые и ранговые алгоритмы. Дается методика расчета характеристик обнаружения для широкого класса распределения вероятностей шумов, в том числе негауссовских, производится сравнение с характеристиками классического обнаружителя.

Новым является вопрос сочетания ранговой обработки с последовательным анализом. Синтезируется оптимальный ранговый последовательный обнаружитель, а также изучаются последовательные процедуры, основанные на использовании альтернатив Лемана, и бинарная ранговая процедура. Приводятся методики и результаты расчета характеристик последовательных ранговых обнаружителей. Предложена и изучена усеченная ранговая процедура многоканального обнаружения.

Исследуются вопросы адаптации последовательных непараметрических процедур. Применение непараметрической статистики, инвариантной по отношению к виду и параметрам распределения помехи, позволяет перейти от сложной гипотезы (отсутствие сигнала) к простой и, следовательно, значительно упростить задачу адаптации последовательного непараметрического обнаружителя. Описываются адаптивные ранговые многоканальные обнаружители, адаптация которых сводится к измерению одного или двух параметров независимо от вида шума.

Рассматривается также непараметрическое обнаружение в случае зависимых выборок. Использование марковской аппроксимации для независимых наблюдений позволило синтезировать знаковый и ранговый обнаружители, инвариантные по уровню ложных тревог для конечного объема выборки.

В седьмой главе приводятся некоторые новые результаты синтеза структур и расчета характеристик асимптотически оптимальных непараметрических обнаружителей. Синтезирован ранговый обнаружитель, асимптотически оптимальный для сигналов, содержащих постоянную составляющую. Анализ устойчивости алгоритмов проводится для условий, когда сигналы и помехи отличны от ожидаемых, на которые алгоритм настроен. Введено понятие гарантированных характеристик

обнаружения, определяемых нижней границей нефиксированной ошибки при произвольных сигналах и шумах из заданного класса. Указаны способы вычисления гарантированных характеристик. Описаны структуры и проанализированы характеристики асимптотически оптимальных ранговых обнаружителей на перемешанных статистиках с линейным преобразованием входных данных (ранговые обнаружители с предварительной линейной фильтрацией входного сигнала). Изучаются также двухвыборочные асимптотически оптимальные обнаружители детерминированных и квазидетерминированных сигналов.

В восьмой главе излагается теория статистического синтеза единого радиолокационного алгоритма обнаружения-измерения. Ясно, что механическое разделение радиолокационного процесса на «обнаружение» и «измерение координат» объекта есть идеализация, которая не удовлетворяла теоретиков. При таком разделении остается открытым ряд принципиальных вопросов. Сколько времени нужно отвести на обнаружение? Что делать, если объект не обнаружен — остановить радиолокационные наблюдения или повторить цикл обнаружения? В последнем случае приходим к последовательному алгоритму обнаружения, длительность которого заранее не фиксирована и который продолжается до достижения заданной надежности принимаемого решения.

Таким образом, последовательный анализ наиболее адекватен реальной радиолокационной ситуации. Однако нужно еще учесть, что реальное радиолокационное обнаружение заканчивается указанием местоположения обнаруженного объекта, т. е. является «обнаружением в пространстве», и что объект во время обнаружения может перемещаться. Для решения этих задач, а также для синтеза радиолокационного алгоритма, осуществляющего непрерывный переход от обнаружения к измерению координат объекта, необходимо расширить аппарат последовательного анализа. Задача совместного обнаружения и измерения параметров сигнала рассматривалась Д. Миддлтоном и Р. Эспозито [6], Б. Р. Левиным [1], Ю. Г. Сосулиным [3], И. А. Большаковым [7], П. А. Бакутом и др. [8].

В настоящей монографии этот вопрос изложен согласно [8]. Задача обнаружения-измерения ставится как задача фильтрации процесса, характеризующего радиолокационную обстановку, которая учитывает как факт наличия или отсутствия объекта, так и его координаты и закон перемещения. Единый алгоритм обнаружения-измерения сводится к рекуррентному формированию апостериорной вероятности наличия объекта и плотности распределения вероятностей ее координат. Используя аппроксимацию апостериорной плотности и функции правдоподобия суммой гауссовских сплайнов, удается рекуррентное формирование апостериорной плотности свести к рекуррентному формированию векторных и матричных характеристик гауссовских сплайнов, что существенно упрощает алгоритм обнаружения—измерения. При этом апостериорная вероятность наличия объекта формируется до тех пор, пока она не превысит некоторый порог, достаточно близкий к единице. Этот цикл работы алгоритма можно назвать обнаружением. После превышения порога апостериорная вероятность наличия объекта принимается равной единице и дальнейшим преобразованиям под-

вергается только плотность распределения вероятностей координат объекта. Этот цикл работы алгоритма можно назвать оцениванием координат. Таким образом, оба основных радиолокационных режима вытекают из единого алгоритма.

Работа над книгой распределялась следующим образом: гл. 1 написана А. П. Трифоновым, гл. 2 — В. А. Богдановичем, гл. 3 — В. А. Корадо, гл. 4 — И. Б. Власовым и Б. А. Розановым, гл. 5 — В. Г. Валеевым, гл. 6 — П. С. Акимовым, гл. 7 — А. М. Бриккером, гл. 8 и введение — П. А. Бакутом. Авторы выражают благодарность рецензентам книги профессорам Б. Р. Левину и Ю. Г. Сосулину, сделавшим ряд ценных замечаний и рекомендаций, существенно улучшивших содержание книги, а также канд. физ.-мат. наук Ю. В. Заворуеву, оказавшему значительную помощь в оформлении рукописи.

Глава 1

ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

1.1. Структура асимптотически оптимального обнаружителя

1.1.1. Байесовский обнаружитель

Пусть доступна наблюдению реализация случайного процесса $x(t)$, которая может быть только шумом $n(t)$ или комбинацией сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$. Необходимо определить алгоритм обработки наблюдаемого процесса $x(t)$ и характеристики алгоритма. Посредством этого алгоритма выносится решение о наличии или отсутствии сигнала в наблюдаемом процессе. Задачу обнаружения сигнала на фоне шума удобно сформулировать в терминах проверки статистических гипотез. Именно подлежит проверке гипотеза (простая или сложная) H_0: $x(t) = n(t)$ против альтернативы (также простой или сложной) H_1: $x(t) = s(t) \otimes n(t)$. Символ $\otimes$ обозначает произвольную комбинацию сигнала и шума. Теперь определение алгоритма обнаружения сводится к отысканию правила выбора решения по наблюдаемым данным $x(t)$ в пользу одной из гипотез H_0 или H_1.

В качестве рабочих характеристик алгоритма обнаружения (в зависимости от выбора критерия оптимальности) могут использоваться зависимости среднего риска или вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала от исходных параметров сигнала и шума.

При наличии полной априорной информации о сигнале и помехе используется критерий минимума среднего риска (байесовский критерий). Оптимальное байесовское правило обнаружения, т. е. оптимальное разбиение n-мерного выборочного пространства $\mathbf{X}$ на две непересекающиеся области ($\mathbf{X}_0$ и $\mathbf{X}_1$) основывается на минимизации среднего риска

$$R = \sum_{i,j=0}^{1} p_i \Pi_{ij} \int_{\mathbf{X}_j} W_n(\mathbf{x}|H_i)\, d\mathbf{x}. \qquad (1.1)$$

Здесь $||\Pi_{ij}||$ $(i, j = 0, 1)$ — матрица потерь; $p_1 = 1 - p_0$ — априорная вероятность наличия сигнала; $W_n(\mathbf{x}|H_i)$ — условная плотность вероятности (функция правдоподобия) выборки $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в предположении, что верна гипотеза H_i.

Очевидно, найти структуру байесовского обнаружителя посредством минимизации (1.1) можно лишь при наличии довольно большого числа априорных сведений. Должны быть заданы матрица потерь, априорные вероятности наличия и отсутствия сигнала, модели сигнала

и помехи и способ их комбинации, определяющие функцию правдоподобия. Поэтому в задачах обнаружения находят применение критерии, отличные от байесовского.

Так, при неизвестных априорных вероятностях наличия и отсутствия сигнала может быть использован минимаксный критерий. Минимаксный алгоритм обнаружения представляет собой частный случай байесовского алгоритма для наименее предпочтительных значений вероятностей p_0^* и p_1^*, при которых байесовский (минимальный) средний риск $R(p_0^*, p_1^*) \geqslant R(p_0, p_1)$ при любых $p_0 + p_1 = 1$. Когда известны априорные вероятности p_0 и p_1, но неизвестна матрица потерь, может быть использован критерий максимума апостериорной вероятности. В соответствии с этим критерием решение выносится в пользу гипотезы, которая обладает максимальной апостериорной вероятностью $P\{H_i|\mathbf{x}\} = p_i W_n(\mathbf{x}|H_i)/[p_0 W_n(\mathbf{x}|H_0) + p_1 W_n(\mathbf{x}|H_1)]$, $i = 0, 1$. Наконец, когда неизвестны как априорные вероятности, так и матрица потерь, часто используют критерий максимального правдоподобия, предполагающий сравнение функций правдоподобия $W_n(\mathbf{x}|H_1)$ и $W_n(\mathbf{x}|H_0)$.

Кроме перечисленных критериев обнаружения широкое применение находит критерий Неймана—Пирсона. Для этого критерия фиксируется вероятность ложной тревоги

$$\alpha = \int_{\mathbf{X}_1} W_n(\mathbf{x}\,|\,H_0)\,d\mathbf{x} \tag{1.2}$$

и минимизируется вероятность пропуска сигнала

$$\beta = \int_{\mathbf{X}_0} W_n(\mathbf{x}\,|\,H_1)\,d\mathbf{x}. \tag{1.3}$$

Критерий Неймана—Пирсона, как и критерий максимального правдоподобия, не требует знания априорных вероятностей наличия и отсутствия сигнала, а также матрицы потерь. Заметим, что синтез обнаружителя, оптимального в смысле любого из упомянутых критериев, требует наличия априорных данных, позволяющих построить функции правдоподобия $W_n(\mathbf{x}|H_1)$ и $W_n(\mathbf{x}|H_0)$. Более подробный обзор приведенных здесь и других критериев оптимальности обнаружения можно найти в [1, 15, 17, 29 и др.].

Положим, что обнаружению подлежит детерминированный сигнал $s(t)$ на фоне помехи $n(t)$ по наблюдаемой выборке $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда алгоритм обнаружения сводится к сравнению с порогом C отношения правдоподобия $l(\mathbf{x}) = W_n(\mathbf{x}|H_1)/W_n(\mathbf{x}|H_0)$. Значение порога C определяется выбранным критерием оптимальности обнаружения. При использовании байесовского критерия порог

$$C^* = p_0(\Pi_{10} - \Pi_{00})/p_1(\Pi_{01} - \Pi_{11}). \tag{1.4}$$

Для критерия Неймана—Пирсона $C = C_\alpha$, где C_α — выбирается из условия обеспечения требуемого значения вероятности ложной тревоги (1.2). Если для обнаружения сигнала используется реализация $x(t)$ (а не дискретная выборка $\mathbf{x}$), то с порогом сравнивается функ-

ционал отношения правдоподобия (ФОП) $l[x(t)] = \lim\limits_{n\to\infty} l(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ [9, 15, 17 и др.]. Однако задача обнаружения детерминированного сигнала на фоне шума, все статистические характеристики которого априори известны, встречается весьма редко. Реальные условия приема сигнала на фоне шума, как правило, приводят к необходимости решения задачи обнаружения в условиях априорной неопределенности. Априорная неопределенность относительно сигнала и шума может иметь различную форму. Соответственно весьма разнообразными оказываются методы преодоления априорной неопределенности [1, 15, 17, 29 и др.].

Рассмотрим один частный случай параметрической априорной неопределенности относительно обнаруживаемого сигнала. Положим, что полезный сигнал содержит μ неизвестных параметров $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_\mu)$, распределенных с априорной плотностью вероятности $W(\boldsymbol{\vartheta})$ (известной или неизвестной) в области $\boldsymbol{\vartheta} \in \Theta$. Тогда при известной функции $W(\boldsymbol{\vartheta})$ байесовский алгоритм имеет вид [29, 31]: принимаются решения о наличии сигнала, если

$$\Lambda \geqslant C^*, \tag{1.5}$$

и решение об отсутствии сигнала, когда $\Lambda < C^*$. В (1.5)

$$\Lambda \equiv \Lambda[x(t)] = \int_{\Theta} l(\boldsymbol{\vartheta})\, W(\boldsymbol{\vartheta})\, d\boldsymbol{\vartheta} \tag{1.6}$$

— усредненный ФОП; $l(\boldsymbol{\vartheta}) = l[x(t)|\boldsymbol{\vartheta}]$ — ФОП, а порог C^* определяется из (1.4). При использовании других критериев обнаружения порог в (1.5) может отличаться от C^* (1.4).

Конкретизируем эти общие соотношения применительно к следующей модели сигнала и шума, которая далее исследуется в этой главе. Пусть при $t \in [0; T]$

$$x(t) = \begin{cases} n(t); \\ s(t, \boldsymbol{\vartheta}_0) + n(t), \end{cases} \tag{1.7}$$

где $n(t)$ — реализация гауссовского шума и

$$M[n(t)] = 0;\ M[n(t_1)\, n(t_2)] = B(t_1, t_2). \tag{1.8}$$

Полезный сигнал $s(t, \boldsymbol{\vartheta})$ предполагается известной функцией времени t и неизвестных параметров $\boldsymbol{\vartheta} \in \Theta$. Тогда

$$l(\boldsymbol{\vartheta}) = \exp[L(\boldsymbol{\vartheta})]; \tag{1.9}$$

$$L(\boldsymbol{\vartheta}) = \int_0^T x(t)\, V(t, \boldsymbol{\vartheta})\, dt - \int_0^T s(t, \boldsymbol{\vartheta})\, V(t, \boldsymbol{\vartheta})\, dt/2 =$$

$$= L_x(\boldsymbol{\vartheta}) - \int_0^T s(t, \boldsymbol{\vartheta})\, V(t, \boldsymbol{\vartheta})\, dt/2 \tag{1.10}$$

— логарифм ФОП, а $V(t, \vartheta)$ — решение интегрального уравнения

$$\int_0^T B(t, \tau) V(\tau, \vartheta)\, d\tau = s(t, \vartheta), \quad t \in [0, T], \quad \vartheta \in \Theta. \tag{1.11}$$

Последнее слагаемое в (1.10) определяет отношение сигнал-шум при фиксированных значениях неизвестных параметров ϑ. Будем называть [1, 27, 29]

$$d_T^2 = \int_0^T s(t, \vartheta_0) V(t, \vartheta_0)\, dt, \tag{1.12}$$

где ϑ_0 — истинное значение неизвестных параметров, отношением сигнал-шум для принятого сигнала (1.7).

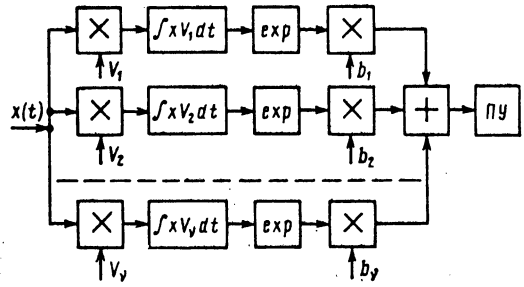


Рис. 1.1. Байесовский приемник

Соотношения (1.6), (1.9)—(1.11) определяют структуру байесовского обнаружителя сигнала с неизвестными параметрами на фоне гауссовского шума. Функциональная схема байесовского обнаружителя сигнала с одним неизвестным параметром $\vartheta \in \Theta$ приведена на рис. 1.1. Здесь приняты обозначения: $V_k = V(t, \vartheta_k)$, exp — нелинейный преобразователь с экспоненциальной характеристикой;

$$b_k = W(\vartheta_k) \exp\left[-\int_0^T s(t, \vartheta_k) V(t, \vartheta_k)\, dt/2\right];$$

$$\vartheta_{k+1} - \vartheta_k = \Delta\vartheta, \; k = \overline{1, \nu}; \; \nu = |\Theta|/\Delta\vartheta + 1,$$

$|\Theta|$ — объем области Θ; ПУ — пороговое устройство с порогом $C^*/\Delta\vartheta$.

Функциональная схема рис. 1.1 лишь приближенно реализует байесовский обнаружитель, так как вместо интеграла в (1.6) эта схема вырабатывает его аппроксимацию в виде конечной суммы ν слагаемых. Для точной реализации байесовского обнаружителя необходимо в схеме рис. 1.1 использовать бесконечно большое число корреляторов, опорные сигналы которых отличаются значениями параметра ϑ_k, сдвинутыми на бесконечно малую величину. Техническая реализация та-

кого устройства вряд ли возможна. Заметим, что при обнаружения сигнала с неизвестным неэнергетическим параметром [27], распределенным равновероятно в интервале Θ, все $b_k = \text{const}$ и необходимость в использовании соответствующих перемножителей отпадает.

Естественной характеристикой байесовского алгоритма обнаружения является байесовский риск, равный минимальному значению среднего риска (1.1). Однако во многих прикладных задачах удобнее оперировать вероятностями ошибок 1-го рода (ложной тревоги) α (1.2) и ошибок 2-го рода (пропуска сигнала) β (1.3). Для произвольных параметров ϑ точное определение α и β весьма затруднительно, так что приходится прибегать к приближенным методам. Возможность применения приближенных методов для определения характеристик обнаружителя существенно зависит от отношения сигнал-шум d_T^2 (1.12) и от свойств шумовой

$$\widehat{N}(\vartheta) = d_T N(\vartheta) = \int_0^T n(t)\, V(t, \vartheta)\, dt \tag{1.13}$$

и сигнальной

$$\widehat{S}(\vartheta_1, \vartheta_2) = d_T^2 S(\vartheta_1, \vartheta_2) = \int_0^T s(t, \vartheta_1)\, V(t, \vartheta_2)\, dt \tag{1.14}$$

функций, которые подробно рассмотрены в [27].

Большинство приближенных методов расчета α и β для байесовского обнаружителя основано на вычислении моментов усредненного ФОП (1.6). В результате, как правило, определяются лишь некоторые границы для вероятностей ошибок [15 и др.].

1.1.2. Асимптотически оптимальный обнаружитель

Использование оптимального алгоритма обнаружения, определяемого (1.5), (1.6), связано с трудностями [1, 29, 31]. Поэтому определенный интерес представляет исследование асимптотического поведения байесовского алгоритма обнаружения при неограниченном увеличении отношения сигнал-шум, когда часть этих трудностей удается преодолеть.

Перепишем оптимальное правило обнаружения (1.5) в виде: если

$$L \geqslant c^*, \tag{1.15}$$

принимается решение о наличии сигнала, и если $L < c^*$ — решение о его отсутствии. Здесь

$$L = \ln \Lambda; \quad c^* = \ln C^*. \tag{1.16}$$

Ограничимся вначале случаем, когда сигнал $s(t, \vartheta)$ содержит лишь один неэнергетический параметр ϑ, причем для определенности положим $|\vartheta| \leqslant 1$. Заметим, что к интервалу $[-1; 1]$ с помощью простого линейного преобразования можно свести любой конечный интервал оп-

ределения неизвестного параметра. Для гауссовского шума (1.7), (1.8) ФОП (1.9) можно переписать как

$$l(\vartheta) = \exp\{d_T^2 [m_z(\vartheta) - 1/2]\}, \tag{1.17}$$

где

$$m_z(\vartheta) = \int_0^T x(t)\, V(t, \vartheta)\, dt / d_T^2 \tag{1.18}$$

— нормированный член логарифма ФОП, зависящий от неизвестного параметра. Поскольку параметр ϑ предполагается неэнергетическим, отношение сигнал-шум не зависит от значения ϑ [27]. При этом $m_z(\vartheta)$ представляет собой реализацию нестационарного гауссовского процесса, для которого, как это легко установить из свойств выходного сигнала оптимального приемника, приведенных в [27], $M[m_z(\vartheta)] \leqslant 1$, $d_T^2 \leqslant M[m_z^2(\vartheta)] \leqslant 1 + d_T^2$. Обозначив ϑ_m положение абсолютного (наибольшего) максимума $m_z(\vartheta)$ при $\vartheta \in [-1; 1]$, докажем следующее утверждение. Пусть:

1. Плотность вероятности $W(\vartheta)$ непрерывна и $W(\vartheta) > 0$.

2. Реализация гауссовского случайного процесса $m_z(\vartheta)$ дважды непрерывно дифференцируема с вероятностью 1.

3. Вероятность отсутствия сигнала $p_0 > 0$, а потери таковы, что $\Pi_{10} > \Pi_{00} > 0$; $\Pi_{01} > \Pi_{11} \geqslant 0$. Тогда при $d_T \to \infty$ асимптотически байесовский алгоритм обнаружения имеет вид: принимаются решение о наличии сигнала, если

$$m_z(\vartheta_m) > 1/2, \tag{1.19}$$

и решение об отсутствии сигнала в противном случае.

По определению ϑ_m представляет собой положение абсолютного максимума $m_z(\vartheta)$, $\vartheta \in [-1; 1]$. Поэтому, кроме, может быть, значений $\vartheta_m = \pm 1$, всюду $m_z'(\vartheta_m) = 0$ и для любого $\varepsilon \in [-1 - \vartheta_m; 1 - \vartheta_m]$ справедливо неравенство $m_z(\vartheta_m + \varepsilon) - m_z(\vartheta_m) \leqslant 0$. Из этого неравенства, используя формулу Тейлора, получаем $m_z''(\vartheta_m + \varepsilon\eta) \leqslant 0$, где $0 \leqslant \eta \leqslant 1$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, в силу непрерывности $m_z''(\vartheta)$ с вероятностью 1 имеем, что $m_z''(\vartheta_m) \leqslant 0$ для всех $|\vartheta_m| < 1$. Реализация гауссовского случайного процесса $m_z'(\vartheta)$ непрерывно дифференцируема с вероятностью 1. Так как гауссовская одномерная плотность вероятности ограничена при всех значениях аргумента, то на основании теоремы Булинской [25] можем утверждать, что вероятность одновременного выполнения равенств $m_z'(\vartheta) = 0$ и $m_z''(\vartheta) = 0$ равна нулю. Следовательно, при $m_z'(\vartheta_m) = 0$ имеем $m_z''(\vartheta_m) < 0$ с вероятностью 1. Введем в рассмотрение функцию

$$\Delta_z(\vartheta_1, \vartheta_2) = m_z(\vartheta_1) - m_z(\vartheta_2). \tag{1.20}$$

Используя эту функцию в выражении для L (1.16), получаем

$$L = d_T^2 [m_z(\vartheta_m) - 1/2] + \ln \int_{-1}^{1} W(\vartheta) \exp[-d_T^2 \Delta_z(\vartheta_m, \vartheta)]\, d\vartheta. \tag{1.21}$$

Поскольку $\Delta_z(\vartheta_m, \vartheta)$ непрерывна по ϑ с вероятностью 1, интеграл в (1.21) существует с той же вероятностью, как обычный интеграл Римана [25]. При этом $\Delta_z(\vartheta_m, \vartheta) > 0$, если $\vartheta_m \neq \vartheta$, $\Delta_z(\vartheta_m, \vartheta_m) = 0$ и функция $\Delta_z(\vartheta_m, \vartheta)$ дважды непрерывно дифференцируема по ϑ с вероятностью 1. К тому же при $|\vartheta_m| < 1$

$$[d\Delta_z(\vartheta_m, \vartheta)/d\vartheta]_{\vartheta_m} = -m_z'(\vartheta_m) = 0; \quad [d^2\Delta_z(\vartheta_m, \vartheta)/d\vartheta^2]_{\vartheta_m} = -m_z''(\vartheta_m) > 0,$$

а подынтегральная функция в (1.21) абсолютно интегрируема при любых d_T и ϑ_m. Действительно,

$$\int_{-1}^{1} |W(\vartheta) \exp[-d_T^2 \Delta_z(\vartheta_m, \vartheta)]| d\vartheta \leqslant 1.$$

Таким образом, для интеграла под знаком логарифма в (1.21) с вероятностью 1 выполняются все условия применимости асимптотической формулы Лапласа [55]. Следовательно, когда $|\vartheta_m| < 1$, то при $d_T \to \infty$ с вероятностью 1 имеем

$$d_T \int_{-1}^{1} W(\vartheta) \exp[-d_T^2 \Delta_z(\vartheta_m, \vartheta)] d\vartheta \to W(\vartheta_m) \sqrt{-2\pi / m_z''(\vartheta_m)}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда ϑ_m принимает одно из граничных значений ± 1. Известно [61], что событие $\vartheta_m = \pm 1$ имеет место с конечной вероятностью. Если $\vartheta_m = 1$, то, очевидно, $m_z(1-\varepsilon) \leqslant m_z(1)$ для всех $0 \leqslant \varepsilon < 2$. Как и выше, с помощью формулы Тейлора отсюда получаем, что $m_z'(1) \geqslant 0$. Поскольку $m_z'(1)$ — гауссовская случайная величина, то $m_z'(1) \neq 0$ с вероятностью 1. Поэтому при $\vartheta_m = 1$ имеем $m_z'(1) > 0$, а $\Delta_z'(1, 1) < 0$ с той же вероятностью. Опять применяя асимптотическую формулу Лапласа, при $\vartheta_m = 1$ и $d_T \to \infty$ для интеграла в (1.21) с вероятностью 1 находим

$$d_T^2 \int_{-1}^{1} W(\vartheta) \exp[-d_T^2 \Delta_z(\vartheta_m, \vartheta)] d\vartheta \to W(1)/m_z'(1). \qquad (1.22)$$

Совершенно аналогично при $\vartheta_m = -1$ и $d_T \to \infty$

$$d_T^2 \int_{-1}^{1} W(\vartheta) \exp[-d_T^2 \Delta_z(\vartheta_m, \vartheta)] d\vartheta \to -W(-1)/m_z'(-1). \qquad (1.23)$$

Значит, при всех $|\vartheta_m| \leqslant 1$ и $d_T \to \infty$

$$L = d_T^2 [m_z(\vartheta_m) - 1/2] + o(d_T) = L(\vartheta_m) + o(d_T).$$

Учитывая условие 3, имеем, что при $d_T \to \infty$

$$c^* = o(d_T). \qquad (1.24)$$

Последние два соотношения доказывают справедливость сформулированного выше утверждения (1.19).

Покажем теперь, что найденный асимптотически байесовский алгоритм не является вырожденным. Для этого достаточно установить, что $m_z(\vartheta_m) \not\to 0$ при $d_T \to \infty$ или [3]

$$\lim_{d_T \to \infty} M[L(\vartheta_m)]/d_T^2 \neq 0. \qquad (1.25)$$

Пусть сигнал присутствует на входе приемника. Тогда

$$L(\vartheta_m) = d_T^2 S(\vartheta_0, \vartheta_m) + d_T N(\vartheta_m) - d_T^2/2,$$

где $N(\vartheta)$ и $S(\vartheta_1, \vartheta_2)$ определяются из (1.13) и (1.14).

При наличии сигнала на входе приемника ϑ_m является оценкой максимального правдоподобия параметра ϑ_0. Когда выполняется условие 2, оценка максимального правдоподобия состоятельна [1, 24, 29], т. е. $\vartheta_m \to \vartheta_0$ при $d_T \to \infty$. Следовательно, при наличии сигнала

$$\lim_{d_T \to \infty} M[L(\vartheta_m)]/d_T^2 = 1/2. \qquad (1.26)$$

При отсутствии полезного сигнала $L(\vartheta_m) = d_T N(\vartheta_m) - d_T^2/2$, где $N(\vartheta)$ — реализация гауссовского случайного процесса с нулевым средним значением, единичной дисперсией и функцией корреляции $S(\vartheta_1, \vartheta_2)$ [27]. Так как статистические характеристики процесса $N(\vartheta)$ не зависят от отношения сигнал-шум d_T, то $M[N(\vartheta_m)]$ — среднее значение абсолютного максимума реализации $N(\vartheta)$ — при $\vartheta \in [-1; 1]$ также не зависит от d_T. Значит, при $d_T \to \infty$ и отсутствии сигнала

$$\lim_{d_T \to \infty} M[L(\vartheta_m)]/d_T^2 = -1/2. \tag{1.27}$$

Согласно (1.26) и (1.27) соотношение (1.25) выполняется и асимптотически байесовский алгоритм (1.19) невырожден.

Таким образом, асимптотически байесовский обнаружитель должен вырабатывать член логарифма ФОП $L_z(\vartheta)$ (1.10) для всех значений $\vartheta \in [-1; 1]$ и принимать решение о наличии полезного сигнала, если абсолютный максимум $L_z(\vartheta)$ превышает порог $d_T^2/2$. Видим, что асимптотически байесовским оказывается обнаружение по методу максимального правдоподобия. Устройство, реализующее этот метод, будем в дальнейшем называть приемником максимального правдоподобия. Заметим, что структура асимптотически байесовского обнаружителя инвариантна к априорным вероятностям наличия и отсутствия сигнала, к априорной плотности вероятности неизвестного параметра и к значениям потерь.

Для байесовского алгоритма обнаружения порог C^* не зависит от отношения сигнал-шум. В некоторых случаях, например при обнаружении, оптимальном в смысле критерия Неймана—Пирсона, логарифм усредненного ФОП L (1.16) необходимо сравнивать с порогом $c = \ln C$, который может возрастать с увеличением отношения сигнал-шум. Если значение порога c с увеличением d_T растет достаточно быстро, то соотношение, аналогичное (1.24), может не выполняться. В таких случаях структура асимптотически оптимального обнаружителя имеет вид: принимается решение о наличии сигнала, если

$$L_z(\vartheta_m) > c. \tag{1.28}$$

Полагая в этой формуле $c = d_T^2/2$, опять имеем асимптотически байесовский обнаружитель. В общем случае c определяется в зависимости от используемого критерия оптимальности.

Рассмотрим теперь коротко условия 1—3, при которых получена предельная форма оптимального алгоритма обнаружения (1.19) или (1.28). Условия 1 и 3 налагают несущественные ограничения на априорные данные и потери, которые в прикладных задачах обычно выполняются. Условие 2 требует определенной регулярности реализации $m_z(\vartheta)$ гауссовского случайного процесса. Для того чтобы реализация $m_z(\vartheta)$ была дважды непрерывно дифференцируема с вероятностью 1, достаточно существования пяти непрерывных производных по ϑ сигнала $s(t, \vartheta)$ при $t \in [0; T]$, $\vartheta \in [-1; 1]$. В некоторых случаях это ограничение может быть ослаблено и достаточным оказывается существование двух непрерывных производных сигнала по неизвестному параметру [46].

Полученные результаты можно распространить на случай, когда полезный сигнал зависит от μ неизвестных неэнергетических параметров $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_\mu)$. Тогда L (1.16) можно переписать как

$$L = \ln \int_{\Theta} W(\boldsymbol{\vartheta}) \exp\{d_T^2 [m_z(\boldsymbol{\vartheta}) - 1/2]\} d\boldsymbol{\vartheta}, \quad m_z(\boldsymbol{\vartheta}) = L_z(\boldsymbol{\vartheta})/d_T^2. \quad (1.29)$$

В силу определения неэнергетического параметра [27] d_T не зависит от $\boldsymbol{\vartheta}$, $M[m_z(\boldsymbol{\vartheta})] \leqslant 1$, $d_T^{-2} \leqslant M[m_z^2(\boldsymbol{\vartheta})] \leqslant 1 + d_T^{-2}$.

Положим, что реализация $m_z(\boldsymbol{\vartheta})$ дважды непрерывно дифференцируема по всем параметрам ϑ_i ($i = \overline{1, \mu}$) с вероятностью 1; априорная плотность вероятности $W(\boldsymbol{\vartheta})$ непрерывна по всем параметрам и $W(\boldsymbol{\vartheta}) \neq 0$. Обозначим $\boldsymbol{\vartheta}_m$ положение абсолютного максимума реализации $m_z(\boldsymbol{\vartheta})$ при $\boldsymbol{\vartheta} \in \Theta$. С помощью асимптотической формулы Лапласа для многократных интегралов [55] исследуем поведение интеграла в (1.29), когда $d_T \to \infty$. Получаем

$$L = d_T^2 [m_z(\boldsymbol{\vartheta}_m) - 1/2] + o(d_T). \quad (1.30)$$

Для байесовского обнаружителя опять выполняется (1.24), так что его предельная форма запишется как: принимаются решение о наличии сигнала, если $m_z(\boldsymbol{\vartheta}_m) > 1/2$, и решение о его отсутствии, когда $m_z(\boldsymbol{\vartheta}_m) < 1/2$. В общем случае асимптотически оптимальный обнаружитель сигнала с несколькими неизвестными неэнергетическими параметрами должен вырабатывать функцию $L_z(\boldsymbol{\vartheta})$ для всех $\boldsymbol{\vartheta} \in \Theta$, определять ее абсолютный максимум $L_z(\boldsymbol{\vartheta}_m)$ и принимать решение о наличии сигнала, если

$$L_z(\boldsymbol{\vartheta}_m) > c, \quad (1.31)$$

где c, как и ранее, зависит от заданного критерия оптимальности. Таким образом, асимптотически оптимальным оказывается обнаружение по методу максимального правдоподобия, как и при одном неизвестном неэнергетическом параметре сигнала. Это утверждение справедливо при $d_T \to \infty$.

Неограниченного увеличения отношения сигнал-шум при помехе в виде белого шума можно добиться увеличением энергии сигнала или уменьшением спектральной плотности шума. При коррелированной помехе отношение сигнал-шум может быть сделано достаточно большим также из-за спектральных различий сигнала и шума.

Среди различных энергетических параметров (т. е. параметров, от которых зависит отношение сигнал-шум [27]) простейшим является амплитуда. Действительно, амплитуда входит в реализацию наблюдаемых данных линейно, что упрощает анализ байесовского обнаружителя. Поэтому установим вначале предельную форму байесовского обнаружителя сигнала с неизвестной амплитудой. Положим, что при наличии полезного сигнала реализация наблюдаемых данных

$$x(t) = a_0 s_1(t) + n(t), \quad t \in [0; T], \quad (1.32)$$

где a_0 — значение неизвестной амплитуды. Так как амплитуда по определению может принимать только положительные значения, пока будем считать, что она распределена с плотностью вероятности $W(a)$

на интервале [0; 1], а затем укажем обобщение на случай $0 \leqslant a < \infty$. Для принятых условий усредненный ФОП можно представить в виде

$$\Lambda = \int_0^1 W(a) \exp\left[d_1^2 (a a_m - a^2/2)\right] da, \tag{1.33}$$

где

$$a_m = \int_0^T x(t) V_1(t)\, dt / d_1^2, \quad d_1^2 = \int_0^T s_1(t) V_1(t)\, dt; \tag{1.34}$$

d_1 — отношение сигнал-шум для сигнала с единичной амплитудой $s_1(t)$, а $V_1(t)$ — решение уравнения (1.11) при замене его правой части на $s_1(t)$. Подставляя (1.33) в (1.16), перепишем логарифм усредненного ФОП как

$$L = a_m^2 d_1^2/2 + \ln \int_0^1 W(a) \exp\left[-d_1^2 (a - a_m)^2/2\right] da. \tag{1.35}$$

Найдем предельное значение интеграла в этой формуле при $d_1 \to \infty$. Если $0 < a_m < 1$, $W(a_m) \neq 0$ и $W(a)$ — непрерывная функция, то для интеграла в (1.35) выполняются все условия применимости асимптотической формулы Лапласа [55]. Используя эту формулу, при $d_1 \to \infty$ получаем

$$d_1 \int_0^1 W(a) \exp\left[-d_1^2 (a - a_m)^2/2\right] da \to W(a_m) \sqrt{2\pi}. \tag{1.36}$$

В случае, когда $a_m > 1$ и $W(1) \neq 0$, применение асимптотической формулы Лапласа приводит при $d_1 \to \infty$ к предельному значению интеграла

$$d_1^2 \exp\left[d_1^2 (a_m - 1)^2/2\right] \int_0^1 W(a) \exp\left[-d_1^2 (a - a_m)^2/2\right] da \to$$

$$\to W(1)/(a_m - 1). \tag{1.37}$$

Аналогичным образом, если $W(0) \neq 0$, $a_m < 0$ и $d_1 \to \infty$,

$$d_1^2 \exp\left(a_m^2 d_1^2/2\right) \int_0^1 W(a) \exp\left[-d_1^2 (a - a_m)^2/2\right] da \to -W(0)/a_m. \tag{1.38}$$

На примере случая $a_m < 0$ рассмотрим поведение интеграла в (1.35) при $d_1 \to \infty$, если условие $W(0) \neq 0$ не выполняется. Пусть при $a \to 0$

$$W(a) \sim W_0 a^{\varepsilon}, \quad \varepsilon > -1. \tag{1.39}$$

Тогда применение обобщения асимптотической формулы Лапласа приводит к результату

$$d_1^{2(\varepsilon+1)} \exp\left(a_m^2 d_1^2/2\right) \int_0^1 W(a) \exp\left[-d_1^2 (a - a_m)^2/2\right] da \to$$

$$\to W_0 \Gamma(\varepsilon + 1)/(-a_m)^{\varepsilon+1}.$$

Здесь $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция. В частном случае $\varepsilon = 0$, полагая $W(0) = W_0$, получаем (1.38). Таким образом, при выполнении (1.39) и $d_1 \to \infty$ имеем

$$L = \begin{cases} d_1^2 (2a_m - 1)/2 - 2 \ln d_1 + o(\ln d_1), & a_m > 1; \\ a_m^2 d_1^2/2 - \ln d_1 + o(\ln d_1), & 0 < a_m < 1; \\ -2(\varepsilon + 1) \ln d_1 + o(\ln d_1), & a_m < 0. \end{cases} \tag{1.40}$$

В силу ограничений, налагаемых на потери и априорные вероятности наличия и отсутствия сигнала (условие 3), при $d_1 \to \infty$ имеем $c^* = o(\ln d_1)$. Поскольку $\ln d_1/d_1^2 < 1/4$, то согласно (1.15) и (1.40) асимптотически байесовским правилом обнаружения будет следующее: принимается решение о наличии сигнала, если

$$a_m d_1 > \sqrt{2 \ln d_1}, \tag{1.41}$$

и решение о его отсутствии, когда $a_m d_1 < \sqrt{2 \ln d_1}$. Заметим, что то же самое правило получаем, если рассматривать только возможные значения $0 < a_m < 1$ (1.40). Следовательно, когда неизвестная амплитуда определена на интервале $[0, \infty)$, асимптотически байесовским будет алгоритм (1.41). Если используется критерий оптимальности, отличный от байесовского, то аналогично (1.28), (1.31) асимптотически оптимальный алгоритм обнаружения имеет вид: решение о наличии сигнала выносится при

$$a_m d_1 > c. \tag{1.42}$$

Положим теперь, что полезный сигнал кроме неизвестной амплитуды содержит еще μ неизвестных неэнергетических параметров $\boldsymbol{\vartheta}$, распределенных с плотностью вероятности $W(\boldsymbol{\vartheta})$ в области Θ. В этом случае при наличии сигнала

$$x(t) = a_0 s_1(t, \boldsymbol{\vartheta}_0) + n(t), \tag{1.43}$$

а усредненный ФОП (1.6) равен

$$\Lambda = \int_0^\infty \int_\Theta W(a) W(\boldsymbol{\vartheta}) \exp\{d_1^2 [a\hat{a}(\boldsymbol{\vartheta}) - a^2/2]\} \, da \, d\boldsymbol{\vartheta}. \tag{1.44}$$

Здесь

$$\hat{a}(\boldsymbol{\vartheta}) = \int_0^T x(t) V_1(t, \boldsymbol{\vartheta}) \, dt/d_1^2, \quad d_1^2 = \int_0^T s_1(t, \boldsymbol{\vartheta}) V_1(t, \boldsymbol{\vartheta}) \, dt,$$

а $V_1(t, \boldsymbol{\vartheta})$ определяется аналогично $V_1(t)$. Выше было показано, что ограничение априорного интервала определения амплитуды (при $a > 0$) не влияет на предельную форму оптимального обнаружителя. Соответственно предполагается, что интегрирование по a в (1.44) выполняется по той части интервала $[0; \infty)$, где $W(a) \neq 0$.

Применяя опять формулу асимптотического интегрирования Лапласа, получаем из (1.44) асимптотическое значение $L = \ln \Lambda$ при $d_1 \to \infty$. Если $\hat{a}(\boldsymbol{\vartheta}_m) > 0$, то

$$L = d_1^2 \hat{a}^2(\boldsymbol{\vartheta}_m)/2 - (\mu + 1) \ln d_1 + o(\ln d_1).$$

Если же $\widehat{a}(\vartheta_m) < 0$, то

$$L = -2(\varepsilon + 1)\ln d_1 + o(\ln d_1).$$

Следовательно, асимптотически оптимальный алгоритм обнаружения для любого порога $c > 0$ принимает вид: решение о наличии сигнала выносится, когда

$$d_1 \widehat{a}(\vartheta_m) > c. \tag{1.45}$$

Поскольку $c^* = o(\ln d_1)$, то, положив здесь $c = \sqrt{2(\mu + 1)\ln d_1}$, имеем асимптотически байесовский алгоритм, а при $\mu = 0$ приходим к (1.41).

Обозначим

$$L_{z1}(\vartheta) = \int_0^T x(t)\, V_1(t, \vartheta)\, dt. \tag{1.46}$$

Тогда согласно (1.45) асимптотически оптимальный обнаружитель должен вырабатывать величину

$$d_1^{-1} \max_{\vartheta \in \Theta} L_{z1}(\vartheta), \tag{1.47}$$

которая не зависит от неизвестной амплитуды сигнала (1.43).

Определение структуры асимптотически байесовского обнаружителя сигнала с неизвестным произвольным энергетическим параметром вызывает некоторые затруднения. Их легко преодолеть, если ограничиться рассмотрением критериев оптимальности, у которых порог c возрастает достаточно быстро с увеличением отношения сигнал-шум.

Пусть полезный сигнал содержит один энергетический параметр ϑ ($|\vartheta| \leqslant 1$) с априорной плотностью вероятности $W(\vartheta)$. Положим, что в принятой реализации $x(t)$ присутствует полезный сигнал $s(t, \vartheta_0)$. Тогда логарифм усредненного ФОП (1.16) можем записать в виде

$$L_1 = \ln \int_{-1}^{1} W(\vartheta) \exp[d_T^2 m_1(\vartheta)]\, d\vartheta. \tag{1.48}$$

Здесь при наличии полезного сигнала

$$m_1(\vartheta) = L_1(\vartheta)/d_T^2 = \left[\int_0^T s(t, \vartheta_0)\, V(t, \vartheta)\, dt - \int_0^T s(t, \vartheta)\, V(t, \vartheta)\, dt/2 + \int_0^T n(t)\, V(t, \vartheta)\, dt\right] \Big/ d_T^2$$

— нормированный логарифм ФОП, а d_T^2 — отношение сигнал-шум для принятого сигнала $s(t, \vartheta_0)$ (1.12), которое в общем случае зависит от истинного значения параметра ϑ_0. Функция $m_1(\vartheta)$ представляет собой реализацию нестационарного гауссовского случайного процесса, для которого [27]

$$M[m_1(\vartheta)] \leqslant 1/2,\ a_1/d_T^2 \leqslant M\{m_1(\vartheta) - M[m_1(\vartheta)]\}^2 \leqslant a_2/d_T^2. \tag{1.49}$$

Здесь $a_1 = \min q(\vartheta)/d_T^2$, $a_2 = \max q(\vartheta)/d_T^2$, причем если $q(\vartheta) = \int_0^T s(t, \vartheta)\, V(t, \vartheta)\, dt$ — непрерывная функция ϑ, то a_1 и a_2 ограничены при $d_T \to \infty$, поскольку $d_T^2 = q(\vartheta_0)$.

Положим, что для рассматриваемого случая выполняются условия 1—3 п. 1.1.2. Обозначим ϑ_m положение абсолютного максимума $m_1(\vartheta)$; используя асимптотическую формулу Лапласа, получаем, когда $d_T \to \infty$,

$$L_1 = d_T^2\, m_1(\vartheta_m) - \ln d_T + o(\ln d_T). \tag{1.50}$$

Если в принятой реализации $x(t)$ сигнал отсутствует, то

$$L_0 = \ln \int_{-1}^{1} W(\vartheta) \exp[\widehat{N}(\vartheta) - q(\vartheta)/2]\, d\vartheta, \tag{1.51}$$

где $\widehat{N}(\vartheta)$ определяется соотношением (1.13). Выберем такое значение $\widehat{\vartheta} \in [-1; 1]$, что $q(\widehat{\vartheta}) = \widehat{d}^2 \neq 0$. Тогда, вводя нормированную функцию

$$m_0(\vartheta) = [\widehat{N}(\vartheta) - q(\vartheta)/2]/\widehat{d}^2,$$

перепишем (1.51) как

$$L_0 = \ln \int_{-1}^{1} W(\vartheta) \exp[\widehat{d}^2\, m_0(\vartheta)]\, d\vartheta. \tag{1.52}$$

Используя свойства выходного сигнала оптимального приемника [27], нетрудно показать, что $M[m_0(\vartheta)] \leqslant \widehat{a}_2/2$ и $\widehat{a}_1/\widehat{d}^2 \leqslant M\{m_0(\vartheta) - M[m_0(\vartheta)]\}^2 \leqslant \widehat{a}_2/\widehat{d}^2$, где $\widehat{a}_1 = \min q(\vartheta)/\widehat{d}^2$, а $\widehat{a}_2 = \max q(\vartheta)/\widehat{d}^2$, причем для непрерывной функции $q(\vartheta)$ величины $\widehat{a}_1$ и $\widehat{a}_2$ ограничены при $\widehat{d} \to \infty$. Поскольку значение $\widehat{\vartheta}$ выбиралось из условия $\widehat{d} \neq 0$, то, если $d_T \neq 0$, можно положить $\widehat{\vartheta} = \vartheta_0$. При этом $\widehat{d}^2$ равно отношению сигнал-шум при приеме сигнала с параметром ϑ_0. Следовательно, если это отношение сигнал-шум возрастает, то $\widehat{d}$ в (1.52) тоже возрастает. Применяя к (1.50) асимптотическую формулу Лапласа, аналогично (1.52) получаем при $\widehat{d} \to \infty$

$$L_0 = \widehat{d}^2\, m_0(\vartheta_m) - \ln \widehat{d} + o(\ln \widehat{d}).$$

В этой формуле ϑ_m — положение абсолютного максимума $m_0(\vartheta)$, $\vartheta \in [-1; 1]$.

Положим теперь, что используется критерий оптимальности, для которого с увеличением d_T (или $\widehat{d}$) порог c возрастает настолько быстро, что $\ln d_T = o(c)$. Тогда асимптотически оптимальный обнаружитель должен вырабатывать логарифм ФОП $L(\vartheta)$ (1.9) и принимать решение о наличии сигнала, если

$$\max_{\vartheta \in [-1;\ 1]} L(\vartheta) > c. \tag{1.53}$$

Таким образом, и при обнаружении сигнала с неизвестным энергетическим параметром асимптотически оптимальным является приемник максимального правдоподобия.

Достаточные условия, при которых имеет место неограниченное увеличение отношения сигнал-шум для сигнала с неизвестным энергетическим параметром, зависят от характера этого параметра. Например, при неизвестной длительности сигнала условие $d_T \to \infty$ можно обеспечить увеличением амплитуды сигнала. Для неизвестной амплитуды $d_T \to \infty$, если $B(t, t)$ ограничена, а длительность сигнала неограниченно возрастает. Изменяя соответствующим образом характеристики помехи, также можно добиться выполнения условия $d_T \to \infty$. Например,

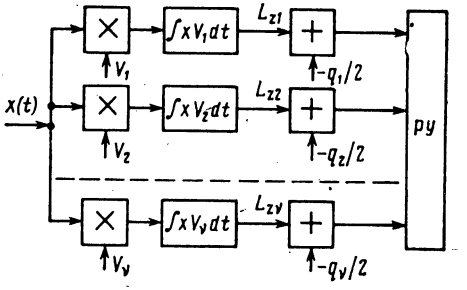


Рис. 1.2. Приемник максимального правдоподобия

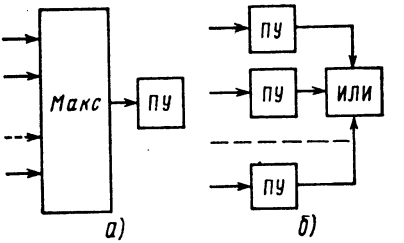


Рис. 1.3. Решающее устройство

когда функция корреляции шума допускает представление в виде $B(t_1, t_2) = \sigma^2 B_0(t_1, t_2)$, где $B_0(t, t)$ ограничена, то при $\sigma^2 \to 0$ всегда $d_T \to \infty$, если $s(t, \vartheta_0) \not\equiv 0$, $t \in [0; T]$, $\vartheta_0 \in [-1; 1]$.

Таким образом, для весьма широкого диапазона значений потерь Π_{ij} и априорных вероятностей наличия сигнала p_1, для большого класса сигналов $s(t, \vartheta)$, неизвестных параметров ϑ и их априорных распределений $W(\vartheta)$ асимптотически (с увеличением отношения сигнал-шум d_T) оптимальным обнаружителем является приемник максимального правдоподобия. При этом структура приемника максимального правдоподобия инвариантна к значениям потерь и априорной вероятности наличия сигнала, а также к виду априорного распределения неизвестных параметров. Как следует из (1.31), (1.41) и (1.53), для синтеза приемника максимального правдоподобия достаточно знать границы априорной области определения неизвестных параметров.

На рис. 1.2 приведена схема приемника максимального правдоподобия для обнаружения сигнала с одним неизвестным параметром $\vartheta \in \Theta$. Здесь $L_{zk} = L_z(\vartheta_k)$; $q_k = \int_0^T s(t, \vartheta_k)\, V(t, \vartheta_k)\, dt$, РУ — решающее устройство, а остальные обозначения соответствуют рис. 1.1. Так же, как и для байесовского обнаружителя, схема рис. 1.2 тем точнее реализует приемник максимального правдоподобия, чем меньше выбрано $\Delta\vartheta$ и чем больше коррелляторов используется. Решающее

устройство на рис. 1.2 выбирает наибольший из ν входных сигналов и сравнивает его с порогом c, задаваемым критерием оптимальности.

Решающее устройство может быть реализовано в различных вариантах, два из которых представлены на рис. 1.3. Первый из них (рис. 1.3, *а*) содержит блок «Макс», который выделяет наибольший из ν выходных сигналов, и пороговое устройство с порогом c. Второй (рис. 1.3, *б*) содержит ν пороговых устройств с одинаковыми порогами c. Выходы пороговых устройств подаются на логическую ячейку ИЛИ. Сигнал на выходе ячейки ИЛИ [решение о наличии сигнала $s(t, \vartheta_0)$] появляется, если превышен порог хотя бы в одном из ν пороговых устройств. В том частном случае, когда сигнал содержит неизвестный неэнергетический параметр, все $q_k = \text{const}$. Соответственно отпадает необходимость в сумматорах на рис. 1.2, и функциональная схема приемника максимального правдоподобия несколько упрощается.

1.2. Характеристики обнаружения сигнала с неизвестными неэнергетическими параметрами

1.2.1. Несколько неизвестных параметров

Для весьма широкого класса сигналов и помех асимптотически оптимальным является обнаружение с помощью приемника максимального правдоподобия. Найдем его характеристики, полагая, что полезный сигнал содержит μ неэнергетических параметров $\vartheta \in \Theta$. Приемник максимального правдоподобия согласно (1.31) вырабатывает функцию $L_z(\vartheta)$ (1.9) и принимает решение, сравнивая ее абсолютный максимум с порогом c. При наличии сигнала на входе приемника

$$L_z(\vartheta) = d_T^2 S(\vartheta_0, \vartheta) + d_T N(\vartheta), \tag{1.54}$$

а при отсутствии сигнала

$$L_z(\vartheta) = d_T N(\vartheta). \tag{1.55}$$

Здесь d_T^2, $N(\vartheta)$ и $S(\vartheta_0, \vartheta)$ — соответственно отношение сигнал-шум, шумовая и сигнальная функции (1.12)—(1.14).

Поскольку параметры ϑ предполагаются неэнергетическими, d_T не зависит от ϑ, а шумовая функция $N(\vartheta)$ является реализацией однородного гауссовского случайного поля. Достаточные условия однородности поля $N(\vartheta)$ при $\mu = 1, 2$ приведены в [54]. При $\mu > 2$ аналитически сформулировать достаточные условия однородности $N(\vartheta)$ затруднительно, хотя имеется довольно широкий класс сигналов и помех, когда $N(\vartheta)$ однородно, например в случае приема сигналов с неизвестными временным положением, частотой и начальной фазой ($\mu = 3$) на фоне белого шума.

Вероятности ошибок 1-го рода (ложной тревоги) α и 2-го рода (пропуска сигнала) β в приемнике максимального правдоподобия, в котором сравнивается абсолютный максимум $L_z(\vartheta)$ (1.9) с порогом c, можно записать как

$$\alpha = P[\max L_z(\vartheta) > c | x(t) = n(t)] = P[H_0 > c]; \tag{1.56}$$

$$\beta(\vartheta_0) = P[\max L_z(\vartheta) < c | x(t) = s(t, \vartheta_0) + n(t)] = P[H_1 < c].$$

Здесь H_0 и H_1 — значения абсолютного максимума $L_z(\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$, соответственно в отсутствие и при наличии сигнала $s(t, \vartheta_0)$ в принятой реализации $x(t)$. Так как $H_0 = d_T N(\vartheta_m)$, где $N(\vartheta_m)$ — значение абсолютного максимума реализации однородного гауссовского случайного поля с нулевым средним значением $M[N(\vartheta)] = 0$ и функцией корреляции $M[N(\vartheta_1) N(\vartheta_2)] = S(\vartheta_1, \vartheta_2)$, то вероятность ложной тревоги

$$\alpha = P[N(\vartheta_m) > c/d_T] = P[N(\vartheta_m) > u], \quad u = c/d_T. \tag{1.57}$$

Чтобы вычислить α по этой формуле, необходимо определить функцию распределения абсолютного максимума реализации случайного поля $N(\vartheta)$, т. е. $F_0(H) = P[N(\vartheta_m) < H]$. Если сигнальная функция (функция корреляции поля) $S(\vartheta_1, \vartheta_2) \to 0$ при $|\vartheta_{1i} - \vartheta_{2i}| \to \infty$, $i = \overline{1, \mu}$, то можно считать, что с увеличением H распределение числа выбросов за уровень H реализации $N(\vartheta)$ в области Θ сходится к закону Пуассона [12, 25]. Следовательно, для больших, но конечных H можно записать

$$F_0(H) \simeq \exp[-v\Pi(H)]. \tag{1.58}$$

Здесь v — μ-мерный евклидов объем области Θ, а $\Pi(H)$ — среднее число выбросов реализации $N(\vartheta)$ за уровень H в единичном объеме μ-мерного евклидова пространства неизвестных параметров сигнала. В общем случае функция в правой части (1.58) не является неубывающей функцией H, поэтому вместо (1.58) будем использовать аппроксимацию

$$F_0(H) \simeq \begin{cases} \exp[-v\Pi(H)], & H \geqslant H_z; \\ 0 & H < H_z, \end{cases} \tag{1.59}$$

где H_z — наименьшее значение H, для которого при любых $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $\Pi(H) > \Pi(H + \varepsilon)$.

При $\mu > 1$ записать выражение $\Pi(H)$ в явном виде затруднительно. Поэтому воспользуемся приближенной формулой, справедливой при больших H,

$$\Pi(H) \simeq \left(H^{\mu-1}\sqrt{\Omega}/(2\pi)^{(\mu+1)/2}\right) \exp(-H^2/2). \tag{1.60}$$

Эта формула следует из асимптотического выражения для $\Pi(H)$, приведенного в [12]. В (1.60) Ω — определитель матрицы

$$\mathbf{S} = \|S_{ij}\|, \quad S_{ij} = [\partial^2 S(\vartheta_1, \vartheta_2)/\partial\vartheta_{1i}\,\partial\vartheta_{2j}]_{\vartheta_0}, \quad i, j = \overline{1, \mu}. \tag{1.61}$$

Согласно (1.57), (1.59) и (1.60) выражение для вероятности ложной тревоги принимает вид

$$\alpha \simeq \begin{cases} 1 - \exp\left[-\dfrac{\xi u^{\mu-1}}{(2\pi)^{(\mu+1)/2}} \exp\left(-\dfrac{u^2}{2}\right)\right], & u \geqslant \sqrt{\mu - 1}; \\ 1, & u < \sqrt{\mu - 1}. \end{cases} \tag{1.62}$$

Здесь

$$\xi = v\sqrt{\Omega}, \tag{1.63}$$

а $u = c/d_T$ — нормированный порог. В дальнейшем величину ξ (1.63), которая характеризует число различимых значений неизвестных параметров в области Θ, будем называть приведенным объемом априорной области Θ. Точность полученной приближенной формулы для вероятности ложной тревоги улучшается с увеличением приведенного объема ξ и нормированного порога u. Подобное выражение для вероятности ложной тревоги получено также в [53, 57] применительно к частному случаю обнаружения радиосигнала со случайной начальной фазой и неизвестным временным положением ($\mu = 2$).

Определим теперь вероятность пропуска сигнала $\beta(\vartheta_0)$. Обозначим Δ_i «длительность» сигнальной функции по параметру ϑ_i, т. е. будем полагать, что

$$S(\vartheta_{01}, \vartheta_{02}, \ldots, \vartheta_{0\mu}, \vartheta_{01}, \vartheta_{02}, \ldots, \vartheta_{0i} \pm \Delta_i, \ldots, \vartheta_{0\mu}) \simeq 0.$$

Можно также величину Δ_i определить как интервал корреляции шумовой функции $N(\vartheta)$ по параметру ϑ_i. Пусть $\lambda_i = \vartheta_{1i} - \vartheta_{2i}$, тогда для неэнергетических параметров $S(\vartheta_1, \vartheta_2) = S(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)$, а интервал корреляции [54]

$$\Delta_i = \int_{-\infty}^{\infty} |S(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)| d\lambda_i \Big|_{\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\mu = 0}.$$

Оба определения величины Δ_i приводятся приблизительно к одинаковым результатам. Разобьем область определения неизвестных параметров Θ на две подобласти Θ_N и Θ_S. К подобласти Θ_S отнесем все значения $\vartheta \in \Theta$, удовлетворяющие неравенствам $|\vartheta_{0i} - \vartheta_i| < \Delta_i$, $i = \overline{1, \mu}$, а к подобласти Θ_N — значения $\vartheta \in \Theta$, для которых $|\vartheta_{0i} - \vartheta_i| > \Delta_i$. Поскольку интервал корреляции поля $N(\vartheta)$ по параметру ϑ_i приближенно равен «длительности» выходного сигнала $S(\vartheta_0, \vartheta)$ по тому же параметру, то $S(\vartheta_0, \vartheta) \simeq 0$ для $\vartheta \in \Theta_N$.

Пусть H_N — абсолютный максимум $L_z(\vartheta)$ при $\vartheta \in \Theta_N$ и этот максимум расположен в точке $\vartheta_N \in \Theta_N$, а H_S — абсолютный максимум $L_z(\vartheta)$ при $\vartheta \in \Theta_S$, считаем, что он расположен в некоторой точке $\vartheta_m \in \Theta_S$. Если область определения неизвестных параметров Θ велика по сравнению с подобластью Θ_S, то случайные величины H_N и H_S можно считать приближенно независимыми. При этом вероятность пропуска

$$\beta(\vartheta_0) \simeq P(H_N < c)\, P(H_S < c) = P_N(c)\, P_S(c). \qquad (1.64)$$

Эта формула будет точной, когда случайные величины H_N и H_S статистически независимы. Однако если для всех $i = \overline{1, \mu}$ выполняются неравенства $|\vartheta_{mi} - \vartheta_{Ni}| < \Delta_i$, то H_N и H_S в общем случае зависимы. Учитывая, что по определению $|\vartheta_{mi} - \vartheta_{0i}| < \Delta_i$, получаем, что H_N и H_S могут быть зависимыми, если только для всех $i = \overline{1, \mu}$ выполняются неравенства $|\vartheta_{Ni} - \vartheta_{0i}| < 2\Delta_i$. Если это неравенство не выполняется хотя бы для одного i, то случайные величины H_N и H_S статистически независимы, так как в этом случае $S(\vartheta_m, \vartheta_N) = 0$. В силу однородности случайного поля $N(\vartheta)$ положение ϑ_N абсолютного

максимума H_N распределено равновероятно в подобласти Θ_N. Значит, вероятность P_r того, что случайные величины H_N и H_S статистически зависимы, удовлетворяет неравенству

$$P_r < 2^{\mu} v_s/(v - v_s), \tag{1.65}$$

где $v_s = 2^{\mu} \prod_{i=1}^{\mu} \Delta_i$ — μ-мерный евклидов объем подобласти Θ_s. Следовательно, при $v_s/v \to 0$ случайные величины H_N и H_S независимы с вероятностью, стремящейся к 1. Соответственно при $v/v_s \gg 1$ (или, что то же самое, для большинства сигналов при $\xi \gg 1$) справедлива приближенная формула (1.64).

Приближенное значение вероятности $P_N(c)$ получаем, используя соотношения (1.59), (1.60):

$$P_N(c) \simeq \begin{cases} \exp\left[-\dfrac{\xi_N u^{\mu-1}}{(2\pi)^{(\mu+1)/2}} \exp\left(-\dfrac{u^2}{2}\right)\right], & u \geqslant \sqrt{\mu-1}; \\ 0, & u < \sqrt{\mu-1}. \end{cases} \tag{1.66}$$

Здесь $\xi_N = v_N \sqrt{\Omega}$ — приведенный объем подобласти Θ_N. Когда область определения неизвестных параметров Θ задана неравенствами

$$|\vartheta_i| \leqslant \Theta_i/2, \quad i = \overline{1, \mu}, \tag{1.67}$$

то

$$v_N = v - v_s = \prod_{i=1}^{\mu} \Theta_i - 2^{\mu} \prod_{i=1}^{\mu} \Delta_i = \left[1 - 2^{\mu} \prod_{i=1}^{\mu} (\Delta_i/\Theta_i)\right] v.$$

Поэтому, если хотя бы для одного i выполняется неравенство

$$\Delta_i/\Theta_i \ll 1, \tag{1.68}$$

справедливы соотношения

$$v_N \simeq v = \prod_{i=1}^{\mu} \Theta_i, \quad \xi_N \simeq \xi, \tag{1.69}$$

а из (1.65) следует, что $P_r \ll 1$. Заметим, что для сигнальной функции $S(\boldsymbol{\vartheta}_0, \boldsymbol{\vartheta})$, имеющей лишь один ярко выраженный максимум, соотношения $v_s \ll v$, $v_N \simeq v$ и $P_r \ll 1$, как правило, выполняются, когда приведенный объем априорной области определения неизвестных параметров $\xi \gg 1$.

При наличии сигнала и $\boldsymbol{\vartheta} \in \Theta_S$ имеем $H_S = d_T^2 S(\boldsymbol{\vartheta}_0, \boldsymbol{\vartheta}_m) + d_T N(\boldsymbol{\vartheta}_m)$. Положим, что используется достаточно хорошо сформированный сигнал, так что сигнальная функция $S(\boldsymbol{\vartheta}_0, \boldsymbol{\vartheta})$ имеет лишь один ярко выраженный максимум. Тогда вероятностью появления более чем одного максимума $L_z(\boldsymbol{\vartheta})$ при $\boldsymbol{\vartheta} \in \Theta_S$ можно пренебречь. При больших отношениях сигнал-шум [27, 54]

$$\vartheta_{mi} = \vartheta_{0i} + \sum_{k=1}^{\mu} \chi_k A_{ik}/(\Omega d_T) + O(d_T^{-2}), \tag{1.70}$$

где $\chi_i = [\partial N(\vartheta)/\partial\vartheta_i]_{\vartheta_0}$ — случайные гауссовские величины с нулевым средним значением и корреляционной матрицей S (1.61); A_{ik} — алгебраические дополнения определителя Ω.

Разложим функцию $L_z(\vartheta)$ (1.9) в ряд Тейлора в окрестности точки ϑ_0. Подставляя в это разложение $\vartheta = \vartheta_m$ и учитывая (1.70), получаем

$$H_S = d_T^2 + d_T N(\vartheta_0) + \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{\mu} \chi_i \chi_j A_{ij}/(2\Omega) + O(d_T^{-1}) =$$

$$= d_T^2 + d_T N(\vartheta_0) + \lambda + O(d_T^{-1}), \qquad (1.71)$$

где $N(\vartheta_0)$ — гауссовская случайная величина с параметрами (0; 1)

Характеристическая функция случайной величины λ имеет вид

$$\Psi(\omega) = M\left\{\exp\left[\frac{j\omega}{2\Omega}\sum_{i=1}^{\mu}\sum_{k=1}^{\mu}\chi_i\chi_k A_{ik}\right]\right\} =$$

$$= (2\pi)^{-\mu/2}\Omega^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\exp\left[-\frac{(1-j\omega)}{2\Omega}\sum_{i=1}^{\mu}\sum_{k=1}^{\mu}\chi_i\chi_k A_{ik}\right]d\chi_1\ldots d\chi_\mu.$$

Этот интеграл легко вычислить, если использовать условие нормировки для многомерного гауссовского распределения: $\Psi(\omega) = (1-j\omega)^{-\mu/2}$. Вычисляя обратное преобразование Фурье, получаем плотность вероятности случайной величины λ

$$W(\lambda) = \begin{cases} \lambda^{\mu/2-1}\exp(-\lambda)/\Gamma(\mu/2), & \lambda \geqslant 0; \\ 0, & \lambda < 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция. Слагаемые $N(\vartheta_0)$ и λ в (1.71) статистически независимы, так как $\lambda = \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{\mu}\chi_i\chi_j A_{ij}/(2\Omega)$, а гауссовские случайные величины χ_i и $N(\vartheta_0)$ некоррелированны:

$$M[N(\vartheta_0)\chi_i] = [\partial S(\vartheta_0, \vartheta)/\partial\vartheta_i]_{\vartheta_0} = 0.$$

Пренебрегая в (1.71) членами порядка малости d_T^{-1} и менее, находим плотность вероятности случайной величины H_S:

$$W_S(H) \simeq \frac{1}{d_T\Gamma(\mu/2)\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} x^{\mu/2-1}\exp\left[-\frac{(H-d_T^2-x^2)^2}{2d_T} - x\right]dx,$$

или

$$W_S(H) \simeq \frac{d_T^{\mu/2-1}}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{2d_T^4-H^2}{4d_T^2}\right)D_{-\mu/2}\left(\frac{2d_T^2-H}{d_T}\right);$$

$D_p(\cdot)$ — функция параболического цилиндра [10]. Следовательно, вероятность $P_S(c)$ (1.64) приближенно равна

$$P_S(c) \simeq \frac{d_T^{\mu/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u}\exp\left(\frac{2d_T^2-x^2}{4}\right)D_{-\mu/2}(2d_T-x)\,dx. \qquad (1.72)$$

С помощью (1.64), (1.66) и (1.72) находим приближенное выражение для вероятности пропуска сигнала

$$\beta \simeq \begin{cases} \dfrac{d_T^{\mu/2}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{\xi_N u^{\mu-1}}{(2\pi)^{(\mu+1)/2}} \exp\left(-\dfrac{u^2}{2}\right)\right] \displaystyle\int_{-\infty}^{u} \exp\left(\dfrac{2d_T^2 - x^2}{4}\right) \times \\ \qquad \times D_{-\mu/2}(2d_T - x)\, dx, \qquad u \geqslant \sqrt{\mu - 1}, \\ 0, \qquad u < \sqrt{\mu - 1}. \end{cases} \tag{1.73}$$

Точность этой формулы растет с увеличением приведенного объема ξ, отношения сигнал-шум d_T и нормированного порога u. Заметим, что в рассматриваемом приближении вероятность пропуска сигнала не зависит от истинного значения неизвестного неэнергетического параметра ϑ_0.

Полученные приближенные выражения для вероятности ложной тревоги (1.62) и пропуска сигнала (1.73) довольно громоздки. Поэтому представляет интерес получение упрощенных, хотя и менее точных вариантов этих формул. Полагая $d_T \to \infty$ и $u \to \infty$, имеем

$$\alpha \simeq \xi u^{\mu-1} \exp(-u^2/2)/(2\pi)^{(\mu+1)/2}; \tag{1.74}$$

$$\beta \simeq 1 - \Phi(d_T - u), \tag{1.75}$$

где

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \exp(-t^2/2)\, dt/\sqrt{2\pi} \tag{1.76}$$

— интеграл вероятности.

Оценим проигрыш в эффективности обнаружения из-за незнания μ неэнергетических параметров сигнала. При обнаружении сигнала, все параметры которого известны, вероятности ошибок определяются формулами [42]:

$$\alpha_z = 1 - \Phi(u); \tag{1.77}$$

$$\beta_z = 1 - \Phi(d_T - u). \tag{1.78}$$

Из сравнения (1.75) и (1.78) следует, что предельное значение вероятности пропуска сигнала с несколькими неизвестными неэнергетическими параметрами совпадает с вероятностью пропуска известного сигнала. Значит, предельная вероятность ошибки пропуска инвариантна по отношению к неизвестным неэнергетическим параметрам сигнала.

Сравним теперь вероятности ложной тревоги. Учитывая, что (1.74) справедливо при $u \to \infty$ и используя асимптотическое выражение для $\Phi(x)$ при $x \to \infty$, имеем, что $\alpha/\alpha_z \to \xi u^{\mu}/(2\pi)^{\mu/2}$ при $\beta = \beta_z$ и $u \to \infty$. Значит, относительные потери в эффективности обнаружения возрастают с увеличением числа неизвестных параметров μ, приведенного объема ξ априорной области определения неизвестных параметров сигнала и с уменьшением требуемого уровня ложных тревог, так как $\alpha \to 0$ при $u \to \infty$.

Все полученные выше приближенные выражения для характеристик обнаружения асимптотически точны при $v/v_s \to \infty$ или, что то же самое, для большин-

ства практически используемых сигналов при $\xi \to \infty$. Рассмотрим коротко возможности определения вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода при обнаружении сигнала, содержащего μ неизвестных неэнергетических параметров, когда указанное условие не выполняется. Это равносильно предположению, что неравенство (1.68) не выполняется ни для одного значения $i = \overline{1, \mu}$.

Когда отношение v/v_s невелико, так что значение ξ (1.63) — порядка нескольких единиц, следует положить $\xi_N = 0$. Соответственно вероятность пропуска сигнала $\beta \simeq P_S(c)$, где $P_S(c)$ определяется из (1.72). Если к тому же велико отношение сигнал/шум d_T, то, как и при больших значениях ξ, можно использовать упрощенную формулу (1.75).

Для расчета вероятности ложной тревоги опять используем приближенное выражение (1.58). При малых ξ значение $F_0(H_z)$ (1.59) может заметно отличаться от нуля. Поэтому используем несколько иную, чем (1.59), аппроксимацию функции распределения абсолютного максимума реализаций случайного поля $N(\vartheta)$ [37]. Положим приближенно

$$F_0(H) \simeq \begin{cases} \Phi(H) \exp[-v\Pi(H)], & H \geqslant H_z; \\ \Phi(H) \exp[-v\Pi(H_z)], & H < H_z, \end{cases} \tag{1.79}$$

где $\Phi(\cdot)$ — интеграл вероятности (1.76), а остальные обозначения соответствуют (1.58), (1.59). Подставляя (1.60) в (1.79), а последнее в (1.57), находим

$$\alpha \simeq \begin{cases} 1 - \Phi(u) \exp\left[- \dfrac{\xi u^{\mu-1}}{(2\pi)^{(\mu+1)/2}} \exp\left(-\dfrac{u^2}{2}\right)\right], & u > \sqrt{\mu-1}; \\ 1 - \Phi(u) \exp\left[- \dfrac{\xi (\mu-1)^{(\mu-1)/2}}{(2\pi)^{(\mu+1)/2}} \exp\left(-\dfrac{\mu-1}{2}\right)\right], & u < \sqrt{\mu-1}. \end{cases} \tag{1.80}$$

Полагая в этой формуле $\xi \to 0$, т. е. считая, что $v/v_s \to 0$, приходим к (1.77). Действительно, когда объем априорной области определения неизвестных параметров сигнала стремится к нулю, эта область стягивается в точку, что соответствует обнаружению сигнала с известными параметрами.

При больших значениях ξ или μ, т. е. когда априорная неопределенность относительно неизвестных параметров сигнала значительна, (1.80) переходит в более простую формулу (1.62). Заметим также, что (1.80) совпадает с (1.62) при больших значениях аргумента u, так как при $u > 2 \div 3$ имеем $\Phi(u) \simeq 1$.

Случай малых объемов априорной области определения неизвестных параметров сигналов обычно не вызывает большого интереса. При этом характеристики обнаружения сигнала с неизвестными параметрами, как правило, близки к характеристикам обнаружения сигнала, все параметры которого известны. Поэтому, если не требуется большая точность, для расчета характеристик обнаружения можно использовать формулы (1.77), (1.78). Эти формулы применительно к обнаружению квазидетерминированного сигнала асимптотически точны, если $\Theta_i/\Delta_i \to 0$ для всех $i = \overline{1, \mu}$, т. е. при $v/v_s \to 0$.

1.2.2. Сложные сигналы с несколькими неизвестными параметрами

Приведенные выше результаты получены в предположении, что сигнальная функция $S(\vartheta_1, \vartheta_2)$ имеет лишь один ярко выраженный максимум. Однако во многих практических приложениях широкое применение находят последовательности импульсов и сложные сигналы, модулированные по амплитуде и фазе [27]. Для этих сигналов характерны сигнальные функции, обладающие кроме главного максимума при $\vartheta_1 = \vartheta_2$ заметными побочными максимумами (боковыми лепестками). Рассмотрим влияние побочных максимумов сигнальной функции на эффективность обнаружения сигнала [38].

Пусть сигнальная функция $S(\vartheta_0, \vartheta)$ имеет $2N + 1$ максимум в точках $\vartheta_i = -\overline{N, N}$. Сигнальную функцию в этих точках обозначим $S_i = S(\vartheta_0, \vartheta_i)$.

Очевидно, всегда $S_0 = 1$ и $S_i < 1$, $i \neq 0$. В дальнейшем будем рассматривать только класс функций $S(\hat{\vartheta}_0, \hat{\vartheta})$, в точках максимумов которых гауссовская кривизна положительна. Для такой сигнальной функции в отсутствие сигнала попрежнему справедливо (1.55), поэтому для расчета вероятности ложной тревоги можем использовать (1.62).

При наличии полезного сигнала всю априорную область Θ, в которой формируется выходной сигнал приемника максимального правдоподобия $L_z(\hat{\vartheta})$, разобъем на две подобласти Θ_S и Θ_N. Как и ранее, к Θ_N отнесем ту часть области Θ, в которой $S(\hat{\vartheta}_0, \hat{\vartheta}) \simeq 0$. Следовательно, при определении вероятности пропуска сигнала (1.64) вероятность $P_N(c)$ можно рассчитывать по (1.66).

Рассмотрим возможности определения $P_S(c)$, когда сигнальная функция имеет $2N + 1$ максимум. Разобъем подобласть Θ_S на $2N + 1$ подобластей Θ_{Si} таких, что в каждой из них находится лишь один i-й ($i = \overline{-N, N}$) максимум сигнальной функции. Обозначим через h_i абсолютный максимум $L_z(\hat{\vartheta})$ при наличии сигнала и $\hat{\vartheta} \in \Theta_{Si}$. Тогда

$$P_S(c) = P[c > h_i,\ i = \overline{-N, N}].$$

Учитывая, что вероятностью появления более чем одного максимума в каждой из подобластей Θ_{Si} можно пренебречь, при больших отношениях сигнал-шум приближенно имеем

$$h_i \simeq L_z(\hat{\vartheta}_i) = d_T^2 S(\hat{\vartheta}_0, \hat{\vartheta}_i) + d_T N(\hat{\vartheta}_i) = d_T^2 S_i + d_T N_i,\ i = \overline{-N, N}. \quad (1.81)$$

Следовательно, в рассматриваемом приближении h_i — гауссовские случайные величины с вектором средних значений

$$\| M[h_i] \| = d_T^2 \| S_i \| = d_T^2 \mathbf{S}$$

и корреляционной матрицей

$$\| M(h_i - M[h_i])(h_j - M[h_j]) \| = d_T^2 \| S(\hat{\vartheta}_i, \hat{\vartheta}_j) \| = d_T^2 \mathbf{K}_S. \quad (1.82)$$

Используя известное выражение для многомерной гауссовской плотности вероятности, находим, что

$$P_S(c) = \frac{1}{(2\pi)^{N+1/2} \sqrt{\det \mathbf{K}_S}} \int_{-\infty}^{u} \dots \int_{-\infty}^{u} \exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{y} - d_T \mathbf{S})^+ \times \right.$$

$$\left. \times \mathbf{K}_S^{-1} (\mathbf{y} - d_T \mathbf{S}) \right] d\mathbf{y}. \quad (1.83)$$

Здесь $\mathbf{y} = \| y_i \|$, $i = \overline{-N, N}$, $d\mathbf{y} = \prod_{i=-N}^{N} dy_i$; $u = c/d_T$,

а знак $(+)$ обозначает транспонирование. Аналитически интеграл в (1.83) удается вычислить лишь при $N = 0$, а численные методы оказываются малоэффективными уже при $N > 1 \div 2$. Поэтому представляют интерес методы приближенного вычисления $P_S(c)$. Некоторые такие методы рассмотрены в [23], а в [16] предложено пренебречь статистической зависимостью величин h_i. При использовании этого подхода

$$P_S(c) \simeq \widehat{P_S}(c) = \prod_{i=-N}^{N} \Phi(u - d_T S_i) = [1 - \Phi(d_T - u)] \prod_{i=1}^{N} \Phi^2(u - d_T S_i), \quad (1.84)$$

где $\Phi(\cdot)$ — интеграл вероятности (1.76).

Можно также получить верхнюю границу для $P_S(c)$. Обозначим

$$P_{Sk}(c) = P[c > h_i;\ i = \overline{-k, k}]. \quad (1.85)$$

Всегда при $k \leqslant N$ имеем $P_S(c) \leqslant P_{Sk}(c)$. Эта верхняя граница может быть рассчитана по (1.83) при замене N на k. Так как $k < N$, вычисления несколько упрощаются. Наиболее простую верхнюю границу получаем при $k = 0$:

$$P_S(c) \leqslant 1 - \Phi(d_T - u). \tag{1.86}$$

При обнаружении сигнала приемником максимального правдоподобия наличие побочных максимумов у сигнальной функции приводит к уменьшению вероятности пропуска. Поэтому в качестве несколько более точной, чем (1.86), верхней границы для вероятности пропуска можно использовать (1.72). Таким образом, наличие побочных максимумов у сигнальной функции приводит лишь к изменению вероятности $P_S(c)$ (1.64), (1.72).

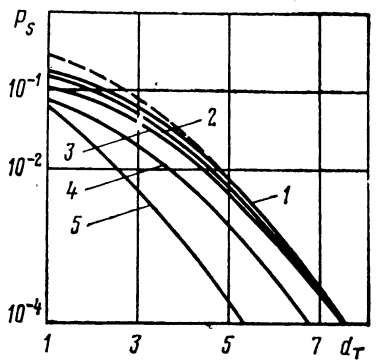


Рис. 1.4. Влияние побочных максимумов на вероятность пропуска сложного сигнала

Для иллюстрации рассмотрим простой пример. Пусть сигнал содержит один неизвестный параметр, а сигнальная функция имеет лишь два побочных максимума ($N = 1$) величиной S_1. Тогда вектор средних значений случайных величин h_i равен $d_T^2 \, ||S_1 1 S_{-1}||^+$, а элементы матрицы (1.82) запишутся как

$$M[(h_0 - Mh_0)^2] = d_T^2; \; M[(h_{\pm 1} - Mh_{\pm 1})^2] = d_T^2;$$

$$M[(h_{\pm 1} - M[h_{\pm 1}])(h_0 - M[h_0])] = d_T^2 S_1.$$

Для большинства сигнальных функций при этом можно считать $M[(h_{-1} - M[h_{-1}])(h_1 - M[h_1])] \simeq 0$. Полагая, что производится асимптотически байесовское обнаружение (1.19), т. е. $u = d_T/2$, из (1.83) получаем

$$P_S(d_T) = \Phi^2\left[\frac{d_T}{2}(1 - 2S_1)\right] - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{(1-2S_1)\, d_T/2} \int \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \times$$

$$\times \Phi\left[\frac{d_T + 2S_1(x+y)}{2\sqrt{1-2S_1^2}}\right] dxdy, \tag{1.87}$$

а приближенная формула (1.84) принимает вид

$$\widehat{P}_S(d_T) = [1 - \Phi(d_T/2)]\, \Phi^2[(1-2S_1)\, d_T/2]. \tag{1.88}$$

Расчет вероятности пропуска с помощью асимптотически точной формулы (1.87) показывает, что изменение побочного максимума S_1 от 0 до 0,7 вызывает изменение β не более чем на 40%. При этом с ростом отношения сигнал-шум влияние побочных максимумов на характеристики обнаружения уменьшается.

Зависимость $P_S(d_T)$, рассчитанная по формуле (1.87), при $S_1 = 0{,}5$ представлена на рис. 1.4 кривой *1*. Там же кривыми *2—5* представлены зависимости $\widehat{P}_S(d_T)$, рассчитанные по приближенной формуле (1.88) для значений $S_1 = 0{,}1$; 0,3; 0,5; 0,7 соответственно. Штрихами на рис. 1.4 нанесена верхняя граница для $P_S(d_T)$, рассчитанная по (1.72) при $u = d_T/2$ и $\mu = 1$. Из рис. 1.4 следует, что, хотя приближенная формула (1.88) [16] частично учитывает наличие побочных максимумов сигнальной функции, она приводит к заметно бо́льшей погрешности, чем формула (1.72), выведенная в предположении об отсутствии побочных максимумов.

1.2.3. Сигнал с одним неизвестным параметром

Конкретизируем общие выражения для вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала применительно к обнаружению сигнала, зависящего лишь от одного неизвестного неэнергетического параметра ($\mu = 1$). В этом случае приближенная формула для среднего числа выбросов (1.60) совпадает с точной и среднее число выбросов реализации одномерного случайного процесса $N(\vartheta)$ за уровень H в интервале Θ равно [43] $v\Pi(H) = \xi \exp(-H^2/2)/(2\pi)$, где приведенная длина априорного интервала определения неизвестного параметра

$$\xi = \Theta \sqrt{[\partial^2 S(\vartheta_1, \vartheta_2)/\partial\vartheta_1 \partial\vartheta_2]_{\vartheta_1=\vartheta_2}}. \tag{1.89}$$

Следовательно, выражение для вероятности ложной тревоги (1.62) принимает вид

$$\alpha \simeq \begin{cases} 1-\exp\left[-\xi \exp(-u^2/2)/(2\pi)\right], & u \geqslant 0; \\ 1, & u < 0, \end{cases} \tag{1.90}$$

а вероятность пропуска сигнала β (1.73) при выполнении (1.68) равна

$$\beta \simeq \begin{cases} \sqrt{\frac{d_T}{2\pi}} \exp\left[-\frac{\xi}{2\pi}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\right] \int\limits_{-\infty}^{u} \exp\left(\frac{2d_T^2 - x^2}{4}\right) \times \\ \qquad \times D_{-1/2}(2d_T - x)\,dx, & u \geqslant 0; \\ 0, & u < 0. \end{cases} \tag{1.91}$$

Если для обнаружения сигнала с одним неизвестным неэнергетическим параметром используется асимптотически байесовский приемник, то в (1.90), (1.91) надо положить $u = d_T/2$ (1.19). Полагая, что априорные вероятности наличия и отсутствия сигнала равны ($p_0 = p_1$), можем записать выражение для средней вероятности ошибки

$$P_e = (\alpha+\beta)/2 = \frac{1}{2}\left\{1-\exp\left[-\frac{\xi}{2\pi}\exp\left(-\frac{d_T^2}{8}\right)\right] + \right.$$

$$+\sqrt{\frac{d_T}{2\pi}}\exp\left[-\frac{\xi}{2\pi}\exp\left(-\frac{d_T^2}{8}\right)\right]\int\limits_{-\infty}^{d_T/2}\exp\left(\frac{2d_T^2-x^2}{4}\right)\times$$

$$\left.\times D_{-1/2}(2d_T-x)\,dx\right\} \tag{1.92}$$

при асимптотически байесовском обнаружении.

Зависимость $P_e(d_T)$ для приведенной длины априорного интервала $\xi = 10^2$ нанесена на рис. 1.5 сплошной линией. Однако порог $u = d_T/2$ минимизирует среднюю вероятность ошибки лишь при $d_T \to \infty$. Поэтому можно ожидать, что при конечных отношениях сигнал-шум средняя вероятность ошибки при обнаружении может быть уменьшена соответствующим выбором порога u. Для иллюстрации зависимости

средней вероятности ошибки от выбора порога при конечных отношениях сигнал-шум на рис. 1.5 штриховой линией нанесена зависимость

$$P_{e0}(d_T) = \frac{1}{2}\left\{1 - \exp\left[-\frac{\xi}{2\pi}\exp\left(-\frac{u_0^2}{2}\right)\right] + \right.$$

$$+\sqrt{\frac{d_T}{2\pi}}\exp\left[-\frac{\xi}{2\pi}\exp\left(-\frac{u_0^2}{2}\right)\right]\times$$

$$\left.\times\int_{-\infty}^{u_0}\exp\left(\frac{2d_T^2 - x^2}{4}\right)D_{-1/2}(2d_T - x)\,dx\right\}.$$

Здесь порог u_0 выбран из условия

$$\min_u P_e(u) = P_e(u_0).$$

На этом же рисунке штрихпунктиром представлена зависимость

$$P_e^*(d_T) = 1 - \Phi(d_T/2) \qquad (1.93)$$

средней вероятности ошибки при обнаружении по критерию идеального наблюдателя сигнала, все параметры которого известны [42]. Из рис. 1.5 следует, что оптимальный выбор порога при конечных отношениях сигнал-шум может заметно уменьшить значение средней вероятности ошибки по сравнению с ее значение при асимптотически оптимальном пороге $u = d_T/2$.

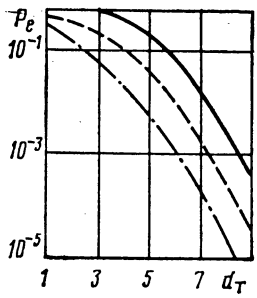


Рис. 1.5. Средняя вероятность ошибки

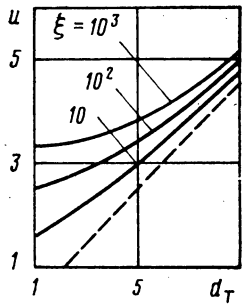


Рис. 1.6. Порог обнаружителя

Зависимости оптимального порога $u_0(d_T)$ приведены на рис. 1.6 для различных значений ξ. Там же штриховой линией нанесена функция $u = d_T/2$. Кривые рис. 1.6 показывают, что с ростом отношения сигнал-шум оптимальный порог тем быстрее сходится к асимптотически оптимальному, чем меньше приведенная длина априорного интервала ξ.

В ряде работ [14, 53 и др.] для приближенного расчета вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала с неизвестным параметром ис-

пользуется другой метод. Этот метод основан на замене непрерывной функции $L_z(\vartheta)$ ее значениями, взятыми в отдельных точках априорного интервала Θ. При этом предполагается, что неизвестный параметр принимает одно из m дискретных значений ϑ_i, таких, что $L_z(\vartheta_i)$ и $L_z(\vartheta_j)$, $i, j = \overline{1, m}$, при $i \neq j$ статистически независимы. Тогда при обнаружении вероятности ошибок

$$\alpha_m = 1 - (1 - \alpha_z)^m, \quad \beta_m = (1 - \alpha_z)^{m-1} \beta_z, \tag{1.94}$$

где α_z и β_z — вероятности ошибок при обнаружении известного сигнала (1.77), (1.78). Формулы (1.94) при $u \to \infty$ и $d_T \to \infty$ несколько упрощаются и принимают вид

$$\alpha_m \simeq m\alpha_z, \quad \beta_m \simeq \beta_z. \tag{1.95}$$

Следовательно, согласно (1.75) и (1.78) при больших u и d_T расчет вероятности пропуска по (1.91) и (1.94) приводит к одинаковому значению β, совпадающему с вероятностью пропуска известного сигнала. При этих же предположениях вероятность ложной тревоги, рассчитанная по (1.90),

$$\alpha \simeq \xi \exp(-u^2/2)/(2\pi). \tag{1.96}$$

Из (1.95), учитывая асимптотическое поведение $\Phi(x)$ при $x \to \infty$, имеем

$$\alpha_m \simeq m \exp(-u^2/2)/(u\sqrt{2\pi}),$$

откуда следует, что

$$\alpha/\alpha_m \simeq \xi u/(m\sqrt{2\pi}). \tag{1.97}$$

Если, например, сигнальная функция имеет колокольную форму, то

$$\alpha/\alpha_m \simeq u. \tag{1.98}$$

Таким образом, при больших u расчет α по приближенной формуле (1.94) приводит к значениям вероятности ложной тревоги, в u раз меньшим, чем расчет по (1.90). Следовательно, значения α, вычисленные по различным приближенным формулам, могут существенно отличаться друг от друга, причем, в то время как точность приближенной формулы (1.90), как и формулы (1.91), растет с увеличением ξ, u и d_T, поведение точности приближенных формул (1.94) неизвестно.

Формулы (1.90) и (1.91) получены на основе ряда допущений, которые носят приближенный характер. Оценить аналитически точность этих формул весьма затруднительно. Можно лишь утверждать, что их точность возрастает с увеличением ξ, u и d_T. Для конечных значений этих параметров вопрос о применимости полученных приближений можно решить экспериментальной проверкой, результаты которой приведены в конце этого параграфа.

1.2.4. Узкополосный радиосигнал с одним неизвестным параметром

Рассмотрим вначале обнаружение сигнала $s(t, \vartheta, \lambda)$, содержащего два неизвестных неэнергетических параметра ϑ и λ, таких, что $|\vartheta| \leqslant \Theta_1/2$, $|\lambda| \leqslant \Theta_2/2$. Нормированную сигнальную функцию (1.14) для

двух параметров обозначим как

$$S(\vartheta_1, \vartheta_2, \lambda_1, \lambda_2) = \int_0^T s(t, \vartheta_1, \lambda_1)\, V(t, \vartheta_2, \lambda_2)\, dt/d_T^2, \qquad (1.99)$$

где $V(t, \vartheta, \lambda)$ — решение уравнения (1.11). Полагаем, что хотя бы для одного из параметров ϑ или λ выполняется неравенство (1.68). Тогда выражения для вероятности ложной тревоги (1.62) и пропуска сигнала (1.73) принимают вид

$$\alpha \simeq \begin{cases} 1 - \exp\left[-\xi u \exp\left(-u^2/2\right)/(2\pi)^{3/2}\right], & u \geqslant 1; \\ 1, & u < 1; \end{cases} \qquad (1.100)$$

$$\beta \simeq \begin{cases} d_T \exp\left[-\dfrac{\xi u}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\dfrac{u^2}{2}\right)\right] \times & \\ \times \displaystyle\int_{-\infty}^{u} \exp\left(\frac{3d_T^2}{2} - x d_T\right) \Phi(x - 2d_T)\, dx, & u \geqslant 1, \\ 0, & u < 1. \end{cases} \qquad (1.101)$$

В соответствии с определением (1.63) приведенный объем области определения параметров ϑ и λ равен

$$\xi = \xi_1 \xi_2 \sqrt{1 - R_{\vartheta\lambda}^2}; \qquad (1.102)$$

$$\xi_1 = \Theta_1 \left[\frac{\partial^2 S(\vartheta_1, \vartheta_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial\vartheta_1\, \partial\vartheta_2}\right]^{1/2}_{\vartheta_*;\ \lambda_*}; \quad \xi_2 = \Theta_2 \left[\frac{\partial^2 S(\vartheta_1, \vartheta_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial\lambda_1\, \partial\lambda_2}\right]^{1/2}_{\lambda_*,\ \vartheta_*}; \qquad (1.103)$$

$$R_{\vartheta\lambda} = -\left\{\frac{\partial^2 S(\vartheta_1, \vartheta_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial\vartheta_1\, \partial\vartheta_2} \Big/ \sqrt{\frac{\partial^2 S(\vartheta_1 \vartheta_2, \lambda_1 \lambda_2)}{\partial\lambda_1\, \partial\vartheta_2} \frac{\partial^2 S(\vartheta_1, \vartheta_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial\lambda_1\, \partial\lambda_2}}\right\}_{\vartheta_*,\ \lambda_*}.$$

Величина ξ_1 представляет собой приведенную длину интервала Θ_1 при обнаружении сигнала с априори известным значением параметра λ, а ξ_2 — то же самое для Θ_2 при априори известном значении ϑ (1.89); $R_{\vartheta\lambda}$ — коэффициент корреляции совместных оценок максимального правдоподобия параметров ϑ и λ при наличии только нормальных ошибок [27].

Согласно (1.102) в общем случае приведенный объем при обнаружении сигнала с двумя неизвестными параметрами не равен произведению приведенных длин априорных интервалов определения каждого из неизвестных параметров. При этом приведенный объем убывает с ростом коэффициента корреляции $R_{\vartheta\lambda}$ оценок этих параметров. Этот результат можно объяснить с физической точки зрения, если воспользоваться интерпретацией приведенной длины априорного интервала как величины, определяющей число различимых значений неизвестного параметра [18]. Тогда ξ (1.102) определяет число различимых значений

двух неизвестных параметров и, естественно, это число тем меньше, чем сильнее статистическая связь между оценками этих параметров.

Из (1.100), (1.101) можно получить характеристики обнаружения узкополосного радиосигнала с неизвестной начальной фазой φ и неизвестным неэнергетическим параметром ϑ ($|\vartheta| \leqslant \Theta/2$). Узкополосный радиосигнал запишем в форме

$$s(t, \vartheta, \varphi) = F(t, \vartheta) \cos[\omega_0 t + \psi(t, \vartheta) - \varphi], \qquad (1.104)$$

где ω_0 и φ — несущая частота и начальная фаза, а $F(t, \vartheta)$ и $\psi(t, \vartheta)$ — законы амплитудной и фазовой модуляции, в общем случае зависящие от неизвестного параметра ϑ.

Применительно к обнаружению узкополосного радиосигнала нормированную сигнальную функцию для параметров ϑ и φ (1.99) можно представить в виде [27]

$$S(\vartheta_1, \vartheta_2, \varphi_1, \varphi_2) = S_c(\vartheta_1, \vartheta_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + S_s(\vartheta_1, \vartheta_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \qquad (1.105)$$

где

$$\left.\begin{matrix} S_c(\vartheta_1, \vartheta_2) \\ S_s(\vartheta_1, \vartheta_2) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2d_T^2} \int_0^T \int_0^T F(t_1, \vartheta_1) F(t_2, \vartheta_2) h(t_1, t_2) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \times$$
$$\times [\omega_0 (t_1 - t_2) + \psi(t_1, \vartheta_1) - \psi(t_2, \vartheta_2)]\, dt_1\, dt_2$$

— нормированные квадратуры сигнальной функции, а отношение сигнал-шум

$$d_T^2 = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T F(t_1, \vartheta) F(t_2, \vartheta) h(t_1, t_2) \times$$
$$\times \cos[\omega_0 (t_1 - t_2) + \psi(t_1, \vartheta) - \psi(t_2, \vartheta)]\, dt_1\, dt_2. \qquad (1.106)$$

В этих формулах $h(t_1, t_2)$ — решение уравнения

$$\int_0^T B(t_1, t) h(t, t_2)\, dt = \delta(t_1 - t_2). \qquad (1.107)$$

Так как неизвестная начальная фаза определена на интервале $[-\pi; \pi]$, то $\Theta_2 = 2\pi$. Априорный интервал определения параметра ϑ теперь примем равным $\Theta_1 = \Theta$. Тогда приведенный объем ξ (1.102) определяется формулой

$$\xi = 2\pi\xi_0 \sqrt{1 - R_{\vartheta\varphi}^2} = 2\pi\xi_\varphi. \qquad (1.108)$$

Здесь

$$\xi_0 = \Theta \left[\frac{\partial^2 S_c(\vartheta_1, \vartheta_2)}{\partial\vartheta_1\, \partial\vartheta_2}\right]_{\vartheta_0}^{1/2}, \quad \xi_\varphi = \Theta \left[\frac{\partial^2 G(\vartheta_1, \vartheta_2)}{\partial\vartheta_1\, \partial\vartheta_2}\right]_{\vartheta_0}^{1/2}, \qquad (1.109)$$

$$R_{\vartheta\varphi} = -\left[\frac{dS_s(\vartheta_0, \vartheta)}{d\vartheta} \Big/ \sqrt{-\frac{d^2 S_c(\vartheta_0, \vartheta)}{d\vartheta^2}}\right]_{\vartheta_0},$$

где

$$G(\vartheta_1, \vartheta_2) = \sqrt{S_c^2(\vartheta_1, \vartheta_2) + S_s^2(\vartheta_1, \vartheta_2)} \qquad (1.110)$$

— функция, которую можно интерпретировать как огибающую сигнальной функции (1.105) [27]. Значение ξ_0 совпадает с приведенной) длиной априорного интервала при обнаружении радиосигнала с априори известной начальной фазой (1.89), так как для радиосигнала с известной начальной фазой $S_c(\vartheta_1, \vartheta_2) = S(\vartheta_1, \vartheta_2)$ [27]. Поскольку

$$\xi_\varphi = \xi_0 \sqrt{1 - R^2_{\vartheta\varphi}}, \tag{1.111}$$

то приведенная длина априорного интервала при обнаружении радиосигнала с неизвестной начальной фазой всегда не превышает ξ_0. Физически этот результат очевиден. Действительно, трудно представить, что незнание начальной фазы радиосигнала приведет к увеличению числа различимых значений неизвестного параметра ϑ. Величина $R_{\vartheta\varphi}$ представляет собой коэффициент корреляции между оценками максимального правдоподобия параметра ϑ и начальной фазы φ. Если $R_{\vartheta\varphi} = 0$ (оценки некоррелированы), то $\xi_\varphi = \xi_0$.

Подставляя (1.108) в (1.100), (1.101), находим, что при обнаружении радиосигнала с неизвестными начальной фазой и неэнергетическим параметром ϑ вероятности ошибок равны

$$\alpha_\varphi \simeq \begin{cases} 1 - \exp\left[-\xi_\varphi u \exp(-u^2/2)/\sqrt{2\pi}\right], & u \geqslant 1, \\ 1, & u < 1; \end{cases} \tag{1.112}$$

$$\beta_\varphi \simeq \begin{cases} d_T \exp\left[-\dfrac{\xi_\varphi u}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{u^2}{2}\right)\right] \times & \\ \times \displaystyle\int_{-\infty}^{u} \exp\left(\frac{3d_T^2}{2} - x d_T\right) \Phi(x - 2d_T)\, dx, & u \geqslant 1, \\ 0, & u < 1. \end{cases} \tag{1.113}$$

Оценим влияние незнания начальной фазы радиосигнала с неизвестным неэнергетическим параметром на эффективность обнаружения. Как и ранее, ограничимся рассмотрением случая $u \to \infty$ и $d_T \to \infty$. Тогда формулы для вероятности ошибок примут вид

$$\alpha_\varphi \simeq \xi_\varphi u \exp(-u^2/2)/\sqrt{2\pi}, \quad \beta_\varphi \simeq \beta_z, \tag{1.114}$$

где β_z — вероятность пропуска сигнала, все параметры которого известны (1.78). Вероятность пропуска радиосигнала с известной начальной фазой и неизвестным неэнергетическим параметром ϑ (1.91) при $u \to \infty$ и $d_T \to \infty$ также совпадает с β_z. Значит, незнание начальной фазы в этих условиях изменяет только вероятность ложной тревоги.

Из (1.96) и (1.114) получаем, что при равных вероятностях пропуска сигнала отношение вероятностей ложной тревоги для радиосигнала с неизвестной и известной начальными фазами приближенно равно

$$\alpha_\varphi/\alpha \simeq \xi_\varphi u \sqrt{2\pi}/\xi = u\sqrt{2\pi(1 - R^2_{\vartheta\varphi})}. \tag{1.115}$$

Здесь учтено, что ξ (1.89) и ξ_0 (1.109) для радиосигнала совпадают. Следовательно, проигрыш в эффективности обнаружения из-за незна-

ния начальной фазы возрастает с увеличением нормированного порога u (т. е. с уменьшением требуемого уровня ложных тревог) и уменьшается с увеличением коэффициента корреляции между оценками максимального правдоподобия параметров ϑ и φ.

Для сравнения найдем проигрыш в эффективности обнаружения из-за незнания начальной фазы, когда радиосигнал не содержит других неизвестных параметров. Для сигнала с неизвестной начальной фазой при $u \to \infty$ и $d_T \to \infty$ вероятность пропуска совпадает с вероятностью пропуска радиосигнала с известной начальной фазой (1:78), а вероятность ложной тревоги [1, 29, 42]

$$\alpha_{z\varphi} = \exp(-u^2/2). \qquad (1.116)$$

Из сравнения (1.116) и (1.77) получаем, что при $u \to \infty$ проигрыш в эффективности обнаружения известного радиосигнала вследствие незнания начальной фазы равен $\alpha_{z\varphi}/\alpha_z \simeq u\sqrt{2\pi}$. Эта формула и (1.115) показывают, что при $R_{\vartheta\varphi} \neq 0$ влияние неизвестной начальной фазы меньше при обнаружении радиосигнала с неизвестным неэнергетическим параметром ϑ, чем при обнаружении известного радиосигнала.

При анализе эффективности обнаружения узкополосного радиосигнала (1.104) с неизвестными значениями ϑ и φ приближенные значения вероятностей ошибок часто ищут, предполагая, что параметр ϑ принимает одно из m дискретных значений [14, 53]. Этот подход, основанный на искусственном сведении аналоговой системы к дискретной, дает следующие приближенные выражения для вероятностей ошибок:

$$\alpha_{\varphi m} = 1-(1-\alpha_{z\varphi})^m; \quad \beta_{\varphi m} = (1-\alpha_{z\varphi})^{m-1}[1-Q(d_T, u)]. \qquad (1.117)$$

Здесь $\alpha_{z\varphi}$ определяется из (1.116), а

$$Q(d_T, u) = \int_u^\infty x \exp\left(-\frac{x^2+d_T^2}{2}\right) I_0(xd_T)\,dx \qquad (1.118)$$

— функция Маркума [42]. Формулы (1.117) при $u \to \infty$ и $d_T \to \infty$ несколько упрощаются и принимают вид

$$\alpha_{\varphi m} \simeq m\alpha_{z\varphi}; \quad \beta_{\varphi m} \simeq \beta_z, \qquad (1.119)$$

где β_z определяется из (1.78). Согласно (1.114) и (1.119) вероятности пропуска, рассчитанные по (1.113) и (1.117), асимптотически совпадают. Сравним результаты расчета вероятности ложной тревоги. Из (1.114) и (1.119) имеем $\alpha_\varphi/\alpha_{\varphi m} \simeq \xi_\varphi u/(m\sqrt{2\pi})$, что с точностью до обозначений совпадает с (1.97). Если для радиосигнала с неизвестной начальной фазой огибающая сигнальной функции (1.110) имеет колокольную форму, то $\alpha_\varphi/\alpha_{\varphi m} \simeq u$, что совпадает с (1.98).

Так же, как для сигнала с известной начальной фазой (п. 1.2.3), точность формул (1.112) и (1.113), в отличие от точности формул (1.117), растет с увеличением ξ_φ, u и d_T. Для конечных значений ξ_φ, u и d_T вопрос о применимости полученных приближений (1.112), (1.113) можно решить экспериментальной проверкой.

1.2.5. Результаты экспериментальных исследований байесовского и асимптотически оптимального обнаружителей

С целью определения границ применимости полученных выше асимптотически точных формул проводилось радиоэлектронное и математическое моделирование обнаружителей сигналов с неизвестными параметрами. Для моделирования асимптотически оптимального когерентного обнаружения сигнала с неизвестным временны́м положением был разработан лабораторный макет [27, 30]. Полезный сигнал в нем формировался в результате пропускания короткого импульса через последовательно соединенные, слабо связанные интегрирующие RC-цепочки. Затем полезный сигнал смешивался с аддитивным широкополосным гауссовским шумом и поступал на согласованный фильтр. В качестве согласованного фильтра использовалась аналогичная последовательность интегрирующих RC-цепочек, в результате чего сигнальная функция на выходе приемника имела форму, близкую к колокольной. Более подробное описание лабораторного макета приведено в [27].

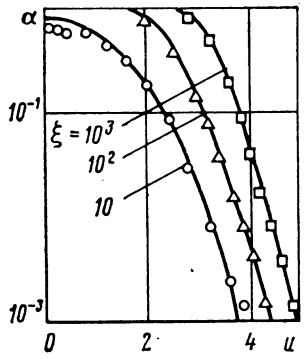


Рис. 1.7. Вероятность ложной тревоги

Экспериментальные значения вероятностей ложной тревоги α и пропуска сигнала β определялись при различных значениях ξ и d_T. Эти экспериментальные значения приведены на рис. 1.7, 1.8, где нанесены также теоретические зависимости, рассчитанные по формулам (1.90), (1.91). Каждое значение α и β найдено в результате обработки 10^5—10^6 реализаций, так что с вероятностью 0,9 границы доверительного интервала отклоняются от экспериментальных значений не более чем на 15%. Следует отметить удовлетворительную аппроксимацию экспериментальных зависимостей асимптотически точными формулами (1.90), (1.91) уже при $\xi \geqslant 10$, $u \geqslant 1 \div 2$, $d_T \geqslant 1 \div 2$.

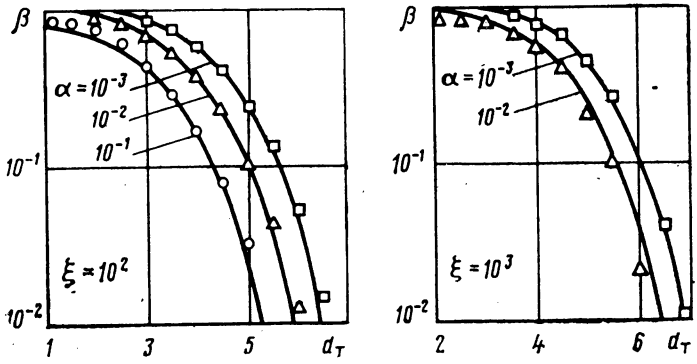


Рис. 1.8. Вероятность пропуска сигнала

Радиоэлектронное моделирование байесовского обнаружителя, а также приемника сложного сигнала с неизвестными параметрами встречает значительные технические трудности. Поэтому экспериментальное исследование байесовского обнаружителя и обнаружителя сложного сигнала выполнялось с помощью математического моделирования на ЭВМ [35, 38]. Было проведено моделирование обнаружения сигнала с одним неизвестным неэнергетическим параметром ϑ, распределенным равновероятно в априорном интервале Θ. Предполагалось, что

сигнальная функция имеет колокольную форму, а априорные вероятности наличия и отсутствия сигнала $p_0 = p_1 = 1/2$. При моделировании байесовского обнаружителя вычислялся усредненный функционал отношения правдоподобия (1.6), который затем сравнивался с порогом $C^* = 1$ (1.5), оптимальным по критерию идеального наблюдателя. Одновременно выполнялось моделирование асимптотически оптимального обнаружителя в соответствии с (1.19). В результате моделирования определялась средняя вероятность ошибки $P'_e = (\alpha' + \beta')/2$ для байесовского обнаружителя и $P_e = (\alpha + \beta)/2$ для асимптотически оптимального обнаружителя. При моделировании объем экспериментальной выборки удваивался до получения двух устойчивых значащих цифр в $P'_e(d_T)$ и $P_e(d_T)$.

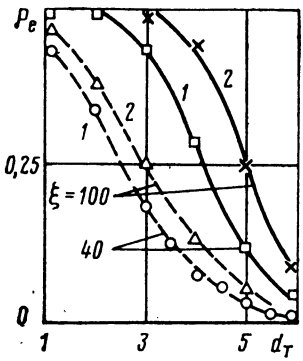


Рис. 1.9. Экспериментальные значения средней вероятности ошибки

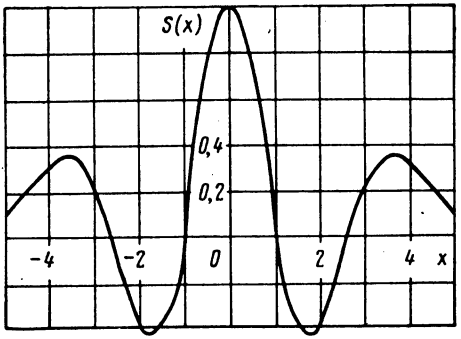


Рис. 1.10. Сигнальная функция

Экспериментальные значения средней вероятности ошибки представлены на рис. 1.9. Штриховой линией на рис. 1.9 нанесены предполагаемые зависимости средней вероятности ошибки байесовского обнаружителя от отношения сигнал-шум $P'_e(d_m)$. Сплошными кривыми представлены зависимости $P_e(d_T)$ для асимптотически оптимального приемника максимального правдоподобия, рассчитанные по формуле (1.92). Для некоторых d_T полученные при моделировании значения P_e и P'_e приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

d_T	$\xi = 40$		$\xi = 100$	
	P_e	P'_e	P_e	P'_e
3	0,45	0,19	0,50	0,25
4	0,30	0,083	0,45	0,13
5	0,12	0,028	0,25	0,044

Результаты математического моделирования асимптотически оптимального обнаружителя максимального правдоподобия подтверждают возможность использования полученных выше асимптотически точных формул для расчета характеристик обнаружения при $d_T \geqslant 1 \div 2$. Кроме того, из рис. 1.10 и табл. 1.1 видно, что байесовский алгоритм обнаружения при конечных отношениях сигнал-шум приводит к заметно меньшей средней вероятности ошибки, чем обнаружитель максимального правдоподобия, хотя при $d_T \to \infty$ обнаружение по методу

максимального правдоподобия является асимптотически оптимальным. Поскольку байесовский обнаружитель (см. рис. 1.1) обладает несколько более сложной структурой, чем обнаружитель максимального правдоподобия (см. рис. 1.2), целесообразность практического использования байесовского обнаружителя определяется обеспечиваемым выигрышем в эффективности обнаружения.

С помощью математического моделирования были исследованы характеристики обнаружения сложного сигнала, содержащего неизвестный неэнергетический параметр [36, 38]. На ЭВМ выполнялось моделирование обнаружения эрмитова сигнала второго порядка $s(t-\tau) = a \exp[-(t-\tau)^2] H_2[(t-\tau)/\gamma]$ с неизвестным временным положением τ. Здесь $H_2(x) = 4x^2 - 2$. Сигнальная функция этого сигнала $S(x) = \exp[-x^2/4][1 - x^2 + x^4/8]$, $x = (\tau - \tau_0)/\gamma$, представлена на рис. 1.10, имеет два побочных максимума $S_1 = 0{,}354$ на расстоянии 3,59 от центрального пика.

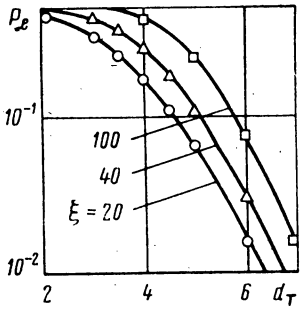


Рис. 1.11. Средняя вероятность ошибки

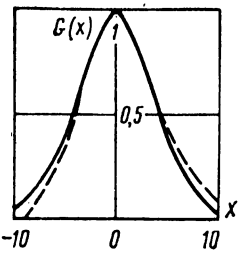


Рис. 1.12. Огибающая сигнальной функции

Моделирование байесовского обнаружителя проводилось для равномерного априорного распределения неизвестного временного положения при $p_0 = p_1 = 1/2$ в соответствии с критерием идеального наблюдателя. Полученные значения средней вероятности ошибки при байесовском обнаружении эрмитова сигнала отличаются от средней вероятности ошибки для сигнала колокольной формы (см. рис. 1.9 и табл. 1.1) не более чем на 10%.

При моделировании асимптотически оптимального обнаружителя в соответствии с (1.19) определялась и средняя вероятность ошибки $P_e(d_T)$. Объем экспериментальной выборки задавался таким образом, что с вероятностью 0,9 границы доверительного интервала отклоняются от экспериментальных значений P_e не более чем на 15%. Экспериментальные значения $P_e(d_T)$ для различных ξ приведены на рис. 1.11, где нанесены также теоретические зависимости, рассчитанные по формулам (1.62), (1.64), (1.87) при $u = d_T/2$. Следует отметить удовлетворительную аппроксимацию экспериментальных зависимостей найденными асимптотически точными формулами уже при $d_T \geqslant 1 \div 2$.

Экспериментальная проверка точности приближенных формул для характеристик некогерентного обнаружения проводилась (совместно с В. К. Маршаковым) на примере обнаружения узкополосного радиосигнала с неизвестным временным положением τ. С этой целью был разработан лабораторный макет, где полезный сигнал формировался в результате пропускания короткого радиоимпульса через последовательно соединенные, слабо связанные одинаковые резонансные контуры. Для формирования сигнала использовались восемь контуров. Затем сигнал смешивался с аддитивным широкополосным гауссовским шумом и поступал на согласованный фильтр. В качестве согласованного фильтра использовалась аналогичная последовательность из восьми слабо связанных резонансных контуров. На выходе согласованного фильтра подключался линейный детектор огибающей. Для теоретических расчетов характеристик обнаружения ис-

пользовалась аппроксимация нормированной (по амплитуде и аргументу) огибающей сигнальной функции формулой

$$G(x)=\frac{7!}{14!}\,e^{-|x|}\sum_{k=0}^{7}\frac{(14-k)!}{k!\,(7-k)!}\,|x|^{k}. \qquad (1.120)$$

Эта формула получена в предположении, что вся последовательность из 16 резонансных контуров является узкополосной и в полосе пропускания всей последовательности фазочастотную характеристику каждого контура можно считать линейной.

На рис. 1.12 приведены нормированная огибающая сигнальной функции, рассчитанная по (1.120), и реальная форма огибающей (штриховая линия) на выходе линейного детектора. Удалось получить почти точное совпадение амплитудно-частотных характеристик формирующего устройства и согласованного фильтра с соответствующими расчетными зависимостями. Поэтому отклонение экспериментально полученной огибающей от теоретической, по-видимому, обусловлено нелинейностью фазочастотной характеристики каждого контура и некоторой нелинейностью детектора при малых напряжениях. Кроме того, (1.120) верна при воздействии на макет дельта-импульса, в то время как в эксперименте использовался хотя и короткий, но конечный радиоимпульс.

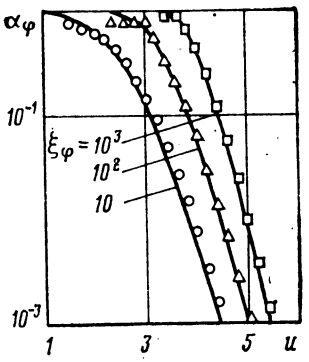


Рис. 1.13. Вероятность ложной тревоги при обнаружении радиосигнала

Экспериментальные значения вероятности ложной тревоги α_φ и вероятности пропуска сигнала β_φ приведены на рис. 1.13, 1.14, где нанесены также теоретические зависимости, рассчитанные по формулам (1.112), (1.113). Каждое значение α_φ и β_φ найдено в результате обработки 10^5—10^6 реализаций, так что с вероятностью 0,9 границы доверительного интервала отклоняются от экспериментальных значений не более чем на 15%. Следует отметить удовлетворительную аппроксимацию экспериментальных зависимостей приближенными формулами (1.112), (1.113) уже при $\xi_\varphi \geqslant 10$, $u > 1 \div 2$; $d_T \geqslant 1 \div 2$.

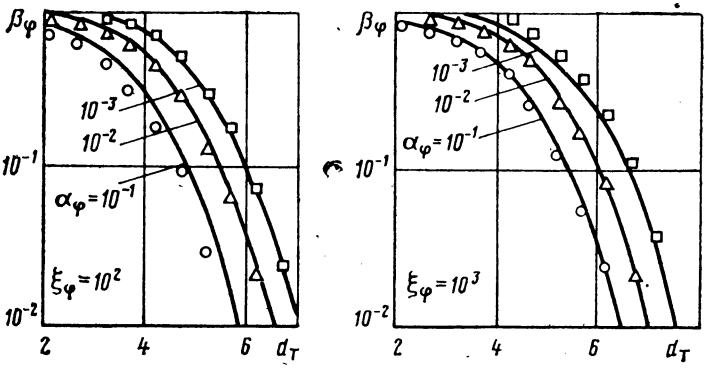


Рис. 1.14. Вероятность пропуска радиосигнала

1.3. Характеристики обнаружения разрывных сигналов с неизвестными неэнергетическими параметрами

1.3.1. Исходные соотношения и определения

Основные результаты в § 1.1, 1.2 — предельная форма оптимального обнаружителя и его характеристики — получены в предположении, что сигнальные функции используемых сигналов имеют необходимое число непрерывных производных. Если же сигнальная функция не имеет хотя бы двух непрерывных производных, полученные результаты использовать нельзя. Сигналы, у которых сигнальные функции недифференцируемы хотя бы дважды, будем называть разрывными [22]. Иногда такие сигналы называют неаналитическими или нерегулярными [2].

Применительно к анализу обнаружения разрывных сигналов с неизвестными параметрами возникают следующие трудности. Во-первых, не удается достаточно просто установить предельную форму оптимального алгоритма обнаружения, так как реализации логарифма ФОП для такого сигнала недифференцируемы даже в среднеквадратическом [25]. Во-вторых, приведенная в § 1.2 методика расчета вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала не применима к разрывным сигналам. Действительно, для таких сигналов шумовая функция (1.13) имеет бесконечное среднее число выбросов за любой уровень [43], а для расчета вероятности пропуска в силу недифференцируемости логарифма ФОП нельзя воспользоваться разложением Тейлора. В то же время разрывные модели сигналов находят довольно широкое применение в различных приложениях. Так, часто рассматривается модель сигнала в виде прямоугольного или экспоненциального импульса. При обнаружении таких сигналов с неизвестным временным положением на фоне белого шума их сигнальные функции недифференцируемы.

Однако приведенными примерами не исчерпывается класс сигналов, обладающих недифференцируемыми сигнальными функциями. Например, узкополосный радиоимпульс с равномерным в ограниченной полосе F_0 спектром: $s(t, f) = (\sin \pi F_0 t/(\pi t)) \cos 2\pi f t$ является аналитической функцией частоты f. Тем не менее при приеме этого сигнала с неизвестной несущей частотой f на фоне белого шума его сигнальная функция недифференцируема по f. Число сигналов, сигнальная функция которых недифференцируема, существенно возрастает при помехе в виде коррелированного гауссовского шума.

Рассмотрим обнаружение разрывного сигнала с неизвестными неэнергетическими параметрами приемником максимального правдоподобия. Следует отметить при этом, что вопрос об асимптотической оптимальности приемника максимального правдоподобия для разрывных сигналов остается открытым.

1.3.2. Разрывный сигнал с одним неизвестным параметром

Пусть разрывный сигнал $s(t, \vartheta_0)$ содержит лишь один неизвестный неэнергетический параметр $\vartheta \in [-\Theta/2; \Theta/2]$. Поскольку ϑ — неэнергетический параметр, соответствующую нормированную сигнальную

функцию (1.14) можем записать как $S(\vartheta+\lambda, \vartheta) \equiv S(\lambda) = S(-\lambda)$. Ограничимся рассмотрением класса сигналов, для которых при $|\lambda| \to 0$

$$S(\lambda) = 1 - \delta|\lambda| + o(|\lambda|), \quad \delta > 0, \tag{1.121}$$

а при $|\lambda| \to \infty$

$$S(\lambda) = o(||\ln|\lambda||^{-1}).$$

Согласно (1.121) сигнальная функция рассматриваемого разрывного сигнала не имеет второй производной при $\lambda = 0$. Так как сигнальная функция является функцией корреляции нормированной шумовой функции $N(\vartheta)$ (1.13), реализации логарифма ФОП $L_z(\vartheta)$ (1.10) недифференцируемы. Тем не менее при выполнении (1.121) эти реализации непрерывны с вероятностью 1 [25].

Вероятности ошибок 1-го и 2-го рода в приемнике максимального правдоподобия, осуществляющем сравнение абсолютного максимума $L_z(\vartheta)$ (1.10) с порогом c, имеют вид (1.56). При этом согласно (1.57) для определения вероятности ложной тревоги надо найти функцию распределения абсолютного максимума реализации $N(\vartheta)$: $F_0(H) = P[N(\vartheta_m) < H]$; ϑ_m — положение абсолютного максимума $L_z(\vartheta)$, $\vartheta \in [-\Theta/2, \Theta/2]$.

Точное выражение для $F_0(H)$ неизвестно. Однако, используя результаты, полученные Д. Пикандсом [60], можно найти асимптотическое выражение для $F_0(H)$, справедливое при $H \to \infty$. Пусть $r(v)$ — стационарный случайный гауссовский процесс с нулевым средним и функцией корреляции $K(v)$. При этом $K(v) = 1 - |v|^\gamma + o(|v|^\gamma)$, $\gamma > 0$, при $v \to 0$ и $K(v) = o(||\ln|v||^{-1})$ при $v \to \infty$.

Согласно [12] назовем τ-выходом слева такой выход реализации процесса $r(v)$ за уровень H, перед которым в течение времени, не меньшего τ, не было пересечений этого уровня. В [60] показано, что поток τ-выходов реализаций процесса $r(v)$ за уровень H является асимптотически пуассоновским при $H \to \infty$. Используя полученное в этих работах асимптотическое выражение для среднего числа τ-выходов, при $H \to \infty$ имеем

$$P\left[\underset{0<v<v_0}{r(v)} < H\right] \to \exp\left[-\frac{Av_0 H^{2/\gamma-1}}{\sqrt{2\pi}} \exp(-H^2/2)\right]. \tag{1.122}$$

Здесь

$$A = \lim_{v_0 \to \infty} [A(v_0)/v_0]; \tag{1.123}$$

$$A(v_0) = 1 + \int_0^\infty e^y P\left[\max_{0<v<v_0} \chi(v) > y\right] dy;$$

$\chi(v)$ — гауссовский процесс, для которого $M[\chi(v)] = -|v|^\gamma$,

$$M\{[\chi(v_1) - M[\chi(v_1)]][\chi(v_2) - M[\chi(v_2)]]\} = |v_1|^\gamma + |v_2|^\gamma - |v_1 - v_2|^\gamma.$$

Найдем $A(v_0)$, для чего вероятность под знаком интеграла в (1.123) перепишем как

$$P[\max_{0<v<v_0} \chi(v) > y] = 1 - P(y),$$

где

$$P(y) = P[y - \chi(v) > 0] = P[\mu(v) > 0], \quad 0 < v < v_0. \quad (1.124)$$

В рассматриваемом случае, поскольку функция корреляции шумовой функции $N(\vartheta)$ допускает представление (1.121), следует положить $\gamma = 1$. Значит, функция корреляции гауссовского случайного процесса $\mu(v)$ принимает вид

$$M\{[\mu(v_1) - M\mu[(v_1)]][\mu(v_2) - M[\mu(v_2)]]\} = 2\min(v_1, v_2).$$

Такую функцию корреляции, как известно [45], имеет чисто диффузионный (винеровский) процесс. Следовательно, $\mu(v)$ является реализацией марковского процесса, коэффициенты сноса и диффузии которого равны соответственно: $K_1 = 1$; $K_2 = 2$. Используя известную методику [41, 45], вероятность (1.124) можно записать как

$$P(y) = \int_0^\infty W(\mu, v_0)\, d\mu. \quad (1.125)$$

Здесь $W(\mu, v_0) = W(\mu, v)|_{v=v_0}$ — решение уравнения

$$\frac{\partial W(\mu, v)}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial \mu}[K_1 W(\mu, v)] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \mu^2}[K_2 W(\mu, v)] = 0 \quad (1.126)$$

при начальном и граничных условиях

$$W(\mu, v)|_{v=0} = \delta(\mu - y); \quad W(\mu, v)|_{\mu=0} = W(\mu, v)|_{\mu=\infty} = 0.$$

Применяя для решения уравнения (1.126) метод отражения с переменой знака [45] и подставляя результат в (1.125), из (1.124) находим

$$P[\max_{0<v<v_0} \chi(v) > y] = 1 - \Phi\left(\frac{y+v_0}{\sqrt{2v_0}}\right) + e^{-y}\left[1 - \Phi\left(\frac{y-v_0}{\sqrt{2v_0}}\right)\right], \quad (1.127)$$

где $\Phi(\cdot)$ — интеграл вероятности (1.76).

Согласно (1.127) и (1.123)

$$A(v_0) = (2 + v_0)\,\Phi\left(\sqrt{v_0/2}\right) + \sqrt{v_0/\pi}\exp(-v_0/2),$$

так что $A = 1$. Переходя затем в (1.122) от случайного процесса $r(v)$ к шумовой функции $N(\vartheta)$, при $H \to \infty$

$$F_0(H) \to \exp\left[\left(-mH/\sqrt{2\pi}\right)\exp(-H^2/2)\right]. \quad (1.128)$$

Здесь $m = \Theta\delta$.

Для конечных значений H аппроксимируем распределение $F_0(H)$ его предельным значением (1.128). Поскольку правая часть этой фор-

мулы является неубывающей функцией H лишь при $H \geqslant 1$, аналогично (1.59) положим

$$F_0(H) \simeq \begin{cases} \exp[-mH\exp(-H^2/2)/\sqrt{2\pi}], & H \geqslant 1; \\ 0, & H < 1. \end{cases} \quad (1.129)$$

Из этой формулы и (1.57) находим приближенное выражение для вероятности ложной тревоги

$$\alpha \simeq \begin{cases} 1-\exp[-mu\exp(-u^2/2)/\sqrt{2\pi}], & u \geqslant 1; \\ 1, & u < 1. \end{cases} \quad (1.130)$$

Точность этой формулы возрастает с увеличением m и нормированного порога $u = c/d_T$.

Определим теперь вероятность пропуска разрывного сигнала $\beta(\vartheta_0)$ (1.56). Полагая, что в принятой реализации $x(t)$ присутствует полезный сигнал, обозначим, как и в п. 1.2.1, H_S — значение абсолютного максимума $L_z(\vartheta)$ (1.10) при $\vartheta_0 - \Delta < \vartheta < \vartheta_0 + \Delta$ и H_N — то же самое при $-\Theta/2 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0 - \Delta$; $\vartheta_0 + \Delta \leqslant \vartheta \leqslant \Theta/2$. Здесь, как и ранее, Δ — интервал корреляции шумовой функции $N(\vartheta)$, причем в силу свойств выходного сигнала приемника максимального правдоподобия [27] $S(\pm\Delta) \simeq 0$. Если $\Theta \gg \Delta$ или, что то же самое, для большинства сигналов $m \gg 1$, то аналогично п. 1.2.1 можно показать, что случайные величины H_S и H_N приближенно независимы. Следовательно, когда $m \gg 1$, приближенное выражение для вероятности пропуска опять можно представить в виде (1.64).

Приближенное значение вероятности $P_N(c)$ при $m \gg 1$ можно записать как

$$P_N(c) \simeq F_0(u), \quad (1.131)$$

где $F_0(\cdot)$ определяется из (1.129). Функция $P_S(c)$ в (1.64) представляет собой распределение величины абсолютного максимума $L_z(\vartheta)$ при $|\vartheta - \vartheta_0| < \Delta$. При наличии сигнала и $|\vartheta - \vartheta_0| < \Delta$ имеем $H_S = L_z(\vartheta_m) = d_T^2 S(\vartheta_0, \vartheta_m) + d_T N(\vartheta_m)$, где ϑ_m — положение абсолютного максимума H_S. Аналогично [122] можно показать, что при $d_T \to \infty$ оценка максимального правдоподобия $\vartheta_m \to \vartheta_0$ в среднеквадратическом. Следовательно, при больших отношениях сигнал-шум d_T достаточно исследовать поведение абсолютного максимума $L_z(\vartheta)$ в малой окрестности ϑ_0. Поэтому рассмотрим распределение

$$P_\varepsilon(c) = P[L_z(\vartheta) < c], \quad \vartheta_0 - \varepsilon \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0 + \varepsilon, \quad (1.132)$$

где ε фиксировано и настолько мало, что для сигнальной функции (1.121) справедлива аппроксимация

$$S(\lambda) \simeq 1 - \delta|\lambda|. \quad (1.133)$$

Очевидно, если ε выбрано так, что $\Delta \geqslant \varepsilon > 0$, то при $d_T \to \infty$ искомая функция $P_S(c) \to P_\varepsilon(c)$. Переходя к нормированному логарифму ФОП $m(\vartheta) = L_z(\vartheta)/d_T$, перепишем (1.132) как

$$P_\varepsilon(u) = P_\varepsilon(c/d_T) = P[m(\vartheta) < u] = P[\Delta(\vartheta) < u - m_0], \quad \vartheta_0 - \varepsilon \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0 + \varepsilon. \quad (1.134)$$

Здесь $m_0 = m(\vartheta_0)$, $\Delta(\vartheta) = m(\vartheta) - m(\vartheta_0)$ — реализация гауссовского случайного процесса с функцией корреляции

$$K_\Delta(\vartheta_1, \vartheta_2) = \begin{cases} 2\delta \min(|\vartheta_1 - \vartheta_0|, |\vartheta_2 - \vartheta_0|), & (\vartheta_1 - \vartheta_0)(\vartheta_2 - \vartheta_0) \geqslant 0, \\ 0, & (\vartheta_1 - \vartheta_0)(\vartheta_2 - \vartheta_0) < 0. \end{cases} \quad (1.135)$$

Из этой формулы следует [44], что $\Delta(\vartheta)$ — реализация гауссовского марковского процесса, причем значения этого процесса на неперекрывающихся интервалах $[\vartheta_0 - \varepsilon; \vartheta_0]$ и $[\vartheta_0; \vartheta_0 + \varepsilon]$ статистически независимы. Отсюда, в частности,

$$P_\varepsilon(u) = P[\Delta(\vartheta) < u - m_0]\, P[\Delta(\vartheta) < u - m_0],$$
$$\vartheta_0 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0 + \varepsilon,\ \vartheta_0 - \varepsilon \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0. \quad (1.136)$$

Обозначим

$$F_\varepsilon^-(x) = P[\Delta(\vartheta) < x],\ \vartheta_0 - \varepsilon \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0;\ F_\varepsilon^+(x) = P[\Delta(\vartheta) < x],$$
$$\vartheta_0 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0 + \varepsilon. \quad (1.137)$$

Тогда при фиксированном значении $m(\vartheta_0)$

$$P[\Delta(\vartheta) < u - m_0] = F_\varepsilon^-(u - m_0),\ \vartheta_0 - \varepsilon \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0;$$
$$P[\Delta(\vartheta) < u - m_0] = F_\varepsilon^+(u - m_0),\ \vartheta_0 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0 + \varepsilon. \quad (1.138)$$

Так как по определению $m_0 = m(\vartheta_0)$, то из (1.136), (1.138) получаем

$$P_\varepsilon(u) = \int_{-\infty}^{u} F_\varepsilon^-(u - x)\, F_\varepsilon^+(u - x)\, W_0(x)\, dx, \quad (1.139)$$

где $W_0(y)$ — плотность вероятности m_0. В рассматриваемом случае

$$W_0(y) = \exp[-(y - d_T)^2/2]/\sqrt{2\pi}. \quad (1.140)$$

Найдем $F_\varepsilon^-(x)$ и $F_\varepsilon^+(x)$, используя марковские свойства процесса $\Delta(\vartheta)$ при $\vartheta_0 - \varepsilon \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0 + \varepsilon$.

Определим вначале $F_\varepsilon^-(x)$, переписав это распределение в виде

$$F_\varepsilon^-(x) = P[y(\vartheta) > 0],\ \vartheta_0 - \varepsilon \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0. \quad (1.141)$$

Здесь $y(\vartheta) = x - \Delta(\vartheta)$ — гауссовский марковский процесс с коэффициентами сноса и диффузии

$$K_1 = -\delta d_T;\ K_2 = 2\delta. \quad (1.142)$$

Следовательно [41, 42, 44],

$$F_\varepsilon^-(x) = \int_0^\infty W_\varepsilon^-(y, \vartheta_0 - \varepsilon)\, dy, \quad (1.143)$$

где $W_\varepsilon^-(y, \vartheta)$ — решение первого уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова [44]

$$\frac{\partial W_\varepsilon^-(y, \vartheta)}{\partial \vartheta} + K_1 \frac{\partial W_\varepsilon^-(y, \vartheta)}{\partial y} + \frac{K_2}{2} \frac{\partial^2 W_\varepsilon^-(y, \vartheta)}{\partial y^2} = 0 \quad (1.144)$$

при граничных условиях $W_\varepsilon^-(y, \vartheta)|_{y=0} = W_\varepsilon^-(y, \vartheta)|_{y=-\infty} = 0$ и условии, заданном на правом конце интервала $[\vartheta_0 - \varepsilon; \vartheta_0]$: $W_\varepsilon^-(y, \vartheta_0) = \delta(y - x)$. После замены переменных решение уравнения (1.144) можно найти методом отражения с переменой знака [44]

$$W_\varepsilon^-(y, \vartheta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\vartheta_0 - \vartheta)\delta}} \left\{ \exp\left(-\frac{[x - y + d_T(\vartheta_0 - \vartheta)\delta]^2}{4(\vartheta_0 - \vartheta)\delta} \right) - \right.$$

$$\left. - \exp\left(-xd_T - \frac{[x + y - d_T(\vartheta_0 - \vartheta)\delta]^2}{4(\vartheta_0 - \vartheta)\delta} \right) \right\}.$$

Полагая здесь $\vartheta = \vartheta_0 - \varepsilon$ и подставляя это решение в (1.143), имеем

$$F_\varepsilon^-(x) = \Phi\left(d_T\sqrt{m_\varepsilon/2} + x/\sqrt{2m_\varepsilon}\right) -$$

$$- \exp(-xd_T)\,\Phi\left(d_T\sqrt{m_\varepsilon/2} - x/\sqrt{2m_\varepsilon}\right); \qquad (1.145)$$

$m_\varepsilon = \varepsilon\delta$; $\Phi(\cdot)$ — интеграл вероятности (1.76).

Найдем теперь $F_\varepsilon^+(x)$, переписав это распределение аналогично (1.141):

$$F_\varepsilon^+(x) = P[y(\vartheta) > 0], \quad \vartheta_0 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0 + \varepsilon. \qquad (1.146)$$

Здесь $y(\vartheta) = x - \Delta(\vartheta)$ — опять марковский гауссовский случайный процесс с коэффициентами сноса и диффузии.

$$K_1 = \delta d_T; \quad K_2 = 2\delta. \qquad (1.147)$$

В силу свойств марковского процесса $y(\vartheta)$ можем записать

$$F_\varepsilon^+(x) = \int_0^\infty W_\varepsilon^+(y, \vartheta_0 + \varepsilon)\,dy. \qquad (1.148)$$

Функция $W_\varepsilon^+(y, \vartheta)$ — решение второго уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова [44],

$$\frac{\partial W_\varepsilon^+(y, \vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{\partial}{\partial y}[K_1 W_\varepsilon^+(y, \vartheta)] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[K_2 W_\varepsilon^+(y, \vartheta)] = 0 \qquad (1.149)$$

при граничных условиях $W_\varepsilon^+(y, \vartheta)|_{y=0} = W_\varepsilon^+(y, \vartheta)|_{y=\infty} = 0$ и начальном условии $W_\varepsilon^+(y, \vartheta_0) = \delta(y - x)$. Решая уравнение (1.149) методом отражения с переменой знака и подставляя решение в (1.148), опять приходим к формуле (1.145), так что $F_\varepsilon^-(x) = F_\varepsilon^+(x) = F_\varepsilon(x)$. Соответственно (1.139) принимает вид

$$P_\varepsilon(u) = \int_{-\infty}^{u} F_\varepsilon^2(u - x)\,W_0(x)\,dx. \qquad (1.150)$$

Подставляя сюда подынтегральные функции (1.140) и (1.145), получаем

$$P_\varepsilon(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\left[\Phi\left(d_T\sqrt{\frac{m_\varepsilon}{2}}+\frac{x}{\sqrt{2m_\varepsilon}}\right)-\right.$$

$$\left.-\exp(-xd_T)\,\Phi\left(d_T\sqrt{\frac{m_\varepsilon}{2}}-\frac{x}{\sqrt{2m_\varepsilon}}\right)\right]^2\exp\left[-\frac{(x-u+d_T)^2}{2}\right]dx.$$

Так как отношение сигнал-шум предполагается большим, последнее выражение можно несколько упростить:

$$P_\varepsilon(u)\simeq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty[1-\exp(-xd_T)]^2\exp[-(x-u+d_T)^2/2]\,dx.$$

Выполняя здесь интегрирование, окончательно находим при больших, но конечных отношениях сигнал-шум

$$P_\varepsilon(u)\simeq\Phi(u-d_T)-2\exp(3d_T^2/2-ud_T)\,\Phi(u-2d_T)+$$
$$+\exp(4d_T^2-2ud_T)\,\Phi(u-3d_T). \qquad (1.151)$$

Подставляя (1.131) и (1.151) в (1.64), приходим к приближенному выражению для вероятности пропуска разрывного сигнала

$$\beta\simeq\exp[-mu\exp(-u^2/2)/\sqrt{2\pi}]\,[\Phi(u-d_T)-2\exp(3d_T^2/2-$$
$$-ud_T)\,\Phi(u-2d_T)+\exp(4d_T^2-2ud_T)\,\Phi(u-3d_T)] \qquad (1.152)$$

при $u\geqslant 1$ и $\beta\simeq 0$ при $u<1$. Точность этой формулы, как и (1.130), растет с увеличением отношения сигнал-шум d_T, параметра m и нормированного порога u.

Конкретизируем полученные общие соотношения применительно к обнаружению прямоугольного импульса на фоне белого шума. В этом случае сигнал

$$s(t-\tau)=\begin{cases}a, & |t-\tau|\leqslant\Delta_0/2;\\ 0, & |t-\tau|>\Delta_0/2.\end{cases} \qquad (1.153)$$

Пусть неизвестное временно́е положение τ этого сигнала принимает значения из априорного интервала $[-T_0/2;\ T_0/2]$, а время наблюдения $T>T_0+\Delta_0$. Тогда нормированная сигнальная функция (1.14) записывается как [42]

$$S(\tau_1,\tau_2)=\begin{cases}1-|\tau_1-\tau_2|/\Delta_0, & |\tau_1-\tau_2|\leqslant\Delta_0/2;\\ 0, & |\tau_1-\tau_2|>\Delta_0/2,\end{cases} \qquad (1.154)$$

а параметр $m=T_0/\Delta_0$.

На рис. 1.15 приведена зависимость средней вероятности ошибки $P_e(d_T)=(\alpha+\beta)/2$ обнаружения сигнала (1.153) приемником максимального правдоподобия (кривая *1*). Зависимость $P_e(d_T)$ рассчитана по формулам (1.130) и (1.152) при нормированном пороге $u=d_T/2$, оптимальном по критерию идеального наблюдателя для сигнала с из-

вестным временны́м положением. Априорные вероятности наличия и отсутствия сигнала предполагались равными: $p_0 = p_1 = 1/2$, а параметр $m = 10$. Для сравнения на этом же рисунке кривой *3* представлена зависимость $P_e^*(d_T)$ средней вероятности ошибки обнаружения сигнала с априори известным временны́м положением. Эта зависимость рассчитана по формулам (1.77), (1.78) при $u = d_T/2$ и $p_0 = p_1 = 1/2$. Из сопоставления кривых *1* и *3* следует, что незнание временно́го положения разрывного сигнала приводит к существенному увеличению средней вероятности ошибки обнаружения. При этом потери в эффективности обнаружения возрастают с увеличением параметра m и отношения сигнал-шум d_T.

Сравним далее вероятности ошибок при обнаружении разрывного сигнала (1.153) с вероятностями ошибок при обнаружении дифференцируемого сигнала с неизвестным временны́м положением. В качестве этого сигнала удобно использовать колокольный импульс

$$s(t-\tau) = a_1 \exp[-(t-\tau)^2/\Delta_1^2]. \quad (1.155$$

Положим, что сигналы (1.153) и (1.155) имеют одинаковую эквивалентную длительность

$$\Delta_E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2\,dt/\max|s(t)|^2. \quad (1.156)$$

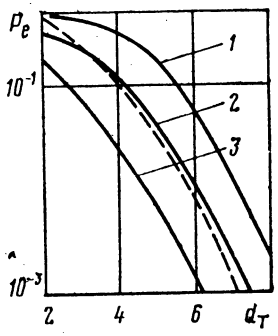


Рис. 1.15. Средняя вероятность ошибки

Для сигнала (1.153) $\Delta_E = \Delta_0$. Следовательно, параметр $m = T_0/\Delta_0 = T/\Delta_E$ определяет число сигналов с эквивалентной длительностью Δ_0, которые могут быть размещены на априорном интервале T_0 определения неизвестного временно́го положения. Для сигнала (1.155)

$$\Delta_E = \Delta_1\sqrt{\pi/2}. \quad (1.157)$$

Пусть сигналы (1.153) и (1.155) обладают одинаковыми эквивалентными длительностями (1.156) и одинаковыми отношениями сигнал-шум d_T. Тогда вероятности ошибок при обнаружении сигнала (1.155) с неизвестным временны́м положением на фоне белого шума можно получить из (1.90), (1.91), если положить в них

$$\xi = m\sqrt{\pi/2}. \quad (1.158)$$

На рис. 1.15 кривой *2* представлена зависимость средней вероятности ошибки $P_{ed}(d_T)$ обнаружения дифференцируемого сигнала с неизвестным временны́м положением при выполнении (1.158), $m = 10$, $p_0 = p_1 = 1/2$ и $u = d_T/2$. Из сравнения кривых *1* и *2* на рис. 1.15 и сопоставления формул (1.90), (1.91) с формулами (1.130), (1.152) следует, что незнание временно́го положения разрывного сигнала приводит к бо́льшим потерям в эффективности обнаружения, чем незнание временно́го положения дифференцируемого сигнала. При этом относи-

тельные потери в эффективности обнаружения разрывного сигнала (1.153) из-за незнания его временно́го положения по сравнению с обнаружением дифференцируемого сигнала (1.155) возрастают с увеличением отношения сигнал-шум.

При обнаружении сигнала (1.153) с неизвестным временны́м положением приближенные значения вероятностей ошибок можно найти, предполагая, что временно́е положение сигнала принимает одно из m дискретных значений [14, 53]. При таком подходе вероятности ошибок определяются (1.94). Рассчитанная по этим формулам средняя вероятность ошибки $P_{em}(d_T)$ нанесена на рис. 1.15 штриховой линией.

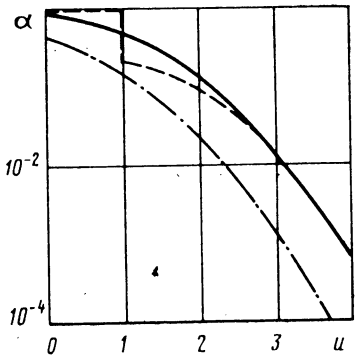


Рис. 1.16. Вероятность ложной тревоги и ее аппроксимации

Из сравнения кривой *1* и штриховой кривой на этом рисунке и сопоставлении формул (1.130) и (1.152) с формулами (1.94) следует, что расчет по (1.94) приводит к значениям средней вероятности ошибки, существенно меньшим, чем расчет по (1.130) и (1.152). При этом точность формул (1.130) и (1.152) растет с увеличением u, m и d_T, в то время как поведение точности приближенных формул (1.94), полученных на основе искусственного сведения аналоговой системы к дискретной, неизвестно.

Оценить аналитически точность формул (1.130), (1.152) при конечных u, m и d_T в общем случае затруднительно. Исключением является частный случай обнаружения сигнала (1.153) с неизвестным временны́м положением на фоне белого шума. Тогда, используя результаты [62, 63], можно получить точное выражение для вероятности ложной тревоги при $m \leqslant 1$. Согласно [62, 63] при $m = 1$ вероятность ложной тревоги

$$\alpha_a = 1 - \Phi^2(u) + \frac{u}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \Phi(u) + \frac{\exp(-u^2)}{2\pi}.$$

Зависимость $\alpha_a(u)$ нанесена на рис. 1.16 сплошной линией. Для сравнения на этом же рисунке штриховой линией нанесена зависимость $\alpha(u)$, рассчитанная по асимптотически точной формуле (1.130) при $m = 1$, и штрих-пунктиром — приближенная зависимость $\alpha_m(u)$, рассчитанная по (1.94) также при $m = 1$. Заметим, что при $m = 1$ имеем $\alpha_m = \alpha_z$ (1.77) Из рассмотрения кривых рис. 1.16 следует, что даже при $m = 1$ для всех значений u асимптотически точная формула (1.130) обладает меньшей погрешностью, чем приближенная формула (1.94). При этом для значений нормированного порога $u > 2 \div 3$ точность формулы (1.130) оказывается вполне удовлетворительной. Более того, экспериментальные результаты, опубликованные в [37], показывают что при $m \geqslant 5 \div 10$ формула (1.130) обладает удовлетворительной точностью, уже когда $u \geqslant 1 \div 2$.

1.3.3. Разрывный узкополосный радиосигнал с одним неизвестным параметром

Пусть полезный сигнал описывается формулой (1.104), где $\vartheta \in [-\Theta/2;\ \Theta/2]$ и $\varphi \in [-\pi;\ \pi]$ — неизвестные неэнергетические параметры. Положим, что сигнал (1.104) принимается на фоне белого гауссовского шума $n(t)$ с двусторонней спектральной плотностью N_0. Тогда член логарифма функционала отношения правдоподобия, зависящий от наблюдаемых данных $x(t)$, можно записать как [42]

$$L_z(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{N_0}\int_0^T x(t)\, F(t, \vartheta)\cos[\omega_0 t + \psi(t, \vartheta) - \varphi]\, dt. \quad (1.159)$$

Согласно определению приемник максимального правдоподобия должен вырабатывать величину $\max\limits_{\vartheta,\,\varphi} L_z(\vartheta, \varphi)$, $|\vartheta| \leqslant \Theta/2$, $|\varphi| < \pi$. Максимизируя (1.159) по неизвестной начальной фазе, находим выходной сигнал приемника

$$R(\vartheta) = \sqrt{X^2(\vartheta) + Y^2(\vartheta)}, \quad (1.160)$$

где

$$\left.\begin{matrix} X(\vartheta) \\ Y(\vartheta) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{N_0}\int_0^T x(t)\, F(t, \vartheta)\left\{\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\right\}[\omega_0 t + \psi(t, \vartheta)]\, dt.$$

Решение о наличии полезного сигнала принимается, если

$$\max R(\vartheta) > c,\ \vartheta \in [-\Theta/2;\ \Theta/2].$$

Рассмотрим вначале некоторые свойства выходного сигнала приемника максимального правдоподобия при приеме разрывного радиосигнала. При наличии полезного сигнала (1.104)

$$R(\vartheta) = \{d_T^4 G^2(\vartheta_0, \vartheta) + 2d_T^3 N_1(\vartheta) + d_T^2[N_c^2(\vartheta) + N_s^2(\vartheta)]\}^{1/2}, \quad (1.161)$$

а при его отсутствии

$$R(\vartheta) = d_T\sqrt{N_c^2(\vartheta) + N_s^2(\vartheta)} = d_T\, r(\vartheta). \quad (1.162)$$

Здесь

$$\left.\begin{matrix} N_c(\vartheta) \\ N_s(\vartheta) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{N_0 d_T}\int_0^T n(t)\, F(t, \vartheta)\left\{\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\right\}[\omega_0 t + \psi(t, \vartheta)]\, dt \quad (1.163)$$

— нормированные квадратуры шумовой функции [27], которые представляют собой реализации гауссовских случайных процессов;

$$N_1(\vartheta) = N_c(\vartheta)\,[S_c(\vartheta_0, \vartheta)\cos\varphi_0 + S_s(\vartheta_0, \vartheta)\sin\varphi_0] +$$

$$+ N_s(\vartheta)\,[S_c(\vartheta_0, \vartheta)\sin\varphi_0 - S_s(\vartheta_0, \vartheta)\cos\varphi_0],$$

а $S_c(\vartheta_0, \vartheta)$, $S_s(\vartheta_0, \vartheta)$, отношение сигнал-шум d_T и $G(\vartheta_0, \vartheta)$ определяются формулами (1.105), (1.106) и (1.110) при подстановке в них функции $h(t_1, t_2) = (1/N_0)\,\delta(t_1 - t_2)$. При этом [27]

$$M[N_s(\vartheta)] = M[N_c(\vartheta)] = 0;\ M[N_c(\vartheta_1)\,N_c(\vartheta_2)] = M[N_s(\vartheta_1) \times$$
$$\times N_s(\vartheta_2)] = S_c(\vartheta_1, \vartheta_2);\ M[N_s(\vartheta_1)\,N_c(\vartheta_2)] = -M[N_c(\vartheta_1)\,N_s(\vartheta_2)] =$$
$$= S_s(\vartheta_1, \vartheta_2);\ \max G(\vartheta_1, \vartheta_2) = \max S_c(\vartheta_1, \vartheta_2) = 1;\ |S_s(\vartheta_1, \vartheta_2)| \leqslant 1.$$

Так как параметр ϑ предполагается неэнергетическим, то отношение сигнал-шум d_T не зависит от ϑ и

$$G(\vartheta + \lambda, \vartheta) \equiv G(\lambda) = G(-\lambda);\ S_c(\vartheta + \lambda, \vartheta) \equiv S_c(\lambda) = S_c(-\lambda);$$
$$S_s(\vartheta + \lambda,\ \vartheta) \equiv S_s(\lambda) = -S_s(-\lambda).$$

Будем называть радиосигнал (1.104) разрывным по параметру ϑ, если при $|\lambda| \to 0$

$$G(\lambda) = 1 - \delta\,|\lambda| + o(|\lambda|),\ \delta > 0, \tag{1.164}$$

так, что функция $G(\lambda)$ не имеет второй производной при $\lambda = 0$. Ограничимся рассмотрением класса разрывных радиосигналов, для которых кроме (1.64) при $|\lambda| \to 0$ выполняется соотношение

$$S_s(\lambda) = o(\sqrt{|\lambda|}). \tag{1.165}$$

Из определения функции $G(\lambda)$ (1.110) имеем, что при выполнении (1.164), (1.165) и $|\lambda| \to 0$ должно выполняться соотношение

$$S_c(\lambda) = 1 - \delta\,|\lambda| + o(|\lambda|). \tag{1.166}$$

Поскольку $S_c(\lambda)$ — функция автокорреляции для $N_c(\vartheta)$ и $N_s(\vartheta)$, то из (1.166) следует, что (1.163) представляют собой стационарные гауссовские локально-марковские случайные процессы [59].

Покажем, что при выполнении (1.164)—(1.166) $r(\vartheta)$ (1.162) является стационарным рэлеевским локально-марковским процессом. Для этого введем в рассмотрение стационарный рэлеевский марковский процесс $\tilde{r}(\vartheta) = \sqrt{\tilde{N}_c^2(\vartheta) + \tilde{N}_s^2(\vartheta)}$, где $\tilde{N}_c(\vartheta)$ и $\tilde{N}_s(\vartheta)$ — независимые гауссовские процессы, для которых

$$M[\tilde{N}_c(\vartheta)] = M[\tilde{N}_s(\vartheta)] = 0,$$
$$M[\tilde{N}_c(\vartheta + \lambda)\,\tilde{N}_c(\vartheta)] = M[\tilde{N}_s(\vartheta + \lambda)\,\tilde{N}_s(\vartheta)] =$$
$$= \tilde{G}(\lambda) = \exp(-\delta\,|\lambda|). \tag{1.167}$$

Пусть $r \equiv r(\vartheta)$; $r_\lambda \equiv r(\vartheta + \lambda)$; $\tilde{r} \equiv \tilde{r}(\vartheta)$; $\tilde{r}_\lambda \equiv \tilde{r}(\vartheta + \lambda)$. Запишем двумерную плотность вероятности процесса $r(\vartheta)$ [42]

$$W_2(r, r_\lambda) = \frac{r r_\lambda}{1 - G^2(\lambda)} \exp\left\{-\frac{r^2 + r_\lambda^2}{2[1 - G^2(\lambda)]}\right\} I_0\left[\frac{G(\lambda)}{1 - G^2(\lambda)}\, r r_\lambda\right]. \tag{1.168}$$

Двумерная плотность вероятности рэлеевского марковского процесса $\tilde{r}(\vartheta)$: $\tilde{W}_2(\tilde{r}, \tilde{r}_\lambda)$ определяется также формулой (1.168) при замене в ней

$G(\lambda)$ на $\widetilde{G}(\lambda)$ (1.167). Поскольку при $|\lambda| \to 0$ имеем $\widetilde{G}(\lambda) = 1 - \delta|\lambda| + o(|\lambda|)$, т. е. (1.164), (1.166) и (1.167) асимптотически совпадают при $|\lambda| \to 0$, то, учитывая, что (1.165) обеспечивает локальную независимость процессов $N_c(\vartheta)$ и $N_s(\vartheta)$, получаем асимптотическое совпадение плотностей вероятности $W_2(r, r_\lambda)$ и $\widetilde{W}_2(\widetilde{r}, \widetilde{r}_\lambda)$. Таким образом, на малых интервалах значений параметра ϑ статистические характеристики процессов $r(\vartheta)$ и $\widetilde{r}(\vartheta)$ одинаковы. Учитывая также, что $N_c(\vartheta)$ и $N_s(\vartheta)$ — стационарные гауссовские локально-марковские процессы, можем утверждать, что $r(\vartheta)$ (1.162) — стационарный рэлеевский локально-марковский случайный процесс. Заметим, что в данном случае достаточно анализа асимптотического поведения двумерной плотности вероятности, так как речь идет о марковском процессе, полное статистическое описание которого задается вероятностью перехода или двумерной плотностью вероятности [41, 44]. Квадратуры $N_c(\vartheta)$ и $N_s(\vartheta)$ локально-марковского рэлеевского процесса $r(\vartheta)$, так же как и сам процесс, недифференцируемы. Тем не менее реализации процессов $N_c(\vartheta)$, $N_s(\vartheta)$ и $r(\vartheta)$ непрерывны с вероятностью 1 [25], как и реализации марковских процессов диффузионного типа [49].

Согласно [40, 59] вероятностные характеристики превышения достаточно высокого уровня для марковского и локально-марковского процессов асимптотически совпадают. Действительно, в силу непрерывности реализаций марковского и локально-марковского процессов длительность отрезков реализаций этих процессов, превышающих некоторый уровень H, при $H \to \infty$ стремится к нулю. Следовательно, при $H \to \infty$ вероятность непревышения уровня H определяется лишь локальными свойствами процесса.

Проиллюстрируем это утверждение на примере двух гауссовских стационарных процессов: марковского и локально-марковского. Функция корреляции гауссовского марковского процесса $N(\vartheta)$ определяется формулой

$$K(\vartheta) = \exp(-\delta|\vartheta|), \quad \delta > 0. \tag{1.169}$$

Примером гауссовского локально-марковского процесса может служить шумовая функция $N(\vartheta)$ в п. 1.3.2, функция корреляции которой допускает представление (1.121). Асимптотическое выражение для функции распределения абсолютного максимума реализаций гауссовского марковского процесса с функцией корреляции (1.169) найдено в [41]. Это выражение совпадает с (1.128), хотя формула (1.128) получена в [60] без использования локально-марковских свойств процесса $N(\vartheta)$ с функцией корреляции (1.121).

Таким образом, поскольку помеха $r(\vartheta)$ (1.162) на выходе приемника максимального правдоподобия является локально-марковским процессом, то при больших значениях H

$$P[r(\vartheta) < H] \simeq P[\widetilde{r}(\vartheta) < H], \quad |\vartheta| \leqslant \Theta/2. \tag{1.170}$$

Как известно [41, 44], нестационарная плотность вероятности марковского процесса $\widetilde{r}(\vartheta)$ удовлетворяет уравнению Фоккера—Планка.

В результате решения этого уравнения при соответствующих граничных условиях в [41] получена приближенная формула

$$P[\tilde{r}(\vartheta) < H] \simeq \exp(-\rho\Theta), \quad |\vartheta| \leqslant \Theta/2, \tag{1.171}$$

где

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\delta}\int_{x_0}^{H} \frac{dx}{W_{st}(x)}, \tag{1.172}$$

а $W_{st}(x) = x\exp(-x^2/2)$ — стационарная плотность вероятности случайного процесса $\tilde{r}(\vartheta)$, которая совпадает с плотностью вероятности процесса $r(\vartheta)$ (1.162). Формула (1.171) получена в [41] для $\delta\Theta \gg 1$ и $W_{st}(H) \ll 1$. Очевидно, последнее условие для рэлеевского процесса выполняется, когда $H \gg 1$. Значение x_0 в (1.172) выбирается в области максимальной вероятности значений процесса $\tilde{r}(\vartheta)$, так что положим $x_0 = 1$. Тогда (1.172) принимает вид

$$\frac{1}{\rho} \simeq \frac{1}{\delta}\int_{1}^{H} \frac{\exp(x^2/2)}{x}\,dx.$$

Удерживая лишь первый член в асимптотическом разложении этого интеграла при $H \to \infty$, получаем

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\delta H^2}\exp(H^2/2)[1 + O(H^{-2})]. \tag{1.173}$$

Значит при больших значениях H согласно (1.170), (1.171), (1.173)

$$P[r(\vartheta) < H] \simeq P[\tilde{r}(\vartheta) < H] \simeq \exp[-mH^2\exp(-H^2/2)], \quad |\vartheta| \leqslant \Theta/2, \tag{1.174}$$

где $m = \delta\Theta$. При этом, как следует из вывода формулы (1.171) в [41], точность приближенной формулы (1.174) растет с увеличением m и H, т. е. при $m \to \infty$ и $H \to \infty$

$$F_0(H) = P[r(\vartheta) < H] \to \exp[-mH^2\exp(-H^2/2)], \quad |\vartheta| \leqslant \Theta/2. \tag{1.175}$$

Эта формула определяет асимптотическое поведение функции распределения $F_0(H)$ абсолютного максимума помехи (1.162) на выходе приемника максимального правдоподобия.

Приемник максимального правдоподобия выносит решение о наличии или отсутствии полезного сигнала (1.104) на основе сравнения абсолютного максимума $R(\vartheta)$ (1.160) при $|\vartheta| \leqslant \Theta/2$ с порогом c. Вероятности ошибок 1-го и 2-го рода по-прежнему определяются соотношениями (1.56), где H_0 и H_1 — значения абсолютного максимума $R(\vartheta)$ соответственно при отсутствии и наличии полезного сигнала. Для определения вероятности ложной тревоги (1.57) надо найти функцию распределения $F_0(H)$ абсолютного максимума случайного процесса $r(\vartheta)$ (1.162). Если принимается радиосигнал, разрывный по параметру ϑ в смысле (1.164)—(1.166), то при $H \to \infty$ и $m \to \infty$ функция распре-

деления $F_0(H)$ определяется из (1.175). Для конечных значений m и H будем аппроксимировать распределение $F_0(H)$ его предельным значением. Поскольку правая часть (1.175) является неубывающей функцией H лишь при $H \geqslant \sqrt{2}$, аналогично (1.59) используем аппроксимацию

$$F_0(H) \simeq \begin{cases} \exp[-mH^2 \exp(-H^2/2)], & H \geqslant \sqrt{2}; \\ 0, & H < \sqrt{2}. \end{cases} \tag{1.176}$$

Согласно (1.57) и (1.176) приближенное выражение для вероятности ложной тревоги принимает вид [50]

$$\alpha_\varphi \simeq \begin{cases} 1 - \exp[-mu^2 \exp(-u^2/2)], & u \geqslant \sqrt{2}; \\ 1, & u < \sqrt{2}. \end{cases} \tag{1.177}$$

Точность этой формулы возрастает с увеличением нормированного порога u и параметра m.

Предполагая, что полезный сигнал присутствует на входе приемника, определяем теперь вероятность пропуска сигнала $\beta(\vartheta_0)$ (1.56). Обозначим Δ интервал корреляции процессов $N_c(\vartheta)$ и $N_s(\vartheta)$, при этом [27] $G(\vartheta_0, \vartheta) \simeq 0$, когда $|\vartheta - \vartheta_0| > \Delta$. Пусть H_S и H_N — величины абсолютных максимумов $R(\vartheta)$ (1.161) на тех же интервалах, что и в п. 1.3.2. Тогда при $m \gg 1$ вероятность пропуска можно опять представить в виде (1.64). Приближенное значение вероятности $P_N(c)$ в этой формуле можно записать аналогично (1.131), где теперь $F_0(\cdot)$ определяется из (1.156). Случайная величина $H_S = R(\vartheta_m)$, причем $|\vartheta_m - \vartheta_0| < \Delta$. В выражении для $R(\vartheta)$ (1.161), когда $|\vartheta - \vartheta_0| < \Delta$, функция $G(\vartheta_0, \vartheta) \neq 0$.

Поэтому при больших отношениях сигнал-шум d_T выражение (1.161) можно приближенно переписать как [27]

$$R(\vartheta) \simeq d_T^2 G(\vartheta_0, \vartheta) + d_T N(\vartheta). \tag{1.178}$$

При фиксированных ϑ_0 и φ_0 шумовая функция $N(\vartheta)$ является реализацией гауссовского процесса с нулевым средним значением и функцией корреляции [27]

$$M[N(\vartheta + \lambda) N(\vartheta)] = G(\lambda) \cos[\gamma(\lambda) - \gamma(\vartheta - \vartheta_0 + \lambda) + \gamma(\vartheta_0 - \vartheta)]; \quad \gamma(\lambda) = \operatorname{arctg}[S_s(\lambda)/S_c(\lambda)]. \tag{1.179}$$

Функция $G(\vartheta_0, \vartheta)$ (1.110) достигает максимума при $\vartheta = \vartheta_0$, а реализации шумовой функции $N(\vartheta)$ непрерывны с вероятностью 1. Поэтому при больших отношениях сигнал-шум для определения $P_S(c)$ достаточно исследовать поведение $R(\vartheta)$ (1.178) в малой окрестности ϑ_0, где выполняется (1.164). Соответственно для функции корреляции (1.179), когда $|\lambda| \to 0$, в малой окрестности ϑ_0 с помощью (1.164)—(1.166) получаем

$$M[N(\vartheta + \lambda) N(\vartheta)] = 1 - \delta|\lambda| + o(|\lambda|). \tag{1.180}$$

Далее рассмотрим распределение $P_\varepsilon(c) = P[R(\vartheta) < c]$, $\vartheta_0 - \varepsilon \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0 + \varepsilon$, выбрав ε настолько малым, что для функций (1.176) и (1.179) справедливы аппроксимации

$$G(\lambda) \simeq 1 - \delta|\lambda|; \quad M[N(\vartheta + \lambda) N(\vartheta)] \simeq 1 - \delta|\lambda|. \quad (1.181)$$

Согласно (1.164) и (1.180) всегда можно подобрать такое $\varepsilon > 0$, что при $|\lambda| < \varepsilon$ аппроксимации (1.181) обладают необходимой точностью. Повторяя выкладки п. 1.3.2, приходим к формуле (1.150), где $F_\varepsilon(x)$ совпадает с $F_\varepsilon^-(x)$ (1.145). Однако при некогерентном приеме плотность вероятности $W_0(x)$ значения $R(\vartheta_0)$ (1.161) отличается от гауссовской (1.140) и описывается выражением [42]

$$W_0(x) = x \exp[-(x^2 + d_T^2)/2] I_0(xd_T); \quad (1.182)$$

$I_0(\cdot)$ — функция Бесселя мнимого аргумента нулевого порядка. Подставим в (1.150) $F_\varepsilon(x) = F_\varepsilon^-(x)$ из (1.145) и $W_0(x)$ из (1.182). Рассуждая аналогично п. 1.3.2, находим, что при больших, но конечных отношениях сигнал-шум в случае некогерентного приема.

$$P_S(c) \simeq 1 - Q(d_T, u) -$$
$$-2\exp(-ud_T)\int_0^u x\exp[-(x-d_T)^2/2] I_0(xd_T)\,dx +$$
$$+\exp(3d_T^2/2 - 2ud_T)\int_0^u x\exp[-(x-2d_T)^2/2] I_0(xd_T)\,dx. \quad (1.183)$$

Здесь $u = c/d_T$ — нормированный порог, а $Q(d_T, u)$ — функция Маркума (1.118). Подставляя найденные значения $P_N(c)$ и $P_S(c)$ в (1.64), получаем приближенное выражение для вероятности пропуска разрывного радиосигнала

$$\beta_\varphi \simeq \exp[-mu^2\exp(-u^2/2)]\left\{1 - Q(d_T, u) -\right.$$
$$-2\exp(-ud_T)\int_0^u x\exp[-(x-d_T)^2/2] I_0(xd_T)\,dx +$$
$$\left.+\exp(3d_T^2/2 - 2ud_T)\int_0^u x\exp[-(x-2d_T)^2/2] I_0(xd_T)\,dx\right\}, \quad (1.184)$$

если $u \geqslant \sqrt{2}$, и $\beta_\varphi \simeq 0$, если $u < \sqrt{2}$. Точность формулы (1.184), как и формулы (1.177), растет с увеличением u, m и d_T.

Конкретизируем полученные общие соотношения (1.177) и (1.184) применительно к обнаружению узкополосного радиоимпульса с прямоугольной огибающей и неизвестным временным положением

$$s(t, \tau, \varphi) = \begin{cases} a\cos(\omega_0 t - \varphi), & |t-\tau| < \Delta_0/2; \\ 0, & |t-\tau| > \Delta_0/2. \end{cases} \quad (1.185)$$

При приеме этого сигнала на фоне белого шума

$$G(\tau)=\begin{cases} 1-|\tau|/\Delta_0, & |\tau|<\Delta_0, \\ 0, & |\tau|>\Delta_0, \end{cases} \quad S_s(\tau)=0. \qquad (1.186)$$

Будем считать, что неизвестное временно́е положение τ сигнала (1.185) может принимать значения из интервала $[-T_0/2;\ T_0/2]$. Тогда характеристики обнаружения сигнала (1.185) приемником максимального правдоподобия получаем, подставляя в (1.177), (1.184) значение $m = T_0/\Delta_0$.

На рис. 1.17 приведена зависимость средней вероятности ошибки $P_{e\varphi}(d_T) = (\alpha_\varphi + \beta_\varphi)/2$ при обнаружении сигнала (1.185) приемником максимального правдоподобия (кривая *1*). Зависимость $P_{e\varphi}(d_T)$ рассчитана по (1.177), (1.184) при нормированном пороге $u = d_T/2$, оптимальном по критерию идеального наблюдателя для сигнала с известными параметрами. Кроме того, полагалось $m = 10$; $p_0 = p_1 = 1/2$. Для сравнения на рис. 1.17 приведена зависимость средней вероятности ошибки $P_e(d_T)$ обнаружения радиосигнала (1.185) при когерентном приеме (кривая *2*). Эта зависимость рассчитана по (1.130), (1.152) и соответствует кривой *1* на рис. 1.15. Сравнение кривых *1* и *2* на рис. 1.17, а также сопоставление формул (1.177) и (1.184) с формулами (1.130), (1.152) позволяют оценить потери из-за незнания начальной фазы радиосигнала (1.185). Проигрыш в эффективности обнаружения разрывного радиосигнала с неизвестным временны́м положением из-за незнания начальной фазы растет с увеличением отношения сигнал-шум.

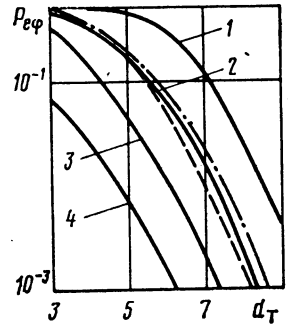


Рис. 1.17. Средняя вероятность ошибки для разрывного радиосигнала

Оценим далее проигрыш в эффективности обнаружения сигнала (1.185) из-за незнания его временно́го положения. При обнаружении радиосигнала, у которого неизвестна только начальная фаза, вероятности ошибок [42]

$$\alpha_{z\varphi} = \exp(-u^2/2);\ \beta_{z\varphi} = 1 - Q(d_T,\ u). \qquad (1.187)$$

Зависимость средней вероятности ошибки от отношения сигнал-шума рассчитанная по (1.187), представлена на рис. 1.17 кривой *3*. Из сравнения кривых *1* и *3* рис. 1.17 следует, что проигрыш в эффективности обнаружения сигнала (1.185) из-за незнания временно́го положения может быть значительным, причем этот проигрыш возрастает с увеличением отношения сигнал-шум. Кривой *4* на рис. 1.17 представлена зависимость средней вероятности ошибки при обнаружении сигнала, все параметры которого известны (1.77), (1.78). Сравнение

кривых *1* –*4* позволяет оценить потери в эффективности обнаружения из-за незнания неэнергетического параметра и начальной фазы разрывного радиосигнала. Как следует из рассмотрения кривых рис. 1.17, эти потери могут быть значительными.

Сравним теперь вероятности ошибок при некогерентном обнаружении разрывного радиосигнала (1.185) с вероятностями ошибок при некогерентном обнаружении дифференцируемого радиосигнала с неизвестным временным положением. В качестве примера такого сигнала удобно использовать радиоимпульс с колокольной огибающей

$$s(t;\ \tau,\ \varphi) = a_1 \exp\left[-(t-\tau)^2/\Delta_1^2\right] \cos(\omega_0 t - \varphi), \qquad (1.188)$$

эквивалентная длительность которого равна (1.157). Пусть отношение сигнал-шум d_T и эквивалентная длительность Δ_E (1.156) для сигналов (1.185) и (1.188) одинаковы. Тогда вероятности ошибок при обнаружении сигнала (1.188) на фоне белого шума можно получить из (1.112), (1.113), если положить в них $\xi_\varphi = m\sqrt{\pi/2}$.

На рис. 1.17 штрихпунктиром представлена зависимость средней вероятности ошибки некогерентного обнаружения дифференцируемого радиосигнала с неизвестным временным положением при $m = 10$; $p_0 = p_1 = 1/2$; $u = d_T/2$. Из сравнения кривой *1* и штрихпунктирной кривой на рис. 1.17 и сопоставления (1.177), (1.184) с (1.112), (1.113) следует, что незнание временного положения разрывного радиосигнала приводит к бо́льшим потерям в эффективности обнаружения, чем незнание временного положения дифференцируемого радиосигнала. При этом относительные потери в эффективности обнаружения разрывного радиосигнала (1.185) из-за незнания его временного положения по сравнению с обнаружением дифференцируемого радиосигнала (1.188) возрастают с увеличением отношения сигнал-шум.

При обнаружении радиосигнала (1.185) приближенные значения вероятностей ошибок можно также найти, предполагая, что неизвестное временное положение радиосигнала принимает одно из m дискретных значений [14, 53]. При таком подходе вероятности ошибок определяются формулами (1.117), где следует положить $m = T_0/\Delta_0$. Рассчитанная по этим формулам средняя вероятность ошибки нанесена на рис. 1.17 штриховой линией. Из сравнения кривой *1* и штриховой кривой и сопоставления (1.177), (1.184) с (1.117) следует, что расчет по (1.117) приводит к значениям средней вероятности ошибки, существенно меньшим, чем расчет по (1.177) и (1.184). При этом точность формул (1.177), (1.184) растет с увеличением u, m и d_T, в то время как поведение точности приближенных формул (1.117), полученных на основе искусственного сведения аналоговой системы к дискретной, неизвестно.

Кроме прямоугольного импульса и перечисленных в п. 1.3.1 примеров к разрывным сигналам часто можно отнести сложные дискретные сигналы, которые находят широкое применение в различных приложениях [9, 42, 52]. Дискретные сигналы строятся следующим образом. Отрезок времени T_1 (длительность сигнала) разбивается на N позиций (посылок) длительностью $\Delta = T_1/N$ каждая.

На i-й позиции формируется колебание $a_i \exp(j\psi_i)$, где a_i и ψ_i — заранее выбранные амплитуда и фаза колебания высокой частоты. Наборы a_i и ψ_i ($i = \overline{1, N}$) образуют коды, которые выбираются так, чтобы обеспечить сигнальную функцию с нужными свойствами. В зависимости от ограничений, наложенных на a_i и ψ_i, получаются различные классы сигналов. Например, если все $a_i = \text{const}$, а ψ_i могут принимать лишь два значения (обычно 0 и π или $-\pi/2$ и $\pi/2$), то получается класс сигналов, называемый классом ФМ (фазоманипулированных сигналов). Сравнительная простота реализации фазового кодирования и выгоды, связанные с постоянством амплитуды при усилении по мощности, обеспечили ФМ сигналам широкое применение.

В общем случае ФМ сигнал можно представить в виде [52]

$$s(t, \psi) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} a_0 \operatorname{rect}\left[\frac{t-(k-1/2)\Delta}{\Delta}\right] \cos(\omega_0 t + \varphi_k - \psi), & 0 \leqslant t \leqslant N\Delta; \\ 0, & t < 0,\ t > N\Delta, \end{cases} \tag{1.189}$$

где

$$\operatorname{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1/2; \\ 0, & |x| > 1/2; \end{cases} \tag{1.190}$$

a_0, ω_0 и φ — амплитуда, несущая частота и начальная фаза сигнала; $\psi_k = (\pi/2)d_k$, $d_k = 1$ или $d_k = -1$; набор $\{d_k\}$, $k = \overline{1, N}$, образует кодовую последовательность, соответствующую манипуляции фазы на π. Для сигналов (1.189) принимаемых на фоне белого шума, характерны, во-первых, недифференцируемость огибающей сигнальной функции (1.112); во-вторых, наличие у нее побочных максимумов.

Рассмотрим обнаружение ФМ сигнала с неизвестным временным положением, полагая, что значения побочных максимумов огибающей сигнальной функции не превышают 0,2 значения главного максимума. Для большинства ФМ сигналов, используемых в различных приложениях, это условие выполняется. Тогда аналогично п. 1.2.2 можно показать, что наличие побочных максимумов у огибающей сигнальной функции оказывает незначительное влияние на характеристики обнаружения, если только априорный интервал T_0 определения неизвестного временно́го положения сигнала не слишком мал, другими словами, если выполняется условие $T_0 \gg \Delta$. При этих предположениях для расчета характеристик обнаружения ФМ сигнала достаточно знать поведение нормированной огибающей его сигнальной функции в пределах главного лепестка, где она совпадает с автокорреляционной функцией кодовой последовательности [52]

$$G(\tau) = \frac{1}{N}\left[\frac{|\tau|}{\Delta}\sum_{k=2}^{N} d_k d_{k-1} + \left(1 - \frac{|\tau|}{\Delta}\right)\sum_{k=1}^{N} d_k^2\right], \quad |\tau| \leqslant \Delta.$$

Учитывая, что $\sum_{k=1}^{N} d_k^2/N = 1$, перепишем это выражение в более удобной форме

$$G(\tau) = 1 - |\tau|/\Delta\chi, \quad |\tau| \leqslant \Delta, \tag{1.191}$$

где

$$\chi = \left(1 - \frac{1}{N}\sum_{k=2}^{N} d_k d_{k-1}\right)^{-1} \tag{1.192}$$

Согласно (1.191), (1.186) огибающая сигнальной функции при приеме ФМ сигналов совпадает по форме с огибающей сигнальной функции для радиоимпульса с прямоугольной огибающей. Следовательно, для расчета характеристик обнаружения ФМ сигнала с неизвестным временным положением можно использовать формулы (1.177), (1.184). Достаточно подставить в эти формулы значение параметра $m = T_0/\Delta\chi$ и отношение сигнал-шум $d_T^2 = NE_1/N_0$, где E_1 — энергия одной посылки ФМ сигнала. Таким образом, если используется достаточно хорошая кодовая последовательность, для которой уровень боковых лепестков автокорреляционной функции не превышает 0,2 значения главного максимума, то характеристики обнаружения ФМ сигнала с неизвестным временным положением такие же, как для прямоугольного радиоимпульса с энергией $E' = NE_1$ и длительностью $\Delta' = \Delta\chi$. Если же уровень боковых лепестков превышает указанное значение, то (1.186) определяет верхнюю границу вероятности пропуска ФМ сигнала.

1.3.4. Результаты моделирования обнаружения разрывных сигналов на ЭВМ

С целью установления границ применимости найденных асимптотически точных формул для характеристик обнаружения приемника максимального правдоподобия, а также для исследования байесовского обнаружителя было выполнено моделирование алгоритмов обнаружения разрывного сигнала на ЭВМ.

При моделировании байесовского обнаружителя (1.5) разрывного сигнала с одним неизвестным параметром ϑ предполагалось, что априорное распределение параметра постоянно в интервале Θ, априорные вероятности наличия и отсутствия сигнала $p_0 = p_1 = 1/2$, сигнальная функция имеет треугольную форму (1.154), а порог $c^* = 1$ в соответствии с критерием идеального наблюдателя. Одновременно выполнялось моделирование приемника максимального правдоподобия (1.19), асимптотически оптимального при обнаружении дифференцируемого сигнала. Таким образом, при моделировании приемника максимального правдоподобия нормированный порог $u = d_T/2$ выбирался оптимальным по критерию идеального наблюдателя для сигнала, все параметры которого известны.

В результате моделирования определялась средняя вероятность ошибки $P_e' = (\alpha' + \beta')/2$ для байесовского обнаружителя и $P_e = (\alpha + \beta)/2$ для обнаружителя максимального правдоподобия. Моделирование шумовой гауссовской функции $N(\vartheta)$ с треугольной функцией корреляции (1.154) осуществлялось так, как это описано в [37]. Объем экспериментальной выборки при моделировании удваивался до получения двух устойчивых значащих цифр в $P_e'(d_T)$ и $P_e(d_T)$. Экспериментальные значения средней вероятности ошибки представлены на рис. 1.18. Штриховой линией на рисунке нанесены предполагаемые зависимости $P_e'(d_T)$. Сплошными кривыми представлены зависимости $P_e(d_T)$ для приемника максимального правдоподобия (1.19), рассчитанные по формулам (1.130), (1.152). Для некоторых значений d_T полученные при моделировании значения P_e' и P_e приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

d_T	$m=5$		$m=10$		$m=20$	
	P_e	P_e'	P_e	P_e'	P_e	P_e'
3	0,38	0,20	0,47	0,30	0,50	0,40
4	0,23	0,082	0,35	0,14	0,45	0,24
5	0,098	0,03	0,18	0,047	0,28	0,11
6	0,029	0,007	0,055	0,014	0,10	0,026

Результаты математического моделирования приемника максимального правдоподобия подтверждают возможность использования найденных асимпто-

тически точных формул (1.130), (1.152) для расчета характеристик обнаружения при $d_T \geqslant 1 \div 2$. Кроме того, из рис. 1.18 и табл. 1.2 видим, что байесовский алгоритм обнаружения приводит к заметно меньшей средней вероятности ошибки, чем обнаружитель максимального правдоподобия. Байесовский обнаружитель (см. рис. 1.) обладает несколько более сложной структурой, чем обнаружитель максимального правдоподобия (см. рис. 1.2). Поэтому целесообразность практического использования байесовского обнаружителя определяется обеспечиваемым выигрышем в эффективности обнаружения.

Кроме того, выполнялось (совместно с Ю. С. Радченко) моделирование приемника максимального правдоподобия разрывного сигнала с одним неизвестным параметром при выборе порога в соответствии с критерием Неймана—Пирсона по формуле (1.130). Экспериментальные значения вероятностей ложной тревоги

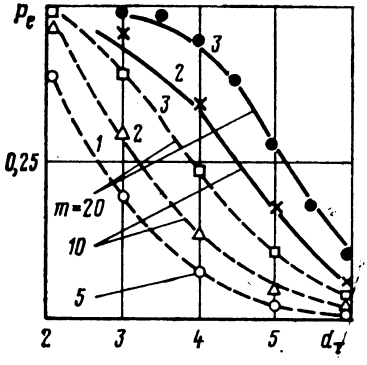


Рис. 1.18. Экспериментальные значения средней вероятности ошибки

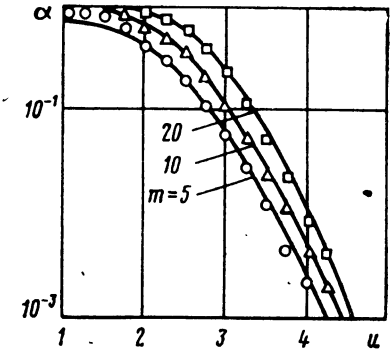


Рис. 1.19. Вероятность ложной тревоги

α и пропуска сигнала β определялись при различных значениях u, m и d_T. Эти экспериментальные значения приведены на рис. 1.19 и 1.20, где нанесены также теоретические зависимости, рассчитанные по формулам (1.130), (1.152). При моделировании объем экспериментальной выборки задавался таким образом, чтобы с вероятностью 0,9 границы доверительного интервала отклонялись от экспериментальных значений не более чем на 15%. Следует отметить удовлетворительную аппроксимацию экспериментальных зависимостей асимптотически точными формулами (1.130), (1.152) уже при $m \geqslant 5$, $u \geqslant 1 \div 2$, $d_T > 1 \div 2$.

Экспериментальная проверка точности приближенных формул для характеристик некогерентного обнаружения разрывного радиосигнала проводилась на примере обнаружения сигнала (1.185) на фоне белого шума. С этой целью моделировались реализации выходного сигнала приемника максимального правдоподобия $R(\hat{\theta})$ (1.160) при наличии и отсутствии полезного сигнала. Абсолютный максимум реализации $R(\hat{\theta})$ сравнивался с порогом, определяемым по критерию Неймана—Пирсона из формулы (1.177). Экспериментальные значения вероятностей ложной тревоги α_φ и пропуска сигнала β_φ определялись при различных значениях u, m и d_T. Эти экспериментальные значения приведены на рис. 1.21, 1.22, где также нанесены теоретические зависимости, рассчитанные по формулам (1.177), (1.184). При моделировании объем экспериментальной выборки задавался таким образом, чтобы с вероятностью 0,9 границы доверительного интервала отклонялись от экспериментальных значений не более чем на 15%. Следует отметить удовлетворительную аппроксимацию экспериментальных зависимостей асимптотически точными формулами (1.177), (1.184) уже при $m \geqslant 5$, $u \geqslant 2$, $d_T \geqslant 1 \div 2$.

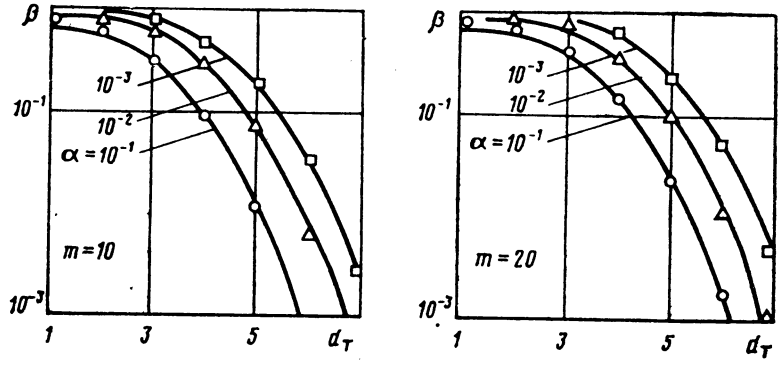


Рис. 1.20. Вероятность пропуска сигнала

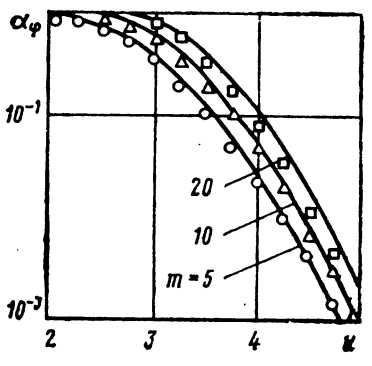


Рис. 1.21. Вероятность ложной тревоги при обнаружении радиосигнала

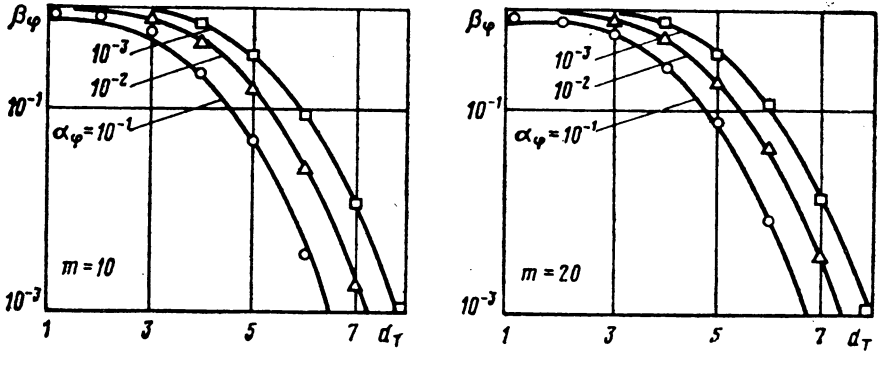


Рис. 1.22. Вероятность пропуска радиосигнала

1.4. Характеристики обнаружения сигналов с неизвестной энергией

1.4.1. Сигнал с неизвестным энергетическим параметром

Простейшим энергетическим параметром является амплитуда, поскольку она входит в сигнал линейно. При обнаружении сигнала, единственным неизвестным параметром которого является амплитуда, асимптотически оптимальный алгоритм обнаружения определяется из (1.42). Найдем вероятности ошибок в этом случае. Если полезный сигнал на входе приемника отсутствует, то согласно (1.34) $a_m d_1 = N$, где N — гауссовская случайная величина с параметрами распределения (0, 1). Следовательно, вероятность ложной тревоги

$$\alpha = P[a_m d_1 > c] = P[N > c] = 1 - \Phi(c), \tag{1.193}$$

где $\Phi(\cdot)$ — интеграл вероятности (1.76).

При наличии сигнала на входе приемника $a_m d_1 = a_0 d_1 + N$, так что условная вероятность пропуска сигнала $a_0 s_1(t)$ равна

$$\beta(a_0) = 1 - \Phi(a_0 d_1 - c), \tag{1.194}$$

а безусловная определяется выражением

$$\beta = 1 - \int \Phi(a d_1 - c) W(a) da. \tag{1.195}$$

Соответственно при использовании асимптотически байесовского обнаружителя (1.41) и равных вероятностях наличия и отсутствия сигнала ($p_0 = p_1$) средняя условная вероятность ошибки

$$P_e(a_0) = 1 - [\Phi(\sqrt{2 \ln d_1}) + \Phi(a_0 d_1 - \sqrt{2 \ln d_1})]/2. \tag{1.196}$$

Безусловную среднюю вероятность ошибки получаем, усредняя $P_e(a_0)$ по a_0 с весом $W(a_0)$.

Предельная форма оптимального обнаружителя (1.42) и его характеристики (1.193)—(1.196) получены для случая, когда априори известно, что $a \geqslant 0$. Если предположить, что полезный сигнал $a s_1(t)$ известен с точностью до множителя a, который может менять знак (т. е. возможны значения $a < 0$), то асимптотически байесовский алгоритм обнаружения имеет вид [48]: принимается решение о наличии сигнала, если $d_1^2 a_m^2 > 2 \ln d_1$. В этом случае средняя условная вероятность ошибки при $p_0 = p_1$ запишется как

$$\widehat{P}_e(a_0) = 1 - \Phi(\sqrt{2 \ln d_1}) + \frac{1}{2}[\Phi(a_0 d_1 + \sqrt{2 \ln d_1}) - \Phi(a_0 d_1 - \sqrt{2 \ln d_1})].$$

Чтобы оценить влияние незнания амплитуды сигнала на эффективность обнаружения, предположим, что амплитуда обнаруживаемого сигнала $a_0 = 1$, так что $d_1 = d_T$ — отношение сигнал-шум для принятого сигнала. Тогда при использовании обнаружителя (1.41), асимптотически байесовского для обнаружения сигнала с априори неизвестной положительной амплитудой, средняя условная вероятность ошибки

$$P_1 = P_e(a_0 = 1) = 1 - [\Phi(\sqrt{2 \ln d_T}) + \Phi(d_T - \sqrt{2 \ln d_T})]/2. \tag{1.197}$$

В приемнике, асимптотически байесовском для сигнала, неизвестный множитель перед которым может менять знак,

$$P_2 = \widehat{P}_e(a_0 = 1) = 1 - \Phi(\sqrt{2 \ln d_T}) + [\Phi(d_T + \sqrt{2 \ln d_T}) - \Phi(d_T - \sqrt{2 \ln d_T})]/2. \tag{1.198}$$

Наконец, при априори известной амплитуде, когда обнаружение выполняется в соответствии с критерием идеального наблюдателя и $p_0 = p_1$, средняя вероятность ошибки определяется из (1.93). Зависимость $P_e^*(d_T)$ (1.93) нанесена на

рис. 1.23 штрихпунктиром, зависимость (1.197) — сплошной и зависимость (1.198) — штриховой линиями. Кривые рис. 1.23 показывают, насколько снижается эффективность обнаружения, если априори неизвестна амплитуда сигнала. При этом наибольшие потери в эффективности обнаружения имеют место, если неизвестный множитель a может менять знак.

Пусть теперь реализация наблюдаемых данных при наличии сигнала имеет вид (1.43), т. е. полезный сигнал кроме неизвестной амплитуды содержит μ неизвестных неэнергетических параметров ϑ. Асимптотически оптимальный алгоритм обнаружения при этом определяется из (1.45), (1.47). При отсутствии полезного сигнала согласно (1.47) асимптотически оптимальный обнаружитель вырабатывает величину $\max N(\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$, где $N(\vartheta)$ — нормированная шумовая функция. Приближенное выражение для распределения абсолютного максимума реализации шумовой функции определяется формулой (1.59). Следовательно, при обнаружении сигнала с неизвестными амплитудой и μ неэнергетическими параметрами вероятность ложной тревоги можно рассчитать по приближенной формуле (1.62), если в ней нормированный порог u заменить на порог c (1.45).

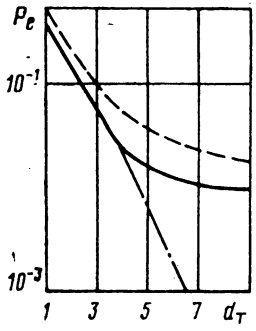


Рис. 1.23. Средняя вероятность ошибки для сигнала с неизвестной амплитудой

При наличии полезного сигнала выходной эффект асимптотически оптимального обнаружителя $d_1^{-1} L_{z1}(\vartheta) = a_0 d_1 S(\vartheta_0, \vartheta) + N(\vartheta)$. Обозначая аналогично (1.12) $a_0^2 d_1^2 = d_T^2$ — отношение сигнал-шум для принятого сигнала, получаем, что $L_{z1}(\vartheta)/d_1 = L_z(\vartheta)/d_T$, где $L_z(\vartheta)$ определяется формулой (1.54). Следовательно, условная вероятность пропуска $\beta(a_0)$ сигнала $a_0 s(t, \vartheta_0)$ при больших значениях $d_T^2 = a_0^2 d_1^2$ определяется формулой (1.73) при подстановке в нее $u = c$, $d_T^2 = a_0^2 d_1^2$.

Найдем характеристики обнаружения сигнала $s(t, \vartheta)$, содержащего произвольный энергетический параметр ϑ, $\vartheta \in [\Theta_1; \Theta_2]$. Поскольку в общем случае сигнал является нелинейной функцией ϑ, будем считать, что $s(t, \vartheta)$ имеет необходимое число непрерывных производных по ϑ. При этих предположениях асимптотически оптимальный обнаружитель согласно (1.53) должен вырабатывать функцию

$$L(\vartheta) = \int_0^T x(t) V(t, \vartheta)\, dt - \int_0^T s(t, \vartheta) V(t, \vartheta)\, dt/2 \qquad (1.199)$$

для всех $\vartheta \in [\Theta_1, \Theta_2]$ и принимать решение о наличии сигнала, если $\max L(\vartheta) > c$. Здесь $V(t, \vartheta)$ — решение уравнения (1.11).

При отсутствии полезного сигнала на входе приемника

$$L(\vartheta) = L_0(\vartheta) = \widehat{N}(\vartheta) - \int_0^T s(t, \vartheta) V(t, \vartheta)\, dt/2,$$

где $\widehat{N}(\vartheta)$ — ненормированная шумовая функция (1.13). Для сигнала с неизвестным энергетическим параметром шумовая функция $\widehat{N}(\vartheta)$ представляет собой реализацию нестационарного гауссовского случайного процесса, для которого

$$\mathrm{M}\left[\widehat{N}(\vartheta)\right] = 0;\ \mathrm{M}\left[\widehat{N}(\vartheta_1)\,\widehat{N}(\vartheta_2)\right] = \int_0^T s(t, \vartheta_1) V(t, \vartheta_2)\, dt = \widehat{S}(\vartheta_1, \vartheta_2). \qquad (1.200)$$

Следовательно, $L_0(\vartheta)$ — также реализация нестационарного гауссовского случайного процесса со средним значением

$$\mathrm{M}[L_0(\vartheta)] = -\widehat{S}(\vartheta, \vartheta)/2 \qquad (1.201)$$

и функцией корреляции (1.200). Согласно (1.53) определение вероятности ложной тревоги сводится к нахождению вероятности превышения порога c реализацией выходного сигнала оптимального приемника $L_0(\vartheta)$ при $\vartheta \in [\Theta_1; \Theta_2]$. Точных методов расчета этой вероятности пока неизвестно. Можно лишь получить ее приближенное значение для больших порогов c.

Обозначим $\pi(c, \vartheta)d\vartheta$ среднее число выбросов реализации $L_0(\vartheta)$ за уровень c в элементарном интервале $[\vartheta; \vartheta + d\vartheta]$. Если порог c достаточно велик, т. е. $c \gg \sqrt{\widehat{S}(\vartheta, \vartheta)}$, $\vartheta \in [\Theta_1; \Theta_2]$, то поток выбросов реализации $L_0(\vartheta)$ за уровень c можно приближенно считать пуассоновским. К тому же при этих условиях выбросы на различных элементарных интервалах можно приближенно считать статистически независимыми [25, 33, 43]. Следовательно, вероятность непревышения порога c приближенно равна

$$P[L_0(\vartheta) < c] \simeq \exp\left[-\int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \pi(c, \vartheta)\, d\vartheta\right],$$

так что вероятность ложной тревоги при обнаружении сигнала с неизвестным энергетическим параметром определяется выражением

$$\alpha \simeq 1 - \exp\left[-\int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \pi(c, \vartheta)\, d\vartheta\right]. \qquad (1.202)$$

Найдем $\pi(c, \vartheta)$. Общая формула для среднего числа выбросов нестационарного гауссовского случайного процесса за фиксированный уровень получена в [42, 43]. Учитывая (1.200), (1.201) и обозначая

$$\widehat{S}_{ij} \equiv \widehat{S}_{ij}(\vartheta) = \left[\partial^{i+j}\widehat{S}(\vartheta_1, \vartheta_2)/\partial\vartheta_1^i\, \partial\vartheta_2^j\right]_{\vartheta_1=\vartheta_2=\vartheta},$$

находим

$$\pi(c, \vartheta) = \frac{\sqrt{\widehat{S}_{00}\widehat{S}_{11} - \widehat{S}_{01}^2}}{2\pi\widehat{S}_{00}} \exp\left[-\frac{(c+\widehat{S}_{00}/2)^2}{2\widehat{S}_{00}}\right] \times$$

$$\times \left\{\exp\left[-\frac{\widehat{S}_{01}^2(c-\widehat{S}_{00}/2)^2}{2\widehat{S}_{00}(\widehat{S}_{00}\widehat{S}_{11} - \widehat{S}_{01}^2)}\right] + \frac{\widehat{S}_{01}(c-\widehat{S}_{00}/2)\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\widehat{S}_{00}(\widehat{S}_{00}\widehat{S}_{11} - \widehat{S}_{01}^2)}} \times \right.$$

$$\left. \times \Phi\left[\frac{\widehat{S}_{01}(c-\widehat{S}_{00}/2)}{\sqrt{\widehat{S}_{00}(\widehat{S}_{00}\widehat{S}_{11} - \widehat{S}_{01}^2)}}\right]\right\}.$$

Подставляя это выражение в (1.202), получаем приближенное значение вероятности ложной тревоги. Заметим, что при приеме сигнала с неизвестным неэнергетическим параметром формула (1.202) переходит в (1.90). Действительно, в силу известных свойств сигнальной функции неэнергетического параметра [27] $\widehat{S}_{01} = 0$, $\widehat{S}_{00} = d_T^2$, $\widehat{S}_{11}$ не зависит от ϑ. Полагая $\xi = (\Theta_2 - \Theta_1)\sqrt{\widehat{S}_{11}}/d_T$; $c = ud_T - d_T^2/2$, получаем, что (1.202) совпадает в этом частном случае с (1.90).

Найдем вероятность пропуска сигнала. При наличии сигнала на входе приемника

$$L(\vartheta) = L_1(\vartheta) = \widehat{S}(\vartheta_0, \vartheta) + \widehat{N}(\vartheta) - \int_0^T s(t, \vartheta)\, V(t, \vartheta)\, dt/2,$$

где ϑ_0 — истинное значение неизвестного параметра принятого сигнала. Как и ранее (1.12), $d_T^2 = \widehat{S}(\vartheta_0, \vartheta_0)$ — отношение сигнал-шум для принятого сигнала. Согласно (1.53) решение об отсутствии сигнала принимается, если $\max L(\vartheta) = L(\vartheta_m) < c$, $\vartheta \in [\Theta_1; \Theta_2]$. Здесь ϑ_m — положение абсолютного максимума $L(\vartheta)$, т. е. при наличии сигнала, ϑ_m — оценка максимального правдоподобия параметра ϑ_0. В [27] показано, что при $d_T \to \infty$ имеем $\vartheta_m \to \vartheta_0$, так что при достаточно больших отношениях сигнал-шум можно положить

$$L_1(\vartheta_m) \simeq L_1(\vartheta_0) = \widehat{N}(\vartheta_0) + d_T^2/2.$$

Поскольку $\widehat{N}(\vartheta_0)$ — гауссовская случайная величина с нулевым средним значением и дисперсией d_T^2, то вероятность пропуска

$$\beta(\vartheta_0) \simeq \Phi(c/d_T - d_T/2). \qquad (1.203)$$

Таким образом, при обнаружении сигнала с неизвестным энергетическим параметром вероятности ошибок могут быть приближенно рассчитаны по формулам (1.202), (1.203). Точность этих формул возрастает с увеличением c и d_T.

1.4.2. Разрывный сигнал с неизвестной длительностью

Если полезный сигнал недифференцируем по неизвестному энергетическому параметру, то полученные формулы для вероятностей ошибок неприменимы. Примером недифференцируемого (разрывного) сигнала может служить прямоугольный импульс. Рассмотрим обнаружение прямоугольного импульса

$$s(t, \Delta_0) = \begin{cases} a_0, & 0 \leqslant t \leqslant \Delta_0; \\ 0, & t < 0, \quad t > \Delta_0, \end{cases} \qquad (1.204)$$

на фоне белого шума с двусторонней спектральной плотностью N_0. Полагаем, что неизвестная длительность Δ сигнала (1.204) принимает значения из априорного интервала $[T_1; T_2]$, а для обнаружения сигнала используется приемник максимального правдоподобия (1.53). Как уже отмечалось выше (п. 1.3.1), вопрос об асимптотической оптимальности приемника максимального правдоподобия для недифференцируемых сигналов остается открытым.

В соответствии с определением рассмотренный приемник вырабатывает логарифм ФОП (1.9)

$$L(\Delta) = \frac{a_0}{N_0} \int_0^{\Delta} x(t)\, dt - \frac{a_0^2 \Delta}{2N_0} \qquad (1.205)$$

для всех $\Delta \in [T_1; T_2]$ и принимает решение о наличии сигнала, когда $L(\Delta_m) = \max L(\Delta) > c$, $\Delta \in [T_1; T_2]$. Реализация приемника максимального правдоподобия для сигнала (1.204) относительно проста, поскольку $L(\Delta)$ в форме (1.205) может быть получена как непрерывная функция Δ. Действительно, $L(\Delta)$ можно интерпретировать как сигнал на выходе интегратора, на вход которого подается разность $a_0[x(t) - a_0/2]/N_0$. Заметим, что для обнаружения сигналов с неизвестной длительностью более сложной формы, чем (1.204), необходимо в общем случае использовать многоканальные приемники [27].

Найдем вероятности ошибок 1-го и 2-го рода при обнаружении сигнала (1.204) приемником максимального правдоподобия. При отсутствии сигнала на входе приемника

$$L(\Delta) = (a_0/N_0) \int_0^{\Delta} n(t)\, dt - a_0^2\, \Delta/(2N_0).$$

Обозначим

$$d_m^2 = a_0^2\, T_2/N_0 \tag{1.206}$$

максимальное отношение сигнал-шум и перейдем к нормированному логарифму функционала отношения правдоподобия $m(\Delta) = L(\Delta)/d_m = N(\Delta) - \Delta d_m/(2T_2)$. Решение о наличии сигнала принимается, когда $\max m(\Delta) > u_0$, $\Delta \in [T_1; T_2]$, $u_0 = c/d_m$ — нормированный порог. Следовательно, вероятность ложной тревоги $\alpha = P[\max m(\Delta) > u_0]$, или

$$\alpha = 1 - P_0(u_0), \tag{1.207}$$

где

$$P_0(u_0) = P[u_0 - m(\Delta) > 0] = P[\mu(\Delta) > 0]. \tag{1.208}$$

Поскольку $\mu(\Delta) = u_0 - m(\Delta)$ — реализация марковского процесса с коэффициентами сноса и диффузии

$$K_1 = d_m/(2T_2); \quad K_2 = 1/T_2, \tag{1.209}$$

то вероятность (1.206) определяется соотношением [41, 42]

$$P_0(u_0) = \int_0^{\infty} W(\mu, T_2)\, d\mu. \tag{1.210}$$

Здесь $W(\mu, T_2)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial W(\mu, \Delta)}{\partial \Delta} + \frac{\partial}{\partial \mu}[K_1 W(\mu, \Delta)] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \mu^2}[K_2 W(\mu, \Delta)] = 0 \tag{1.211}$$

при граничных условиях

$$W(\mu, \Delta)|_{\mu=0} = W(\mu, \Delta)|_{\mu=\infty} = 0 \tag{1.212}$$

и начальном условии

$$W(\mu, \Delta)|_{\Delta=T_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_1}} \exp\left[-\frac{(\mu - u_0 - \eta_1 d_m/2)^2}{2\eta_1}\right], \quad \mu \geqslant 0, \tag{1.213}$$

где $\eta_1 = T_1/T_2$. Применяя метод отражения с переменой знака [45], получаем решение уравнения (1.211) при коэффициентах (1.209) в виде

$$W(\mu, \Delta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\eta_1 \nu}} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{(x - u_0 - \eta_1 d_m/2)^2}{2\eta_1}\right] \times$$
$$\times \left\{\exp\left[-\frac{(x - \mu + \nu d_m/2)^2}{2\nu}\right] - \right.$$
$$\left. - \exp\left[-x d_m - \frac{(x + \mu - \nu d_m/2)^2}{2\nu}\right]\right\} dx, \tag{1.214}$$

$\nu = (\Delta - T_1)/T_2$. Подставляя (1.214) при $\Delta = T_2$ в (1.210), а (1.210) в (1.207), находим вероятность ложной тревоги при обнаружении сигнала с неизвестной длительностью

$$\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_1}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x-u_0-\eta_1 d_m/2)^2}{2\eta_1}\right] \times$$

$$\times \left\{\Phi\left(\frac{d_m}{2}\sqrt{1-\eta_1} + \frac{x}{\sqrt{1-\eta_1}}\right) -\right.$$

$$\left. - \exp(-x d_m)\,\Phi\left(\frac{d_m}{2}\sqrt{1-\eta_1} - \frac{x}{\sqrt{1-\eta_1}}\right)\right\} dx. \qquad (1.215)$$

Эта формула несколько упрощается при $\eta_1 = 0$, т. е. когда неизвестная длительность сигнала может принимать значения из интервала $[0;\ T_2]$:

$$\alpha = 1 - \Phi(u_0 + d_m/2) + \exp(-u_0 d_m)\,[1 - \Phi(u_0 - d_m/2)]. \qquad (1.216)$$

Если $T_1 \to T_2$, т. е. априорный интервал определения неизвестной длительности стягивается в точку, то $\eta_1 \to 1$ и из (1.215) имеем

$$\alpha = \alpha_z = 1 - \Phi(u_0 + d_T/2), \qquad (1.217)$$

что совпадает с вероятностью ложной тревоги при обнаружении сигнала с априори известной длительностью [1, 29, 42].

Общее выражение для вероятности ложной тревоги довольно громоздко, поэтому может оказаться целесообразным использование асимптотической формулы, справедливой при больших отношениях сигнал-шум d_m:

$$\alpha \simeq 1 - \Phi(u_0 + d_m/2) - \exp(-u_0 d_m)\,\Phi(u_0 - d_m/2) +$$

$$+ \exp(-u_0 d_m)\,\Phi(u_0/\sqrt{\eta_1} - d_m\sqrt{\eta_1}/2) - \Phi(u_0/\sqrt{\eta_1} + d_m\sqrt{\eta_1}/2) +$$

$$+ \Phi(u_0/\sqrt{\eta_1} + d_m/2\sqrt{\eta_1}). \qquad (1.218)$$

Перейдем к определению вероятности пропуска сигнала $\beta(\Delta_0)$. При наличии на входе приемника сигнала (1.204) нормированный логарифм ФОП

$$m(\Delta) = L(\Delta)/d_m = \frac{d_m}{T_2}\left[\min(\Delta, \Delta_0) - \frac{\Delta}{2}\right] + N(\Delta). \qquad (1.219)$$

По определению $\beta(\Delta_0) = P[\max m(\Delta) < u_0] = P[\mu(\Delta) > 0]$, где $\mu(\Delta)$ — реализация марковского процесса с коэффициентами сноса и диффузии

$$K_1 = \frac{d_m}{2T_2}\begin{cases} -1, & T_1 \leqslant \Delta < \Delta_0; \\ 1 & \Delta_0 < \Delta \leqslant T_2; \end{cases} \qquad K_2 = \frac{1}{T_2}. \qquad (1.220)$$

Аналогично (1.210)

$$\beta(\Delta_0) = \int_0^\infty W_1(\mu, T_2)\, d\mu,$$

где $W_1(\mu, T_2)$ — решение уравнения (1.211) с граничными условиями (1.212) и с начальным условием

$$W_1(\mu, \Delta)|_{\Delta=T_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_1}} \exp\left[-\frac{(\mu-u_0+\eta_1 d_m/2)^2}{2\eta_1}\right], \quad \mu \geqslant 0,$$

при коэффициентах сноса и диффузии (1.220). Опять используя для решения уравнения (1.211) метод отражения с переменой знака [45], находим, что

$$\beta(\Delta_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_0}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x+\eta_0 d_m/2)^2+u_0^2-\eta_0 u_0 d_m}{2\eta_0}\right] \times$$

$$\times \left\{\exp\left(\frac{u_0 x}{\eta_0}\right) \Phi\left(u_0 \sqrt{\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_1\eta_0}} + x\sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_0(\eta_0-\eta_1)}}\right) - \right.$$

$$\left. - \exp\left(-\frac{u_0 x}{\eta_0}\right) \Phi\left(u_0 \sqrt{\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0\eta_1}} - x\sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_0(\eta_0-\eta_1)}}\right)\right\} \times$$

$$\times \left\{\Phi\left(\frac{d_m}{2}\sqrt{1-\eta_0} + \frac{x}{\sqrt{1-\eta_0}}\right) - \right.$$

$$\left. - \exp(-x d_m) \Phi\left(\frac{d_m}{2}\sqrt{1-\eta_0} - \frac{x}{\sqrt{1-\eta_0}}\right)\right\} dx, \qquad (1.221)$$

где $\eta_0 = \Delta_0/T_2$. Эта формула несколько упрощается при $\eta_1 = 0$:

$$\beta(\Delta_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi\eta_0}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x+\eta_0 d_m/2)^2+u_0^2-u_0\eta_0 d_m}{2\eta_0}\right] \operatorname{sh}\left(\frac{u_0 x}{\eta_0}\right) \times$$

$$\times \left[\Phi\left(\frac{d_m}{2}\sqrt{1-\eta_0} + \frac{x}{\sqrt{1-\eta_0}}\right) - \right.$$

$$\left. - \exp(-x d_m) \Phi\left(\frac{d_m}{2}\sqrt{1-\eta_0} - \frac{x}{\sqrt{1-\eta_0}}\right)\right] dx. \qquad (1.222)$$

Если же $T_1 \to T_2$, т. е. $\eta_1 \to 1$ и $\eta_0 \to 1$, то для вероятности пропуска имеем

$$\beta(\Delta_0) = \beta_z = \Phi(u_0 - d_T/2), \qquad (1.223)$$

что совпадает с вероятностью пропуска при обнаружении сигнала с априори известной длительностью [1, 29, 42].

Таким образом, при обнаружении сигнала с неизвестной длительностью приемником максимального правдоподобия вероятности ошибок 1-го и 2-го рода могут быть найдены из (1.215), (1.221).

В качестве примера рассмотрим обнаружение сигнала (1.204), когда его неизвестная длительность $\Delta_0 = T_2$ ($\eta_0 = 1$), а априорный интервал определения неизвестной длительности есть $[0; T_2]$ ($\eta_1 = 0$). При использовании приемника максимального правдоподобия вероят-

ность ложной тревоги будет определяться из (1.216) при $d_m = d_T$, а выражение для вероятности пропуска сигнала (1.221) примет вид

$$\beta = \beta(\Delta_0 = T_2) = \Phi(u_0 - d_T/2) - \exp(u_0 d_T)[1 - \Phi(u_0 + d_T/2)].$$

Здесь учтено, что при $\Delta_0 = T_2$ максимальное отношение сигнал-шум $d_m = d_T$ — отношению сигнал-шум для принятого сигнала (1.12).

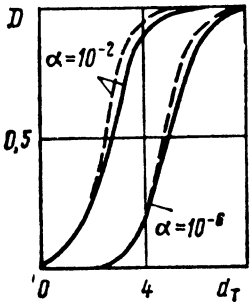


Рис. 1.24. Вероятность правильного обнаружения сигнала с неизвестной длительностью

На рис. 1.24 приведены зависимости вероятности правильного обнаружения $D = 1 - \beta$ сигнала с неизвестной длительностью (при $\Delta_0 = T_2$) от отношения сигнал-шум d_T при фиксированных значениях вероятности ложной тревоги. На этом же рисунке для сравнения нанесены штриховые кривые обнаружения для сигнала с априори известной длительностью (1.217), (1.223). Из рассмотрения кривых рис. 1.24 следует, что при $\Delta_0 = T_2$ потери в эффективности обнаружения из-за незнания длительности сигнала относительно невелики. При этом приведенная на рис. 1.24 зависимость $D(d_T)$ для приемника максимального правдоподобия при $\Delta_0 = T_2$ представляет собой верхнюю границу вероятности правильного обнаружения. С уменьшением истинного значения длительности сигнала $D(d_T)$ уменьшается и при $\Delta_0 = 0$ достигает минимального значения $D = \alpha$.

1.5. Сигнал с неизвестными неэнергетическими параметрами при многоканальном приеме

1.5.1. Каналы с постоянными параметрами

Рассмотрим задачу обнаружения ν сигналов, поступающих по различным каналам передачи информации. Эти каналы могут быть разнесены по времени, по частоте, по направлению прихода сигналов, по поляризации и т. д. Пусть на выходе i-го канала наблюдается аддитивная смесь

$$x_i(t) = s_i(t, \vartheta_0) + n_i(t), \qquad 0 < t < T,$$

сигнала и помехи или $x_i(t) = n_i(t)$, $i = \overline{1, \nu}$. Введем в рассмотрение векторы-столбцы

$$\mathbf{x}(t) = \|x_i(t)\|; \quad \mathbf{s}(t, \vartheta) = \|s_i(t, \vartheta)\|; \quad \mathbf{n}(t) = \|n_i(t)\|.$$

Тогда на входе приемника имеем вектор $\mathbf{x}(t) = \mathbf{s}(t, \vartheta_0) + \mathbf{n}(t)$, или $\mathbf{x}(t) = \mathbf{n}(t)$. Как и ранее (§ 1.2), полагаем, что полезный сигнал содержит μ неизвестных неэнергетических параметров ϑ, $\vartheta \in \Theta$, значения которых ϑ_0 одинаковы для всех компонент $s_i(t, \vartheta_0)$ вектора сигнала $\mathbf{s}(t, \vartheta_0)$. В качестве помехи будем рассматривать вектор $\mathbf{n}(t)$, все компоненты $n_i(t)$ которого являются гауссовскими стационарными и стационарно связанными случайными процессами с нулевыми средними значениями $M[n_i(t)] = 0$ и корреляционной матрицей

$$\mathbf{B}(\tau) = M[\mathbf{n}(t + \tau)\mathbf{n}^+(t)], \qquad (1.224)$$

где «+» означает транспонирование.

Так как неизвестные параметры сигнала предполагаются неэнергетическими, то приемник максимального правдоподобия должен вырабатывать функцию [54]

$$L_z(\hat{\vartheta}) = \int_0^T \mathbf{x}^+(t)\,\mathbf{V}(t, \hat{\vartheta})\,dt \tag{1.225}$$

для всех $\hat{\vartheta} \in \Theta$ и принимать решение о наличии сигнала, если $\max L_z(\hat{\vartheta}) > h$. Здесь вектор $\mathbf{V}(t, \hat{\vartheta}) = ||V_i(t, \hat{\vartheta})||$, $i = \overline{1, \nu}$, определяется из решения системы интегральных уравнений

$$\int_0^T \mathbf{B}(t-\tau)\,\mathbf{V}(\tau, \hat{\vartheta})\,d\tau = \mathbf{s}(t, \hat{\vartheta}). \tag{1.226}$$

Полагаем, что сигналы $s_i(t, \hat{\vartheta})$, $i = \overline{1, \nu}$, обладают необходимым числом непрерывных производных по всем неизвестным параметрам ϑ_k, $k = \overline{1, \mu}$, так что приемник максимального правдоподобия является асимптотически оптимальным (§ 1.1).

Подставляя в (1.225) реализацию наблюдаемых данных $\mathbf{x}(t)$, при наличии полезного сигнала получаем $L_z(\hat{\vartheta}) = d_\nu^2 S(\vartheta_0, \hat{\vartheta}) + d_\nu N(\hat{\vartheta})$, а в его отсутствие $L_z(\hat{\vartheta}) = d_\nu N(\hat{\vartheta})$. Здесь приняты обозначения

$$d_\nu^2 = \int_0^T \mathbf{s}^+(t, \hat{\vartheta})\,\mathbf{V}(t, \hat{\vartheta})\,dt; \tag{1.227}$$

$$S(\hat{\vartheta}_1, \hat{\vartheta}_2) = \int_0^T \mathbf{s}^+(t, \hat{\vartheta}_1)\,\mathbf{V}(t, \hat{\vartheta}_2)\,dt/d_\nu^2; \tag{1.228}$$

$$N(\hat{\vartheta}) = \int_0^T \mathbf{n}^+(t)\,\mathbf{V}(t, \hat{\vartheta})\,dt/d_\nu \tag{1.229}$$

— нормированные сигнальная и шумовая функции. Как и при одноканальном приеме с неизвестными неэнергетическими параметрами [27], для этих функций справедливы соотношения

$$\mathrm{M}[N(\hat{\vartheta})] = 0;\ \mathrm{M}[N(\hat{\vartheta}_1)N(\hat{\vartheta}_2)] = S(\hat{\vartheta}_1, \hat{\vartheta}_2);\ \max S(\hat{\vartheta}_1, \hat{\vartheta}_2) = S(\hat{\vartheta}, \hat{\vartheta}) = 1.$$

Нетрудно убедиться, что функции (1.228), (1.229) обладают всеми остальными свойствами сигнальной и шумовой функций на выходе оптимального приемника [27]. Следовательно, вероятности ошибок 1-го и 2-го рода при обнаружении вектора $\mathbf{s}(t, \hat{\vartheta})$ могут быть рассчитаны по (1.62) и (1.73), если в эти формулы подставить значение отношения сигнал-шум из (1.227), а при вычислении приведенного объема ξ (1.63) использовать сигнальную функцию (1.228).

Конкретизируем общие соотношения для случая, когда сигналы в различных каналах отличаются только амплитудами: $s_i(t, \hat{\vartheta}) = a_i \widehat{s}(t, \hat{\vartheta})$, так что

$$\mathbf{s}(t, \hat{\vartheta}) = ||\,a_1 a_2 \ldots a_\nu\,||^+ \widehat{s}(t, \hat{\vartheta}) = \widehat{\mathbf{a}s}(t, \hat{\vartheta}). \tag{1.230}$$

Положим также, что корреляционная матрица гауссовского шума (1.224) может быть представлена в виде

$$\mathbf{B}(\tau) = \mathbf{B}_0 \rho(\tau), \tag{1.231}$$

где $\mathbf{B}_0$ — числовая матрица, у которой на главной диагонали лежат дисперсии шума в соответствующем канале, а $\rho(\tau)$ — коэффициент корреляции помехи. При этих предположениях решение уравнения (1.226) можно записать как

$$\mathbf{V}(t, \hat{\vartheta}) = \mathbf{v}_0 V_0(t, \hat{\vartheta}). \tag{1.232}$$

Здесь $\mathbf{v}_0 = \mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{a}$, а $V_0(t, \hat{\vartheta})$ определяется из уравнения

$$\int_0^T \rho(t-\tau)\, V_0(\tau, \hat{\vartheta})\, d\tau = \widehat{s}(t, \hat{\vartheta}).$$

Подставляя (1.230) и (1.232) в (1.227) и (1.228), находим, что

$$d_{\nu}^2 = \mathbf{a}^+ \mathbf{B}_0^{-1}\, \mathbf{a}\widehat{d^2}; \tag{1.233}$$

$$S(\vartheta_1, \vartheta_2) = \int_0^T \widehat{s}(t, \vartheta_1)\, V_0(t, \vartheta_2)\, dt/\widehat{d^2}, \tag{1.234}$$

где

$$\widehat{d^2} = \int_0^T \widehat{s}(t, \hat{\vartheta})\, V_0(t, \hat{\vartheta})\, dt$$

— отношение сигнал-шум в одном канале при единичной амплитуде сигнала и единичной дисперсии шума. Нормированная сигнальная функция (1.234) теперь совпадает с нормированной сигнальной функцией при одноканальном приеме (1.14), (1.54). Таким образом, для сигнала (1.230) и помехи (1.231) вероятности ошибок определяются формулами (1.62), (1.73) при том же значении приведенного объема ξ, что и при одноканальном приеме. Различие одноканального и многоканального приема в этом случае сводится к различию в отношении сигнал-шум. При одноканальном приеме в (1.62), (1.73) надо подставлять отношение сигнал-шум из (1.29), а при многоканальном — из (1.233). Следовательно, эффективность обнаружения при передаче сигнала по одному и по ν каналам можно сравнивать по отношению сигнал-шум.

Рассмотрим, в какой степени увеличение числа каналов влияет на эффективность обнаружения. Предположим, что по одному i-му каналу, дисперсия в котором равна σ_i^2, передается сигнал $s_{\Sigma}(t, \hat{\vartheta}) = a_{\Sigma}\widehat{s}(t, \hat{\vartheta})$; $a_{\Sigma}^2 = \sum_{i=1}^{\nu} a_i^2$. Очевидно, энергия этого сигнала равна суммарной энергии всех ν сигналов (1.230). Для сигнала $s_{\Sigma}(t, \hat{\vartheta})$, передаваемого по i-му каналу, отношение сигнал-шум $d_i^2 = a_{\Sigma}^2 \widehat{d^2}/\sigma_i^2$. Соответственно эффективность обнаружения при использовании всех каналов будет не хуже, чем при использовании одного канала, если

$$\chi_i = d_{\nu}^2/d_i^2 \geqslant 1. \tag{1.235}$$

Как отношение сигнал-шум d_{ν}^2 (1.233), так и выигрыш в эффективности обнаружения (1.235) зависят от распределения суммарной энергии всех сигналов между каналами.

Найдем оптимальное распределение суммарной энергии между ν каналами, которое обеспечивает максимальное отношение сигнал-шум d_{ν}^2 при условии, что задано a_{Σ}^2. Для этого обозначим $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{a}/a_{\Sigma}$ и перепишем (1.233) как

$$d_{\nu}^2 = \boldsymbol{\gamma}^+ \mathbf{B}_0^{-1}\, \boldsymbol{\gamma} a_{\Sigma}^2 \widehat{d^2}.$$

Отсюда следует, что задача определения оптимального распределения энергии сигналов между каналами сводится к определению вектора $\boldsymbol{\gamma}_0$, максимизирующего квадратичную форму $\boldsymbol{\gamma}^+ \mathbf{B}_0^{-1}\boldsymbol{\gamma}$ при условии

$$\boldsymbol{\gamma}^+ \boldsymbol{\gamma} = 1. \tag{1.236}$$

Общее решение этой задачи известно [11]. Именно: пусть λ_1 — наименьшее собственное значение матрицы $\mathbf{B}_0$, тогда

$$\max_{\boldsymbol{\gamma}} d_{\nu}^2 = a_{\Sigma}^2 \widehat{d^2}/\lambda_1. \tag{1.237}$$

При этом максимум достигается при выборе в качестве γ_0 собственного вектора матрицы $\mathbf{B}_0$, соответствующего наименьшему собственному значению и удовлетворяющего условию (1.236). Следовательно, чтобы найти оптимальное распределение энергии сигнала между каналами, достаточно определить наименьшее собственное значение матрицы $\mathbf{B}_0$ и соответствующий собственный вектор γ_0.

Учитывая, что максимальное значение отношения сигнал-шум определяется наименьшим собственным значением матрицы $\mathbf{B}_0$ (1.237), покажем, что при увеличении числа каналов и оптимальном распределении энергии сигнала эффективность обнаружения не снижается. Предположим, что сигнал (1.230) при той же суммарной энергии передается по η каналам ($\eta \geqslant \nu$), а корреляционная матрица шумов имеет вид $\mathbf{B}_\eta(\tau) = \mathbf{B}_{0\eta}\rho(\tau)$. При этом полагаем, что $\mathbf{B}_{0\eta}|_{\eta=\nu} = \mathbf{B}_0$.

При оптимальном распределении энергии сигнала между η каналами, максимальное отношение сигнал-шум аналогично (1.237) равно $\max d_\eta^2 = a_\Sigma^2 \widehat{d^2}/\lambda_{1\eta}$, где $\lambda_{1\eta}$ — наименьшее собственное значение матрицы $\mathbf{B}_{0\eta}$. Однако из теоремы отделения Штурма [11] следует, что всегда $\lambda_{1\eta} \leqslant \lambda_1$ при $\eta \geqslant \nu$. Значит, при $\eta \geqslant \nu$ имеем $\max d_\eta^2 \geqslant \max d_\nu^2$. Из этого соотношения, в частности, получаем, что при оптимальном распределении энергии всегда выполняется (1.235). Следует отметить, что в некоторых случаях оптимальное распределение оказывается таким, что вся энергия сигнала должна передаваться по одному каналу. Например, если $\mathbf{B}_0 = ||\sigma_i^2 \delta_{ik}||$, δ_{ik} — символ Кронекера и $\sigma_1^2 < \sigma_i^2$, $i = \overline{2, \nu}$ то $\lambda_1 = \sigma_1^2$ и $\gamma_0^+ = ||1\ 0\ \ldots 0||$, т. е. вся энергия должна передаваться по первому каналу.

1.5.2. Каналы с медленными замираниями

В реальных каналах передачи информации на радиосигнал воздействуют не только аддитивные помехи, как это предполагалось выше, но и мультипликативные или модулирующие [26] (т. е. имеют место замирания). Предполагая замирания на интервале наблюдения $[0; T]$ медленными, сигнал на выходе i-го канала ($i = \overline{1, \nu}$) запишем как

$$x_i(t) = a_{0i} F(t, \vartheta_0) \cos[\omega_0 t + \psi(t, \vartheta_0) - \varphi_{0i}] + n_i(t); \quad (1.238)$$

a_{0i}, φ_{0i} — неизвестные амплитуда и фаза полезного сигнала; ϑ_0 — неизвестный неэнергетический параметр, $\vartheta_0 \in \Theta$; $n_i(t)$ — реализации гауссовского шума с корреляционной матрицей (1.231). Поскольку замирания предполагаются медленными, будем считать неизвестные a_i и φ_i постоянными в течение длительности сигнала.

Приемник максимального правдоподобия должен вырабатывать логарифм ФОП $L(\vartheta, a_i, \varphi_i)$ всех неизвестных параметров принимаемых сигналов

$$\mathbf{s}(t, \vartheta, \varphi_i, a_i) = ||a_i F(t, \vartheta) \cos[\omega_0 t + \psi(t, \vartheta) - \varphi_i]||, i = \overline{1, \nu}, \quad (1.239)$$

и принимать решение, сравнивая абсолютный максимум $L(\vartheta, a_i, \varphi_i)$ с порогом c. В рассматриваемом случае логарифм ФОП

$$L(\vartheta, a_i, \varphi_i) = L(\vartheta, \boldsymbol{\pi}_s, \boldsymbol{\pi}_c) = \mathbf{X}^+(\vartheta)\boldsymbol{\pi}_c + \mathbf{Y}^+(\vartheta)\boldsymbol{\pi}_s - \\ -(\boldsymbol{\pi}_c^+ \mathbf{B}_0^{-1} \boldsymbol{\pi}_c + \boldsymbol{\pi}_s^+ \mathbf{B}_0^{-1} \boldsymbol{\pi}_s)\widehat{d^2}/2. \quad (1.240)$$

Здесь

$$\boldsymbol{\pi}_c = ||a_i \cos\varphi_i||, \quad \boldsymbol{\pi}_s = ||a_i \sin\varphi_i||;$$

$$\mathbf{X}^+(\vartheta)=\int_0^T \mathbf{x}^+(t)\,\mathbf{B}_0^{-1}\,V_{0c}(t,\vartheta)\,dt;\quad \mathbf{Y}^+(\vartheta)=\int_0^T \mathbf{x}^+(t)\,\mathbf{B}_0^{-1}\,V_{0s}(t,\vartheta)\,dt;$$

$$\left.\begin{matrix}V_{0c}(t,\vartheta)\\ V_{0s}(t,\vartheta)\end{matrix}\right\}=\int_0^T F(\tau,\vartheta)\,h_0(\tau,t)\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}[\omega_0\tau+\psi(\tau,\vartheta)]\,d\tau;$$

$$\widehat{d^2}=\int_0^T\int_0^T F(t_1,\vartheta)\,F(t_2,\vartheta)\,h_0(t_1,t_2)\times$$

$$\times\cos[\omega_0(t_1-t_2)+\psi(t_1,\vartheta)-\psi(t_2,\vartheta)]\,dt_1\,dt_2/2,$$

а функция $h_0(t_1,\ t_2)$ аналогично (1.107) определяется из интегрального уравнения

$$\int_0^T \rho(t_1-t)\,h_0(t,t_2)\,dt=\delta(t_1-t_2). \tag{1.241}$$

Максимизируя (1.240) по значениям неизвестных амплитуд a_i и начальных фаз φ_i принимаемого сигнала $\mathbf{s}(t,\vartheta,a_i,\varphi_i)$, получаем

$$L(\vartheta)=\max_{a_i,\,\varphi_i} L(\vartheta,a_i,\varphi_i)=\boldsymbol{\eta}^+(\vartheta)\,\mathbf{Q}^{-1}\boldsymbol{\eta}(\vartheta)/2, \tag{1.242}$$

где $\boldsymbol{\eta}^+(\vartheta)=||\mathbf{X}^+(\vartheta)\ \mathbf{Y}^+(\vartheta)||$ — блочный вектор, а блочная матрица

$$\mathbf{Q}=\left\|\begin{matrix}\mathbf{B}_0^{-1} & 0\\ 0 & \mathbf{B}_0^{-1}\end{matrix}\right\|\widehat{d^2} \tag{1.243}$$

Следовательно, приемник сигнала, прошедшего ν каналов с медленными замираниями, должен вырабатывать функцию $L(\vartheta)$ (1.242) для всех $\vartheta\in\Theta$.

Найдем вероятности ошибок. При отсутствии полезного сигнала $\mathbf{x}(t)=\mathbf{n}(t)$ и

$$L(\vartheta)=L_0(\vartheta)=\mathbf{N}^+(\vartheta)\,\mathbf{Q}^{-1}\,\mathbf{N}(\vartheta)/2. \tag{1.244}$$

Здесь $\mathbf{N}^+(\vartheta)=\|\mathbf{N}_c^+(\vartheta)\,\mathbf{N}_s^+(\vartheta)\|$, а $\mathbf{N}_c^+(\vartheta)=\int_0^T \mathbf{n}^+(t)\,\mathbf{B}_0^{-1}\,V_{0c}(t,\vartheta)\,dt$;

$$\mathbf{N}_s^+(\vartheta)=\int_0^T \mathbf{n}^+(t)\,\mathbf{B}_0^{-1}\,V_{0s}(t,\vartheta)\,dt$$

— квадратуры шумовой функции, которые обладают свойствами, аналогичными свойствам квадратур шумовой функции при одноканальном приеме [27]:

$$M[\mathbf{N}_c(\vartheta)]=M[\mathbf{N}_s(\vartheta)]=0;$$

$$M[\mathbf{N}_c(\vartheta_1)\,\mathbf{N}_c^+(\vartheta_2)]=M[\mathbf{N}_s(\vartheta_1)\,\mathbf{N}_s^+(\vartheta_2)]=\widehat{d^2}\,\mathbf{B}_0^{-1}\,S_c(\vartheta_1,\vartheta_2); \tag{1.245}$$

$$M[\mathbf{N}_s(\vartheta_1)\,\mathbf{N}_c^+(\vartheta_2)]=-M[\mathbf{N}_c(\vartheta_1)\,\mathbf{N}_s^+(\vartheta_2)]=\widehat{d^2}\,\mathbf{B}_0^{-1}\,S_s(\vartheta_1,\vartheta_2),$$

где $S_c(\vartheta_1, \vartheta_2)$ и $S_s(\vartheta_1, \vartheta_2)$ — квадратуры сигнальной функции, которые определяются формулами (1.105), если в них $h(t_1, t_2)$ заменить на $h_0(t_1, t_2)$ (1.241), а d заменить на $\widehat{d}$. Поскольку для неэнергетического параметра [27] $S_c(\vartheta_1, \vartheta_2) = S_c(\vartheta_2 - \vartheta_1) = S_c(\vartheta_1 - \vartheta_2)$; $S_s(\vartheta_1, \vartheta_2) = S_s(\vartheta_1 - \vartheta_2) = -S_s(\vartheta_2 - \vartheta_1)$, то компоненты вектора $\mathbf{N}(\vartheta)$ есть стационарные и стационарно связанные гауссовы случайные процессы. Следовательно, $L_0(\vartheta)$ (1.244) — также стационарный процесс.

Положим, что огибающая сигнальной функции $G(\vartheta_1, \vartheta_2)$ (1.110) при $|\vartheta_1 - \vartheta_2| \to \infty$ стремится к нулю. Тогда необходимое для определения вероятности ложной тревоги распределение абсолютного максимума $L_0(\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$, можно приближенно записать в виде (1.59). Эта формула основана на предположении, что поток выбросов случайной функции $L_0(\vartheta)$ за достаточно высокий уровень H является пуассоновским [25, 43].

Найдем среднее число выбросов $\Pi(H)$ за уровень H случайного процесса $L_0(\vartheta)$ на единичном интервале определения неизвестного параметра ϑ. Как известно, для стационарного случайного процесса [43]

$$\Pi(H) = \int_0^\infty y W_2(H, y)\, dy, \tag{1.246}$$

где $W_2(x, y)$ — совместная плотность вероятности значений $x = L_0(\vartheta)$ процесса (1.244) и его производной $y = dL_0(\vartheta)/d\vartheta$.

Вначале определим характеристическую функцию $\Psi_2(u, v) = M\{\exp[j(ux + vy)]\}$ для случайных величин $L_0(\vartheta)$ и $L_0'(\vartheta)$. Так как $L_0'(\vartheta) = \mathbf{N}'^{+}(\vartheta)\, \mathbf{Q}^{-1}\, \mathbf{N}(\vartheta)$, то

$$\Psi_2(u, v) = M\{\exp[ju\mathbf{N}^{+}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{N}/2 + jv\mathbf{N}'^{+}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{N}]\}. \tag{1.247}$$

Для выполнения усреднения в этой формуле найдем совместную плотность вероятности векторов $\mathbf{N} \equiv \mathbf{N}(\vartheta)$ и $\mathbf{N}' \equiv \mathbf{N}'(\vartheta)$. Вектор $\mathbf{N}$ получен в результате линейного преобразования входного гауссовского шума. Поэтому $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}'$ — гауссовские случайные векторы, причем согласно (1.245)

$$M[\mathbf{N}] = M[\mathbf{N}'] = 0;\ M[\mathbf{N}\mathbf{N}^{+}] = \mathbf{Q};\ M[\mathbf{N}'\mathbf{N}^{+}] = -M[\mathbf{N}\mathbf{N}'^{+}] = f\mathbf{Q}_1;\ M[\mathbf{N}'\mathbf{N}'^{+}] = q^2\mathbf{Q}; \tag{1.248}$$

$$f = \left[\frac{\partial S_s(\vartheta_1, \vartheta_2)}{\partial \vartheta_1}\right]_{\vartheta_1 = \vartheta_2};\quad q^2 = \left[\frac{\partial^2 S_c(\vartheta_1, \vartheta_2)}{\partial \vartheta_1\, \vartheta_2}\right]_{\vartheta_1 = \vartheta_2};$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{Vmatrix} 0 & -\mathbf{B}_0^{-1} \\ \mathbf{B}_0^{-1} & 0 \end{Vmatrix} \widehat{d}^2.$$

Следовательно, совместная плотность вероятности векторов $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}'$

$$W(\mathbf{N}, \mathbf{N}') = \frac{1}{(2\pi)^{2\nu}\sqrt{\det \mathbf{A}}} \exp\left[-\frac{1}{2}\|\mathbf{N}^{+}\mathbf{N}'^{+}\|\mathbf{A}^{-1}\left\|\begin{matrix}\mathbf{N} \\ \mathbf{N}'\end{matrix}\right\|\right]. \tag{1.249}$$

где блочная матрица

$$\mathbf{A}=\left\| \begin{matrix} \mathbf{Q} & -f\mathbf{Q}_1 \\ f\mathbf{Q}_1 & q^2\mathbf{Q} \end{matrix} \right\|.$$

Подставляя (1.249) в (1.247), для характеристической функции получаем

$$\Psi_2(u,v)=\frac{1}{(2\pi)^{2\nu}\sqrt{\det \mathbf{A}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{ju}{2}\mathbf{N}^+\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{N}+jv\mathbf{N}'^+\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{N}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\|\mathbf{N}^+\mathbf{N}'^+\|\mathbf{A}^{-1}\left\|\begin{matrix}\mathbf{N}\\ \mathbf{N}'\end{matrix}\right\|\right\}d\mathbf{N}\,d\mathbf{N}';$$

$$d\mathbf{N}=dN_1\,dN_2\ldots dN_\nu;\quad d\mathbf{N}'=dN_1'\,dN_2'\ldots dN_\nu'. \qquad (1.250)$$

Для вычисления этого интеграла введем в рассмотрение блочный вектор $\mathbf{\Gamma}^+ = \|\mathbf{N}^+\ \mathbf{N}'^+\|$ и блочную матрицу

$$\mathbf{Q}_0=\left\|\begin{matrix} u\mathbf{Q}^{-1} & v\mathbf{Q}^{-1} \\ v\mathbf{Q}^{-1} & 0 \end{matrix}\right\|.$$

Тогда (1.250) можно переписать как

$$\Psi_2(u,v)=\frac{1}{(2\pi)^{2\nu}\sqrt{\det \mathbf{A}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{j}{2}\mathbf{\Gamma}^+\mathbf{Q}_0\mathbf{\Gamma}-\frac{1}{2}\mathbf{\Gamma}^+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{\Gamma}\right]d\mathbf{\Gamma}.$$

Интегрирование в этой формуле не вызывает затруднений и приводит к результату

$$\Psi_2(u,\ v)=[1-ju+v^2q_\Phi^2]^{-\nu}, \qquad (1.251)$$

где

$$q_\Phi^2=q^2-f^2=[\partial^2 G(\vartheta_1,\vartheta_2)/\partial\vartheta_1\,\partial\vartheta_2]_{\vartheta_1=\vartheta_2}. \qquad (1.252)$$

Из (1.251) находим совместную плотность вероятности процесса (1.244) и его производной

$$W_2(x,y)=\frac{x^{\nu-3/2}}{2\sqrt{\pi}\,(\nu-1)!\,q_\Phi}\exp\left[-x-\frac{y^2}{4xq_\Phi^2}\right]. \qquad (1.253)$$

Подставляя это выражение в (1.246) и выполняя интегрирование, получаем формулу для среднего числа выбросов процесса $L_0(\vartheta)$ за уровень H на интервале единичной длины

$$\Pi(H)=q_\Phi H^{\nu-1/2}\exp(-H)/[\sqrt{\pi}\,(\nu-1)!].$$

Теперь аналогично (1.62) можем записать приближенное выражение для вероятности ложной тревоги при передаче сигнала по ν каналам с медленными замираниями

$$\alpha_\nu \simeq \begin{cases} 1-\exp\left[-\dfrac{\xi_\varphi\, c^{\nu-1/2}\exp(-c)}{\sqrt{\pi}\,(\nu-1)!}\right], & c \geqslant \nu-1/2; \\ 1, & c < \nu-1/2. \end{cases} \qquad (1.254)$$

Здесь $\xi_\varphi = \Theta q_\varphi$ совпадает с (1.111).

Перейдем к определению вероятности пропуска сигнала. Опять полагая, что длина априорного интервала Θ значительно больше длительности огибающей сигнальной функции $G(\vartheta_1, \vartheta_2)$, можем воспользоваться формулой (1.64), причем в рассматриваемом случае

$$P_N(c) \simeq \begin{cases} \exp\left[-\dfrac{\xi_\varphi\, c^{\nu-1/2}}{\sqrt{\pi}\,(\nu-1)!}\exp(-c)\right], & c \geqslant \nu-1/2; \\ 0, & c < \nu-1/2. \end{cases} \qquad (1.255)$$

При наличии на входе приемника сигнала $\mathbf{s}(t, \vartheta_0, a_{0i}, \varphi_{0i})$ отношение сигнал-шум для принятого сигнала равно

$$d_T^2 = [\boldsymbol{\pi}_{0c}^{+}\mathbf{B}_0^{-1}\boldsymbol{\pi}_{0c} + \boldsymbol{\pi}_{0s}^{+}\mathbf{B}_0^{-1}\boldsymbol{\pi}_{0s}]\,\widehat{d^2}, \qquad (1.256)$$

где $\boldsymbol{\pi}_{0c} = ||a_{0i}\cos\varphi_{0i}||$; $\boldsymbol{\pi}_{0s} = ||a_{0i}\sin\varphi_{0i}||$. Определим, как и ранее (п. 1.2.1 и др.), подобласть Θ_s как часть интервала Θ, где $G(\vartheta_0, \vartheta) \neq 0$. Тогда при достаточно большом отношении сигнал-шум для принятого сигнала можно приближенно положить $H_S = L(\vartheta_m) \simeq L(\vartheta_0)$. Здесь, как и ранее, ϑ_m — положение абсолютного максимума $L(\vartheta)$ (1.242) при наличии полезного сигнала и $\vartheta_m \in \Theta_S$. Следовательно, для приближенного расчета условной вероятности пропуска сигнала $\beta_\nu = \beta_\nu(a_{0i}, \varphi_{0i})$ при $d_T \gg 1$ достаточно найти плотность вероятности случайной величины

$$L(\vartheta_0) = \boldsymbol{\eta}^{+}(\vartheta_0)\,\mathbf{Q}^{-1}\,\boldsymbol{\eta}(\vartheta_0)/2. \qquad (1.257)$$

Здесь $\boldsymbol{\eta}(\vartheta_0)$ — вектор, компонентами которого являются гауссовские случайные величины с известными статистическими характеристиками.

Используя аппарат характеристических функций, получаем плотность вероятности для (1.257) в виде

$$W_S(H) = \left(\frac{2H}{d_T^2}\right)^{(\nu-1)/2}\exp\left(-H-\frac{d_T^2}{2}\right)I_{\nu-1}\left(d_T\sqrt{2H}\right), \qquad (1.258)$$

где $I_\nu(\cdot)$ — функция Бесселя мнимого аргумента порядка ν. Воспользовавшись последней формулой, для вероятности $P_S(H)$ в (1.64) имеем приближенное выражение

$$P_S(c) \simeq \int_0^{\sqrt{2c}} \frac{x^\nu}{d_T^{\nu-1}}\exp\left(-\frac{x^2+d_T^2}{2}\right)I_{\nu-1}(xd_T)\,dx. \qquad (1.259)$$

Подставляя (1.255) и (1.259) в (1.64), находим вероятность пропуска при обнаружении сигнала, передаваемого по ν каналам с медленными замираниями:

$$\beta_\nu \simeq \begin{cases} \exp\left[-\dfrac{\xi_\varphi c^{\nu-1/2}}{\sqrt{\pi}(\nu-1)!}\exp(-c)\right]\displaystyle\int_0^{\sqrt{2c}} \dfrac{x^\nu}{d_T^{\nu-1}} \times \\ \times \exp\left(-\dfrac{x^2+d_T^2}{2}\right) I_{\nu-1}(xd_T)\,dx, & c \geqslant \nu-1/2; \\ 0, & c < \nu-1/2. \end{cases} \tag{1.260}$$

Сравним вероятности ошибок 1-го и 2-го рода при обнаружении сигнала, передаваемого по ν каналам с медленными замираниями, с вероятностями ошибок при обнаружении сигнала, передаваемого по

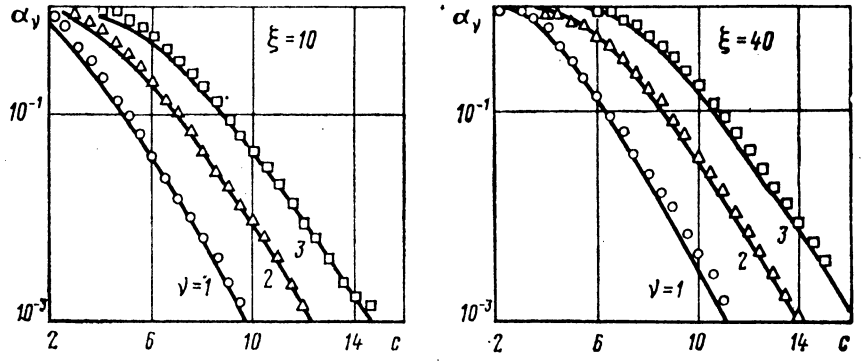


Рис. 1.25. Вероятность ложной тревоги при многоканальном приеме

одному каналу с медленными замираниями. Сравнение проведем в предположении, что отношения сигнал-шум при многоканальном и одноканальном приеме одинаковы. Если в (1.254) и (1.260) положить $d_T \to \infty$ и $c \to \infty$, то эти формулы несколько упрощаются и принимают вид

$$\alpha_\nu \simeq \xi_\varphi c^{\nu-1/2}\exp(-c)/(\nu-1)!\sqrt{\pi}, \quad \beta_\nu \simeq \Phi\left(\sqrt{2c}-d_T\right). \tag{1.261}$$

При обнаружении сигнала, передаваемого по одному каналу с медленными замираниями (т. е. сигнала с неизвестными амплитудой, фазой и неэнергетическим параметром ϑ), как показано в п. 1.4.1, при $u \to \infty$ и $d_T \to \infty$ вероятность ложной тревоги определяется из (1.114), а вероятность пропуска — из (1.78). Из сравнения (1.261) и (1.78) видим, что вероятности пропуска в этих случаях равны, если положить $u = \sqrt{2c}$. Соответственно при равных вероятностях пропуска отношение ложных тревог при использовании ν каналов и одного канала равно $\alpha_\nu/\alpha_\varphi \simeq c^{\nu-1}/(\nu-1)! \simeq u^{2(\nu-1)}/2^{(\nu-1)}(\nu-1)!$. Из этой формулы следует, что предельный проигрыш в эффективности обнаружения

падает с увеличением числа используемых каналов и растет с увеличением порога, т. е. с уменьшением требуемого уровня ложных тревог.

Формулы (1.254) и (1.260) получены на основе ряда допущений, которые носят приближенный характер. Оценить аналитически точность этих формул весьма затруднительно: можно лишь утверждать, что их точность возрастает с увеличе-

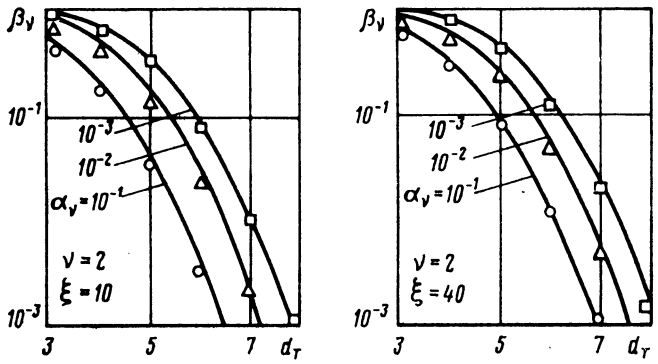


Рис. 1.26. Вероятность пропуска сигнала (два канала)

нием ξ_φ, c и d_T. Для конечных значений этих параметров вопрос о применимости полученных формул (1.254) и (1.260) можно решить экспериментальной проверкой.

С целью изучения возможностей использования полученных формул для умеренных значений ξ_φ, c и d_T было выполнено (совместно с Ю С. Радченко) моделирование многоканального обнаружения на ЭВМ. В процессе моделирования формировался выходной сигнал приемника максимального правдоподобия (1.242) для огибающей и квадратур сигнальной функции вида $S_c(\vartheta_1, \vartheta_2) = G(\vartheta_1, \vartheta_2) = \exp[-(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2/2]$; $S_s(\vartheta_1, \vartheta_2) = 0$. Матрица (1.231) выбиралась диагональной с одинаковыми элементами. С целью ускорения моделирования применялся метод зависимых испытаний [34].

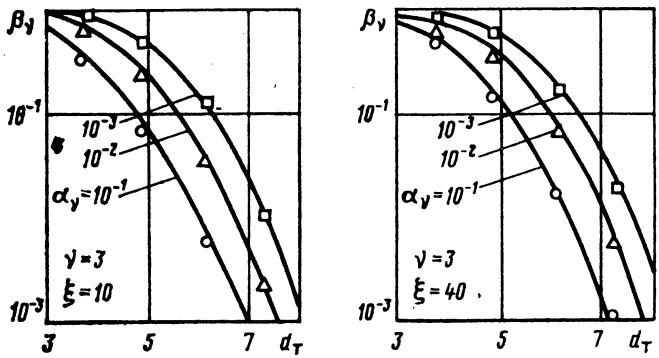


Рис. 1.27. Вероятность пропуска сигнала (три канала)

Экспериментальные значения вероятностей ложной тревоги α_ν и пропуска сигнала β_ν определялись для различных значений ν, ξ_φ, c и d_T. Эти экспериментальные значения приведены на рис. 1.25—1.27, где нанесены также теоретические зависимости, рассчитанные по формулам (1.254), (1.260). Объем экспери-

ментальной выборки задавался таким образом, что с вероятностью 0,9 границы доверительного интервала отклоняются от экспериментальных значений α_ν и β_ν не более чем на 15%. Следует отметить удовлетворительную аппроксимацию экспериментальных зависимостей асимптотически точными формулами (1.254), (1.260) уже при $d_T \geqslant 1 \div 2$, $\xi_\varphi \geqslant 10$ и значениях порога c, соответствующих $\alpha_\nu \leqslant 0{,}3 \div 0{,}5$.

1.5.3. Многоканальный прием разрывных сигналов

Найдем характеристики многоканального обнаружения разрывных сигналов с неизвестными параметрами. Отметим, что, как при обнаружении одного разрывного сигнала (§ 1.3), вопрос об асимптотической оптимальности приемника максимального правдоподобия остается открытым.

Пусть полезный сигнал определяется формулой (1.230) и принимается на фоне гауссовской помехи с корреляционной матрицей (1.231). Сигнал (1.230) будем называть разрывным, если для его сигнальной функции выполняется (1.121). Тогда характеристики обнаружения сигнала (1.230) (при $\mu = 1$) приемником максимального правдоподобия можно найти из результатов п. 1.3.2. Для этого достаточно в (1.130), (1.152) подставить отношение сигнал-шум из (1.233). Естественно, оптимальное распределение суммарной энергии разрывного сигнала между ν каналами будет таким же, как для дифференцируемого сигнала (п. 1.5.1).

Рассмотрим далее характеристики обнаружения разрывного радиосигнала при передаче его по ν каналам с медленными замираниями. Полагаем при этом, что огибающая сигнальной функции и ее квадратуры для разрывного сигнала (1.239) удовлетворяют соотношениям (1.164)—(1.166). Найдем вероятности ошибок 1-го и 2-го рода при использовании приемника максимального правдоподобия (1.242).

При отсутствии полезного сигнала логарифм ФОП (1.244) представляет собой реализацию стационарного случайного процесса. Одномерную плотность вероятности этого процесса получаем, интегрируя (1.253) по y в бесконечных пределах:

$$W_0(x) = x^{\nu-1}\exp(-x)/\Gamma(\nu). \qquad (1.262)$$

Коэффициент корреляции процесса (1.244) $R_0(\lambda) = G^2(\lambda)$, где $G(\lambda)$ — огибающая сигнальной функции (1.110). При этом согласно (1.164)—(1.166) при $\lambda \to 0$

$$R_0(\lambda) = 1 - 2\delta|\lambda| + 0(|\lambda|). \qquad (1.263)$$

Для расчета вероятности ложной тревоги (1.57) надо найти функцию распределения $F_0(H)$ абсолютного максимума $L_0(\vartheta)$ (1.244) при $\vartheta \in \Theta$. Точное выражение для $F_0(H)$ неизвестно. Однако, используя результаты [51], можно найти асимптотически точное выражение для $F_0(H)$, справедливое при $H \to \infty$.

Рассмотрим с этой целью стационарный случайный процесс $\chi(t)$, $t \in [0; T]$, с плотностью вероятности

$$W(\chi) = \chi^\nu \exp(-\chi)/\Gamma(\nu+1), \quad \nu > -1, \quad 0 \leqslant \chi < \infty, \qquad (1.264)$$

и коэффициентом корреляции $R_\chi(\tau) = \exp(-|\tau|)$. Согласно [39, 45] процесс $\chi(t)$ является марковским с коэффициентами сноса и диффузии $K_1 = \nu + 1 - \chi$; $K_2 = 2\chi$. Марковский процесс с такими коэффициентами может быть определен как решение симметризованного стохастического дифференциального уравнения [3, 41]

$$d\chi(t)/dt = \nu + 1/2 - \chi(t) + \sqrt{2\chi}(t)\, n_0(t).$$

Здесь $n_0(t)$ — гауссовский белый шум, для которого $M[n_0(t)] = 0$, $M[n_0(t)\, n_0(t+\tau)] = \delta(\tau)$. Перейдем к процессу $r(t) = \sqrt{2\chi(t)}$, который может быть получен из решения уравнения

$$dr(t)/dt = (\nu + 1/2)/r(t) - r(t)/2 + n_0(t). \qquad (1.265)$$

Для марковских процессов, удовлетворяющих стохастическому дифференциальному уравнению вида (1.265), в [41] найдена приближенная формула (1.171). Применительно к процессу $r(t)$ (1.265) в (1.171) надо положить $\delta = 1$; $W_{st}(x) = x^{2\nu+1}\exp(-x^2/2)/2^\nu\Gamma(\nu+1)$ — стационарная плотность вероятности процесса $r(t)$, а $x_0 = \sqrt{2\nu+1}$. Таким образом,

$$\frac{1}{\rho} = 2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)\int\limits_{\sqrt{2\nu+1}}^{H}\frac{\exp(x^2/2)}{x^{2\nu+1}}\,dx.$$

Удерживая лишь первый член в асимптотическом разложении этого интеграла при $H \gg 1$, получаем

$$\rho \simeq H^{2(\nu+1)}\exp(-H^2/2)/2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1). \qquad (1.266)$$

Следовательно, при больших H из (1.171) и (1.266) находим

$$P[r(t) < H] \simeq \exp\left[-\frac{TH^{2(\nu+1)}}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)}\exp\left(-\frac{H^2}{2}\right)\right],\ 0 < t < T: \qquad (1.267)$$

Полагая здесь $\nu = 0$, приходим к аналогичному результату для рэлеевского марковского процесса (1.174). Как следует из вывода формулы (1.171) в [41], точность приближенной формулы (1.267) растет с увеличением T и H. Поэтому, переходя в (1.267) к процессу $\chi(t)$, при $T \to \infty$ и $H \to \infty$ можем записать

$$P[\chi(t) < H] \to \exp\left[-\frac{TH^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)}\exp(-H)\right],\ 0 < t < T.$$

Введем далее в рассмотрение стационарный случайный процесс $\tilde{\chi}(t)$ с плотностью вероятности (1.264) и коэффициентом корреляции $\tilde{R}(\tau)$. Потребуем, чтобы $\tilde{R}(\tau) = 1 - |\tau| + o(|\tau|)$ при $\tau \to 0$. По аналогии с [59] и п. 1.3.3 назовем процесс $\tilde{\chi}(t)$ локально-марковским, так как на малых интервалах времени статистические характеристики процессов $\chi(t)$ и $\tilde{\chi}(t)$ асимптотически совпадают. Заметим, что реализации процессов $\chi(t)$ и $\tilde{\chi}(t)$ непрерывны с вероятностью единица.

В работах, посвященных проблеме пересечений [25, 40, 59, 60 и др.], неоднократно отмечается, что вероятностные характеристики пересечений реализацией случайного процесса высокого уровня определяются лишь локальными свойствами этого процесса. В частности, асимптотически совпадают вероятностные характеристики непревышения достаточно высокого уровня марковским и локально-марковским процессами. Для случая гауссовских марковского и локально-марковского случайных процессов это совпадение отмечалось в п. 1.3.3. Действительно, в силу непрерывности с вероятностью единица реализаций марковского и локально-марковского процессов длительность отрезков реализаций этих процессов, превышающих некоторый уровень H, при $H \to \infty$ стремится к нулю. Таким образом, по крайней мере для процессов с непрерывными реализациями вероятность непревышения уровня H, когда $H \to \infty$, определяется лишь локальными свойствами процесса. Об этом также свидетельствуют все конкретные результаты по определению вероятностных характеристик пересечений [25, 40, 60 и др.]. Следовательно, для локально-марковского процесса $\tilde{\chi}(t)$ при $T \to \infty$ и $H \to \infty$ аналогично (1.174), (1.175) можно записать

$$P[\tilde{\chi}(t) < H] \to \exp\left[-\frac{TH^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)} \exp(-H)\right], \quad 0 < t < T.$$

Перейдем к локально-марковскому процессу (1.244) с плотностью вероятности (1.262) и коэффициентом корреляции (1.263). Получаем, что при $m \to \infty$ и $H \to \infty$

$$F_0(H) \to \exp\left[-\frac{2mH^{\nu}}{\Gamma(\nu)} \exp(-H)\right], \tag{1.268}$$

где $m = \delta\Theta$.

Для конечных значений m и H будем аппроксимировать $F_0(H)$ его предельным значением. Поскольку правая часть (1.268) является неубывающей функцией H лишь при $H \geqslant \nu$, аналогично (1.59) используем аппроксимацию

$$F_0(H) \simeq \begin{cases} \exp\left[-\frac{2mH^{\nu}}{\Gamma(\nu)} \exp(-H)\right], & H \geqslant \nu; \\ 0, & H < \nu. \end{cases} \tag{1.269}$$

Согласно (1.57) и (1.269) приближенное выражение для вероятности ложной тревоги запишется так:

$$\alpha_{\nu} \simeq \begin{cases} 1 - \exp\left[-\frac{2mc^{\nu}}{\Gamma(\nu)} \exp(-c)\right], & c \geqslant \nu; \\ 1, & c < \nu. \end{cases} \tag{1.270}$$

Точность этой формулы возрастает с увеличением порога c и параметра m.

Полагая, что полезный сигнал (1.239) присутствует на входе обнаружителя, найдем условную вероятность пропуска сигнала $\beta_{\nu} =$

$= \beta_\nu(a_{0i}, \varphi_{0i})$, $i = \overline{1, \nu}$. Для этого, как и ранее (п. 1.2.1 и др.), разобьем априорный интервал Θ определения неизвестного параметра ϑ на подобласти Θ_N и Θ_S. При этом $G(\vartheta_0, \vartheta) \simeq 0$, когда $\vartheta \in \Theta_N$. Пусть H_N и H_S — значения абсолютных максимумов $L(\vartheta)$ (1.242) в подобластях Θ_N и Θ_S. Тогда при $m \gg 1$ вероятность пропуска можно представить в виде (1.64).

Приближенные значения вероятности $P_N(c)$ в (1.64) при $m \gg 1$ можно записать как $P_N(c) \simeq F_0(c)$, где $F_0(\cdot)$ определяется из (1.269).

Для расчета $P_S(c) = P[L(\vartheta) < c]$, $\vartheta \in \Theta_S$, представим $L(\vartheta)$ 1.242) в виде суммы сигнальной и шумовой функций:

$$L(\vartheta) = \widehat{S}(\vartheta) + \widehat{N}(\vartheta) + \nu,$$

где

$$\widehat{S}(\vartheta) = M[L(\vartheta)] - \nu = d_T^2 G^2(\vartheta_0, \vartheta)/2;$$

$$\widehat{N}(\vartheta) = L(\vartheta) - M[L(\vartheta)]; \quad M[\widehat{N}(\vartheta)] = 0; \tag{1.271}$$

$$M[\widehat{N}(\vartheta_1)\widehat{N}(\vartheta_2)] = \nu G^2(\vartheta_1, \vartheta_2) + d_T^2\{S_c(\vartheta_1, \vartheta_2)[S_c(\vartheta_0, \vartheta_1) S_c(\vartheta_0, \vartheta_2) + S_s(\vartheta_0, \vartheta_1) S_s(\vartheta_0, \vartheta_2)] + S_s(\vartheta_1, \vartheta_2) \times [S_c(\vartheta_0, \vartheta_1) S_s(\vartheta_0, \vartheta_2) - S_s(\vartheta_0, \vartheta_1) S_c(\vartheta_0, \vartheta_2)]\}, \tag{1.272}$$

причем усреднение выполняется по реализациям помехи при фиксированных a_{0i} и φ_{0i}, $i = \overline{1, \nu}$, а d_T^2 — отношение сигнал-шум для принятого сигнала (1.256). Функция (1.271) достигает максимума при $\vartheta^* = \vartheta_0$, а реализации шумовой функции $\widehat{N}(\vartheta)$ непрерывны с вероятностью единица. Поэтому при больших отношениях сигнал-шум достаточно исследовать поведение $L(\vartheta)$ (1.242) в малой окрестности ϑ_0. Здесь распределение шумовой функции $\widehat{N}(\vartheta)$ при фиксированных a_{0i}, φ_{0i}, $i = \overline{1, \nu}$, и $d_T \to \infty$ приближается к гауссовскому.

Обозначим $\varepsilon = \max(|\vartheta_1 - \vartheta_0|, |\vartheta_2 - \vartheta_0|, |\vartheta_1 - \vartheta_2|)$. При $\varepsilon \to 0$ для функций (1.271), (1.272) с помощью (1.164)—(1.166) получаем

$$\widehat{S}(\vartheta) = d_T^2(1 - 2\delta|\vartheta_0 - \vartheta|)/2 + o(\varepsilon),$$

$$M[\widehat{N}(\vartheta_1)\widehat{N}(\vartheta_2)] = (\nu + d_T^2) \times$$

$$\times \begin{cases} 1 - 2\delta|\vartheta_1 - \vartheta_2| - \dfrac{2d_T^2}{\nu + d_T^2} \min(|\vartheta_1 - \vartheta_0|, |\vartheta_2 - \vartheta_0|) + o(\varepsilon), & (\vartheta_1 - \vartheta_0)(\vartheta_2 - \vartheta_0) \geqslant 0, \\ 1 - 2\delta|\vartheta_1 - \vartheta_2| + o(\varepsilon), & (\vartheta_1 - \vartheta_0)(\vartheta_2 - \vartheta_0) < 0. \end{cases}$$

Далее рассмотрим вероятность $P_\varepsilon(c) = P[L(\vartheta) < c]$, $\vartheta_0 - \varepsilon \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0 + \varepsilon$, которая при $d_T \to \infty$ асимптотически совпадает с $P_S(c)$. Выберем фиксированное ε настолько малым, чтобы для функций (1.271), (1.272) были справедливы аппроксимации

$$\widehat{S}(\vartheta) \simeq d_T^2 (1 - 2\delta |\vartheta - \vartheta_0|)/2;$$

$$M[\widehat{N}(\vartheta_1)\widehat{N}(\vartheta_2)] \simeq (\nu + d_T^2) \times \begin{cases} 1 - 2\delta|\vartheta_1 - \vartheta_2| - \dfrac{2d_T^2}{\nu + d_T^2} \times \\ \times \min(|\vartheta_1 - \vartheta_0|, |\vartheta_2 - \vartheta_0|), \\ (\vartheta_1 - \vartheta_0)(\vartheta_2 - \vartheta_0) \geqslant 0; \\ 1 - 2\delta|\vartheta_1 - \vartheta_2|, (\vartheta_1 - \vartheta_0)(\vartheta_2 - \vartheta_0) < 0. \end{cases}$$

Аналогично (1.134) можем записать

$$P_\varepsilon(c) = P[\Delta(\vartheta) < c - L_0], \quad \vartheta_0 - \varepsilon \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0 + \varepsilon, \tag{1.273}$$

где $L_0 = L(\vartheta_0)$ (1.242), а $\Delta(\vartheta) = L(\vartheta) - L(\vartheta_0)$. При $d_T \gg 1$ и $\vartheta \in [\vartheta_0 - \varepsilon; \vartheta_0 + \varepsilon]$ величина $\Delta(\vartheta)$ представляет собой реализацию гауссовского случайного процесса с функцией корреляции

$$K_\Delta(\vartheta_1, \vartheta_2) \simeq \begin{cases} 2(2\nu + d_T^2)\delta \min(|\vartheta_1 - \vartheta_0|, |\vartheta_2 - \vartheta_0|), (\vartheta_1 - \vartheta_0)(\vartheta_2 - \vartheta_0) \geqslant 0; \\ 0, \qquad (\vartheta_1 - \vartheta_0)(\vartheta_2 - \vartheta_0) < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\Delta(\vartheta)$ — реализация гауссовского марковского случайного процесса. Когда $d_T \gg 1$, значения этого процесса на неперекрывающихся интервалах $[\vartheta_0 - \varepsilon; \vartheta_0]$ и $[\vartheta_0; \vartheta_0 + \varepsilon]$ статистически независимы. Коэффициенты сноса и диффузии процесса $\Delta(\vartheta)$ равны

$$K_1 = d_T^2 \delta \times \begin{cases} 1, \vartheta < \vartheta_0; \\ -1, \vartheta > \vartheta_0; \end{cases} \quad K_2 = 2(2\nu + d_T^2)\delta.$$

Повторяя выкладки п. 1.3.2 для (1.273), получаем формулу (1.150), где теперь

$$F_\varepsilon(x) = \Phi\left(\frac{d_T^2 m_\varepsilon + x}{\sqrt{2m_\varepsilon(2\nu + d_T^2)}}\right) - \exp\left(-\frac{x d_T^2}{2\nu + d_T^2}\right)\Phi\left(\frac{d_T^2 m_\varepsilon - x}{\sqrt{2m_\varepsilon(2\nu + d_T^2)}}\right),$$

$m_\varepsilon = \varepsilon\delta$, а $W_0(\cdot)$ совпадает с $W_S(\cdot)$ (1.258). Следовательно, при больших отношениях сигнал-шум

$$P_S(c) \simeq \int_0^c \left\{1 - \exp\left[-\frac{d_T^2(c-x)}{2\nu + d_T^2}\right]\right\}^2 \left(\frac{2x}{d_T^2}\right)^{(\nu-1)/2} \times$$

$$\times \exp(-x - d_T^2/2) I_{\nu-1}(d_T\sqrt{2x})\, dx.$$

Подставляя в (1.64) найденные значения $P_N(c)$ и $P_S(c)$, получаем

$$\beta_\nu \simeq \exp\left[-\frac{2mc^\nu}{\Gamma(\nu)}\exp(-c)\right]\int_0^c \left\{1 - \exp\left[-\frac{d_T^2(c-x)}{2\nu + d_T^2}\right]\right\}^2 \times$$

$$\times \left(\frac{2x}{d_T^2}\right)^{(\nu-1)/2} \exp\left(-x - \frac{d_T^2}{2}\right) I_{\nu-1}(d_T\sqrt{2x})\, dx$$

при $c \geqslant \nu$ и $\beta_\nu \simeq 0$ при $c < \nu$.

Таким образом, при многоканальном обнаружении разрывного радиосигнала с неизвестным неэнергетическим параметром характеристики обнаружения могут быть рассчитаны по (1.270), (1.274). Точность этих формул возрастает с увеличением m, c и d_T.

Глава 2

НЕСМЕЩЕННЫЕ И ИНВАРИАНТНЫЕ ПРАВИЛА ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ

2.1. Принципы несмещенности и подобия в задачах проверки сложных гипотез

2.1.1. Несмещенность и подобие правил проверки гипотез

Обнаружение сигналов в условиях параметрической априорной неопределенности есть проверка сложных статистических гипотез относительно распределения наблюдаемого процесса $x(t)$ или выборки из него. Отсутствию сигнала сопоставляется гипотеза H_0 о том, что это распределение принадлежит семейству $\mathcal{P}_0 = \{W(\mathbf{x}|\boldsymbol{\vartheta});\ \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta_0\}$, а его наличию — гипотеза H_1 о том, что процесс $x(t)$ имеет распределение из семейства $\mathcal{P}_1 = \{W(\mathbf{x}|\boldsymbol{\vartheta});\ \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta_1\}$. Здесь и далее $W(\mathbf{x}|\boldsymbol{\vartheta})$ — плотность вероятности выборки из наблюдаемого процесса; $\boldsymbol{\vartheta}$ — в общем случае многомерный параметр распределения; Θ_0, Θ_1 — непересекающиеся множества параметрического пространства Θ, $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$. Априорные сведения о параметре $\boldsymbol{\vartheta}$ ограничены только знанием множеств Θ_0 и Θ_1 его ожидаемых значений, причем никаких априорных распределений на этих множествах не задается.

Правила проверки гипотез представляются решающими функциями $\varphi(\mathbf{x})$, которые задают процедуру принятия решения в пользу той или иной гипотезы при наблюдении $\mathbf{x}$. На практике обычно используются так называемые нерандомизированные правила, у которых

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 \text{ при } \mathbf{x} \in \mathbf{X}_1; \\ 0 \text{ при } \mathbf{x} \in \mathbf{X}_0, \end{cases}$$

где $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_0$ — непересекающиеся множества пространства $\mathbf{X}$ реализаций наблюдаемого процесса; $\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{X}_0 = \mathbf{X}$. Решение о выполнении гипотезы H_1 выносится при $\varphi(\mathbf{x}) = 1$, о выполнении гипотезы H_0 — при $\varphi(\mathbf{x}) = 0$. В случае рандомизированного правила функция $\varphi(\mathbf{x})$ задает вероятность решения в пользу гипотезы H_1 при наблюдении $\mathbf{x}$. Вероятность решения в пользу гипотезы H_0 равна $1 - \varphi(\mathbf{x})$. Само решение принимается по состоянию датчика случайных чисел 1 и 0, вероятности которых соответственно равны $\varphi(\mathbf{x})$ и $1 - \varphi(\mathbf{x})$.

Вероятностные характеристики правила проверки гипотез представляются функцией мощности $\beta(\varphi|\boldsymbol{\vartheta}) = M[\varphi|\boldsymbol{\vartheta}]$, где $M[\cdot|\boldsymbol{\vartheta}]$ — символ математического ожидания по распределению наблюдаемого процесса с плотностью вероятности $W(\mathbf{x}|\boldsymbol{\vartheta})$. Значение функции мощности при $\boldsymbol{\vartheta} \in \Theta_0$ равно вероятности ложной тревоги, а при $\boldsymbol{\vartheta} \in \Theta_1$ — вероятности правильного обнаружения сигнала.

Правило обнаружения в условиях априорной неопределенности должно отвечать следующим основным требованиям. Во-первых, оно должно быть структурно устойчивым, т. е. его решающая функция φ не должна зависеть от неизвестных параметров распределения наблюдаемого процесса. Во-вторых, потери в эффективности обнаружения по сравнению с потерями при правилах, оптимальных при полной априорной информации, должны быть минимальными, а сами характеристики обнаружения — устойчивыми к изменению априорно неопределенных параметров задачи. Перечисленным требованиям наиболее полно отвечают так называемые равномерно наиболее мощные (РНМ) правила. Характерная особенность РНМ правила состоит в том, что оно при одной и той же решающей функции обеспечивает максимальную вероятность правильного обнаружения при любом значении $\vartheta \in \Theta_1$ и заданный уровень α вероятности ложной тревоги на множестве Θ_0. Устойчивость характеристик обнаружения РНМ правила обеспечивается гарантированным уровнем вероятности ложной тревоги при любых изменениях параметра $\vartheta \in \Theta_0$, а минимальные потери в эффективности — максимизацией вероятности правильного обнаружения сигнала при всех значениях $\vartheta \in \Theta_1$.

Однако РНМ правила существуют очень редко и в мало интересных для практики случаях. Поэтому были разработаны другие подходы к синтезу правил обнаружения в условиях априорной неопределенности. Для практического приложения к задачам обнаружения и различения сигналов достаточно эффективны подходы, основанные на принципах несмещенности, подобия и инвариантности [87]. При использовании этих принципов класс всех решающих правил, в котором обычно не существует РНМ правила, заменяется более узким классом правил со специальными свойствами. Сужение класса производится так, чтобы обеспечить существование в нем РНМ правила и одновременно получить ту или иную устойчивость характеристик обнаружения к изменению априорно неизвестных параметров задачи.

Остановимся на принципах несмещенности и подобия. При синтезе оптимального правила на основе принципа несмещенности выделяется класс $\mathcal{F}_{\text{нп}}$ правил, функции мощности которых удовлетворяют условиям несмещенности:

$$\beta(\varphi|\vartheta) \leqslant \alpha \text{ при всех } \vartheta \in \Theta_0; \qquad \beta(\varphi|\vartheta) \geqslant \alpha \text{ при всех } \vartheta \in \Theta_1. \tag{2.1}$$

Первое условие (2.1) гарантирует, как и в случае РНМ правила, заданный уровень α вероятности ложной тревоги. Второе условие (2.1) повышает устойчивость правила в том смысле, что исключает значения вероятности правильного обнаружения, меньшие значения вероятности ложной тревоги. Правила из класса $\mathcal{F}_{\text{нп}}$ называются несмещенными. Отметим, что РНМ правило, если оно имеется в классе всех решающих правил, оказывается несмещенным [87]. Поэтому переход к классу $\mathcal{F}_{\text{нп}}$ не сопровождается потерей РНМ правила в случае его существования. Оптимальное по критерию Неймана—Пирсона правило, у которого вероятность правильного обнаружения максимальна при каждом $\vartheta \in \Theta_1$ в классе $\mathcal{F}_{\text{нп}}$, называется РНМ несмещенным.

Принцип несмещенности приводит к построению РНМ несмещенного правила, если параметр ϑ разделяется (непосредственно или после некоторого преобразования) на полезный γ и мешающий π параметры. Полезным называют параметр, значения которого определяют выполнение гипотезы H_0 или альтернативы H_1, мешающим — параметр, изменение которого не влияет на выполнение любой из проверяемых гипотез.

В задачах обнаружения в роли мешающих выступают обычно параметры распределения шума и в роли полезных — параметры, зависящие от энергетических характеристик сигнала. Например, при обнаружении сигнала известной формы в гауссовском шуме $\gamma = a/\sigma^2$ и $\pi = 1/(2\sigma^2)$, где a — амплитуда сигнала; σ^2 — дисперсия шума. Множества Θ_0 и Θ_1 при наличии полезного и мешающего параметров выражаются в форме декартовых произведений: $\Theta_0 = \Gamma_0 \times \Pi$; $\Theta_1 = \Gamma_1 \times \Pi$, где Γ_0, Γ_1 — множества значений γ при гипотезе H_0 и альтернативе H_1; Π — множество значений π.

Функция мощности $\beta(\varphi|\vartheta)$ при довольно общем ограничении непрерывна по ϑ. Поэтому у несмещенных правил она равна постоянному значению α на границе Δ множеств Θ_0, Θ_1. Вследствие этого при синтезе РНМ несмещенного правила выделяется класс $\mathcal{F}_{\text{пп}}$ правил, удовлетворяющих условию

$$\beta(\varphi|\vartheta) = \alpha \quad \text{для всех} \quad \vartheta \in \Delta. \tag{2.2}$$

Затем в классе $\mathcal{F}_{\text{пп}}$ ищется РНМ правило уровня α для вероятности ложной тревоги и проверяется, что это правило является несмещенным. Условие (2.2) называется условием подобия правила на множестве Δ, удовлетворяющие ему правила — подобными на множестве Δ, соответственно РНМ правило в класса $\mathcal{F}_{\text{пп}}$ — РНМ подобным.

Основанием для перехода к классу подобных правил при синтезе РНМ несмещенного правила служит лемма, согласно которой РНМ подобное и несмещенное правила одного и того же уровня α вероятности ложной тревоги совпадают друг с другом, если их функции мощности непрерывны по ϑ и множество подобия является границей множеств Θ_0 и Θ_1 [87]. Переход к подобным правилам существенно упрощает задачу синтеза, если для мешающего параметра имеется достаточная статистика. Использование этой достаточной статистики позволяет исключить неизвестный мешающий параметр при синтезе РНМ несмещенного правила [87, 88].

2.1.2. Семейства распределений наблюдаемого процесса

В теории несмещенности и подобия к семействам распределений наблюдаемого процесса предъявляются определенные требования. Выделим основные классы семейств распределений, каждый из которых удовлетворяет одному из этих требований. В рассмотренных ниже распределениях параметр ϑ является характеристикой соответствующего семейства и может не совпадать с тем параметром, через который выражаются проверяемые гипотезы.

Семейства распределений с монотонным отношением правдоподобия. К этому классу относятся семейства $\mathcal{P} = \{W(\mathbf{x}|\vartheta);\ \vartheta \in \Theta\}$, у которых отношение правдоподобия $l(\mathbf{x}|\vartheta_1;\ \vartheta_2) = W(\mathbf{x}|\vartheta_1)/W(\mathbf{x}|\vartheta_2)$ монотонно относительно некоторой статистики $U(\mathbf{x})$ при любых $\vartheta_1 \neq \vartheta_2$, т. е. представимо в виде

$$l(\mathbf{x}|\vartheta_1;\ \vartheta_2) = f_{\vartheta_1;\ \vartheta_2}[U(\mathbf{x})],$$

где $f_{\vartheta_1;\ \vartheta_2}[\cdot]$ — монотонно возрастающая (убывающая) при всех $\vartheta_1;$ $\vartheta_2 \in \Theta$ функция. Например, отношение правдоподобия семейства $\mathcal{P} = \{W(\mathbf{x}|\vartheta) = k \exp[\vartheta U(\mathbf{x})]\}$ монотонно относительно статистики $U(\mathbf{x})$.

Данный класс семейства распределений играет важную роль при синтезе РНМ правил. Если отношение правдоподобия монотонно, то существует РНМ правило. При монотонно возрастающей функции $f_{\vartheta_1;\ \vartheta_2}$ РНМ правило имеет решающую функцию

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 \text{ при } U(\mathbf{x}) \geqslant C(\alpha); \\ 0 \text{ при } U(\mathbf{x}) < C(a), \end{cases}$$

где $C(\alpha)$ — порог, который не зависит от параметра ϑ и определяется только заданным уровнем α вероятности ложной тревоги [87].

Семейства распределений с достаточными статистиками. Статистика T называется достаточной для семейства $\mathcal{P} = \{W(\mathbf{x}|\vartheta);\ \vartheta \in \Theta\}$, если условное распределение выборки из наблюдаемого процесса при всех значениях статистики T не зависит от параметра $\vartheta \in \Theta$. Признак достаточности статистики дается теоремой факторизации, согласно которой статистика T достаточна для семейства $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда плотность вероятности факторизуется в виде

$$W(\mathbf{x}|\vartheta) = g_{\vartheta}[T(\mathbf{x})]\, h(\mathbf{x}),$$

где $g_{\vartheta}[\cdot]$ — неотрицательная функция, зависящая от параметра ϑ; $h[\cdot]$ — неотрицательная функция, в которую не входит параметр ϑ [87, 88]. Редукция наблюдаемого процесса к достаточной статистике не сопровождается потерей информации о семействе распределений. Поэтому достаточные статистики широко используются при синтезе правил проверки гипотез.

В теории несмещенности и подобия важную роль играют статистики, достаточные соответственно для мешающего и полезного параметров. При двухкомпонентном параметре $\vartheta = (\gamma;\ \pi)$ статистика U называется достаточной для параметра γ, если при каждом фиксированном значении π условное распределение выборки из наблюдаемого процесса не зависит от параметра γ при всех значениях статистики U. Аналогично определяется достаточная для параметра π статистика T. Из теоремы факторизации следует, что статистика T достаточна для параметра π тогда и только тогда, когда плотность вероятности

$$W(\mathbf{x}|\gamma;\ \pi) = g_{\gamma;\,\pi}[T(\mathbf{x})]\, h_{\gamma}(\mathbf{x}),$$

где функция $h_{\gamma}(\cdot)$ не зависит от параметра π (ее зависимость от параметра γ допускается). Например, у семейства $\mathcal{P} = \{W(\mathbf{x}|\gamma;\ \pi) =$

$= k(\gamma; \pi) \exp[\pi T(\mathbf{x})] I_0[\gamma U(\mathbf{x})] h(\mathbf{x})\}$ статистика T достаточна для параметра π, а статистика U — для параметра ϑ.

Полные семейства распределений. Обозначим $\mathcal{P}^T = \{W(t|\vartheta); \vartheta \in \Theta\}$ семейство распределений некоторой достаточной статистики T. Семейство $\mathcal{P}^T$ называется полным, если для произвольной функции $f(t)$ из равенства $M[f|\vartheta] = 0$, которое выполняется при всех $\vartheta \in \Theta$, следует, что $f(t) = 0$ при всех значениях t статистики T (точнее, при всех t, за исключением множества нулевой вероятности). В специальном, но практически важном случае вопрос о полноте семейства распределений достаточной статистики решается теоремой о полноте семейства распределений [87, 88]. Пусть достаточная статистика $T(\mathbf{x}) = (T_1(\mathbf{x}), \ldots, T_m(\mathbf{x}))$ и плотность вероятности исходного семейства

$$W(\mathbf{x}|\vartheta) = k[\lambda(\vartheta)] h(x) \exp\left[\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\vartheta) T_i(\mathbf{x})\right].$$

Тогда семейство $\mathcal{P}^T = \{W(t|\vartheta); \vartheta \in \Theta\}$ распределений достаточной статистики T будет полным, если множество $\Lambda = \{(\lambda_1(\vartheta), \ldots, \lambda_m(\vartheta)); \vartheta \in \Theta\}$ содержит m-мерный интервал, т. е. размерность множества Λ совпадает с размерностью статистики T.

В качестве примера рассмотрим повторную выборку из распределения Гаусса с нулевым средним и произвольной дисперсией σ^2. Для семейства распределений этой выборки достаточной является статистика $T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Так как плотность вероятности

$$W(\mathbf{x}|\sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp[\lambda(\sigma) T(\mathbf{x})], \quad \lambda(\sigma) = -1/(2\sigma^2)$$

и множество значений λ одномерно, то семейство распределений статистики полное. Отметим, что при полноте семейства распределений достаточной статистики исходное семейство не обязано быть полным. В этом нетрудно убедиться, если в приведенном примере выбрать функцию $f(\mathbf{x}) = x_1$, математическое ожидание которой равно нулю при всех распределениях семейства.

Симметричные семейства распределений. Этот класс семейств распределений рассматривается в тех случаях, когда в пространстве $\mathbf{X}$ реализаций наблюдаемого процесса существует некоторая группа $\mathbf{G}$ преобразований $\mathbf{X}$ на себя. Напомним, что под группой $\mathbf{G}$ понимается такая совокупность элементов g, которая удовлетворяет условиям:

1. Определена операция группового умножения, которая любым элементам $g_1; g_2 \in \mathbf{G}$ ставит в соответствие элемент $g_3 \in \mathbf{G}$. Элемент g_3 называется произведением элементов g_1 и g_2 и обозначается $g_1 g_2$.
2. Групповое умножение ассоциативно, т. е. $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3$.
3. Существует единичный элемент $e \in \mathbf{G}$, такой, что $ge = eg = g$ для всех $g \in \mathbf{G}$.
4. Для каждого элемента $g \in \mathbf{G}$ имеется обратный элемент $g^{-1} \in \mathbf{G}$, такой, что $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Если элементы $g \in \mathbf{G}$ являются преобразованиями пространства $\mathbf{X}$ на себя и групповое умножение $g_2 g_1$ определяется как результат последовательного применения преобразований g_1 и g_2, то $\mathbf{G}$ называется группой преобразований. Преобразованный элемент в $\mathbf{X}$ обозначается $g\mathbf{x}$.

Семейство распределений $\mathcal{P} = \{W(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\vartheta}); \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta\}$ называется симметричным относительно группы $\mathbf{G}$, если для любого преобразования $g \in \mathbf{G}$ найдется такое индуцированное в параметрическое пространство Θ преобразование g_*, при котором $g_* \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta$ и

$$W(g\mathbf{x} \mid g_* \boldsymbol{\vartheta}) \mid J_g \mid = W(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\vartheta}) \text{ для всех } \mathbf{x} \in \mathbf{X} \text{ и } \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta, \qquad (2.3)$$

где J_g — якобиан преобразования g. Совокупность $\mathbf{G}_*$ всех индуцированных преобразований g_* образует группу, если таковой является совокупность $\mathbf{G}$ преобразований в пространстве $\mathbf{X}$ [87].

Симметрия семейства $\mathcal{P}$ относительно группы $\mathbf{G}$ означает, что распределения преобразованной выборки также принадлежат семейству $\mathcal{P}$. Действительно, вводя новую переменную $\mathbf{y} = g\mathbf{x}$, находим $W(\mathbf{y}) = W(g^{-1}\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\vartheta}) \mid J_g \mid^{-1}$. После подстановки $\mathbf{x} = g^{-1}\mathbf{y}$ в равенство (2.3) получаем $W(g^{-1}\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\vartheta}) = W(\mathbf{y} \mid g_* \boldsymbol{\vartheta}) \mid J_g \mid$. Поэтому $W(\mathbf{y}) = W(\mathbf{y} \mid g_* \boldsymbol{\vartheta})$. Так как $y = g\mathbf{x} \in X$ и $g_* \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta$, то $W(\mathbf{y})$ принадлежит семейству $\mathcal{P}$ Например, семейство

$$\mathcal{P} = \left\{ W(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\vartheta}) = (2\pi\sigma^2)^{-1} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(x_1 - a\cos\varphi_0)^2 + (x_2 - a\sin\varphi_0)^2] \right\} \right\}$$

симметрично относительно группы ортогональных преобразований

$$g = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Индуцированные в пространство $\Theta = \{\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_1; \vartheta_2) : \vartheta_1 = a\cos\varphi_0/\sigma^2; \vartheta_2 = a\sin\varphi_0/\sigma^2\}$ преобразования $g_* = g$.

Экспоненциальные семейства распределений. Семейство $\mathcal{P}$ называется экспоненциальным, если плотность вероятности

$$W(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\vartheta}) = k[\lambda(\boldsymbol{\vartheta})] h(x) \exp\left[\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\boldsymbol{\vartheta}) T_i(\mathbf{x}) \right]; \quad \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta; \quad x \in \mathbf{X},$$

где $\mathbf{X}$ — евклидово пространство; Θ — некоторое параметрическое пространство; $T_i(\mathbf{x})$ — статистики; $h(\mathbf{x})$ — неотрицательная функция; $\lambda_i(\boldsymbol{\vartheta})$ — произвольные функции [87, 88].

Для экспоненциальных семейств вводят так называемое натуральное пространство Λ параметров λ_i. В это пространство включают все те значения λ_i, при которых интеграл от $h(\mathbf{x}) \exp[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i(\mathbf{x})]$ имеет конечное значение. Экспоненциальные семейства охватывают широкий круг задач обнаружения сигналов. Дадим примеры часто встречающихся экспоненциальных семейств.

1. Повторная выборка $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ из распределения Бернулли

$$W(x_i \mid p) = \begin{cases} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} \text{ при } x_i = 0, 1; \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Распределения этой выборки образуют экспоненциальное семейство с параметром $\lambda = \ln [p/(1-p)]$ и статистикой $T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

2. Повторная выборка из распределения Пуассона

$$W(x_i \mid \vartheta) = \begin{cases} \vartheta^{x_i} \exp(-\vartheta)/x_i! \text{ при } x_i = 0, 1, 2, \ldots; \\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Распределения выборки принадлежат экспоненциальному семейству с параметром $\lambda = \ln \vartheta$ и статистикой $T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

3. Повторная выборка из гауссовского распределения с плотностью вероятности

$$W(x_i \mid a;\ \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-0,5} \exp[-(x_i - a)^2/(2\sigma^2)].$$

Распределения выборки принадлежат экспоненциальному семейству с параметрами $\lambda_1 = 1/(2\sigma^2)$; $\lambda_2 = a/\sigma^2$ и статистиками

$$T_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2;\ T_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

4. Повторная выборка из Г-распределения с плотностью вероятности

$$W(x_i \mid \alpha;\ \beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta\Gamma(1+\alpha)} \left(\dfrac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha} \exp(-x_i/\beta) \text{ при } x_i > 0; \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $\alpha > -1$, $\beta > 0$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция. Распределения выборки образуют экспоненциальное семейство с параметрами $\lambda_1 = \alpha$; $\lambda_2 = -1/\beta$ и статистиками $T_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$; $T_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

5. Повторная выборка из χ^2-распределения с плотностью вероятности

$$W(x_i \mid \alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\alpha)^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x_i^{\frac{\nu}{2}-1} \exp(-x_i/(2\alpha)) \text{ при } x_i > 0; \\ 0 \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $\alpha > 0$, ν — число степеней свободы. Распределения выборки образуют экспоненциальное семейство с параметром $\lambda = -1/(2\alpha)$ и статистикой $T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

2.1.3. Синтез несмещенных правил проверки гипотез

Несмещенные правила проверки бинарных гипотез. При синтезе РНМ несмещенного правила полагается, что в задаче выделены одномерный полезный параметр γ, мешающий параметр π произвольной конечной размерности и проверяемые гипотезы сформулированы в виде

$$H_0 : \vartheta = (\gamma;\ \pi) \in \Theta_0 = \Gamma_0 \times \Pi;\ \ \Gamma_0 = \{\gamma : \gamma \leqslant \gamma_{гр}\};$$

$$H_1 : \vartheta \in \Theta_1 = \Gamma_1 \times \Pi;\ \ \Gamma_1 = \{\gamma : \gamma > \gamma_{гр}\}.$$

Обозначим через $\Delta = \{\gamma_{гр}\} \times \Pi$ границу множества Θ_0 и Θ_1, где $\gamma_{гр}$ — граничное значение полезного параметра, разделяющее гипотезы H_0 и H_1.

Синтез РНМ несмещенного правила состоит из ряда последовательных этапов.

Этап 1. На этом этапе класс $\mathcal{F}_{нп}$ несмещенных правил заменяется классом $\mathcal{F}_{пп}$ правил, подобных на границе Δ. Такая замена возможна, если функция мощности $\beta(\varphi|\vartheta)$ непрерывна по параметру ϑ (см. п. 2.1.1).

Этап 2. На этом этапе неизвестный мешающий параметр π заменяется наблюдаемыми значениями статистики T, достаточной для π. Такая замена возможна, если статистика T имеет полное семейство $\mathcal{P}_\Delta^T$ распределений на границе Δ.

Переход от параметра π к статистике T создает необходимые предпосылки для структурной устойчивости получаемого правила и достигается путем перехода от класса $\mathcal{F}_{пп}$ к классу $\mathcal{F}_{сн}$ правил структуры Неймана. Дадим определение правила структуры Неймана. Пусть для семейства $\mathcal{P}_\Delta^T$ распределений на границе Δ существует достаточная статистика T. Тогда правило проверки имеет структуру Неймана относительно T, если условное математическое ожидание его решающей функции

$$M[\varphi|\ T = t] = \alpha \qquad (2.4)$$

при всех значениях t статистики T, когда параметр $\vartheta \in \Delta$. Левая часть равенства (2.4) не зависит от параметра $\vartheta \in \Delta$ в силу достаточности статистики T для семейства $\mathcal{P}_\Delta^T$. Все правила структуры Неймана, как это следует из равенства (2.4), подобны на границе Δ.

При полноте семейства $\mathcal{P}_\Delta^T$ распределений статистики T на границе Δ верно и обратное утверждение, которое дается следующей теоремой [87, 88]. Пусть T — статистика, достаточная для семейства $\mathcal{P}_\Delta^T$. Тогда, чтобы все подобные правила имели структуру Неймана, необходимо и достаточно, чтобы семейство $\mathcal{P}_\Delta^T$ распределений статистики T было полным. Таким образом, в предположении полноты семейства $\mathcal{P}_\Delta^T$ оптимальное подобное правило можно искать в классе $\mathcal{F}_{сн}$.

Покажем, что переход к классу $\mathcal{F}_{сн}$ позволяет исключить неизвестный мешающий параметр π при синтезе оптимального подобного правила. Оптимальное (РНМ) подобное правило определяется условиями:

$$\beta(\varphi|\gamma_{гр};\ \pi) = \alpha \text{ при всех } \pi \in \Pi; \qquad (2.5)$$

$$\beta(\varphi|\gamma;\ \pi) = \max \text{ при всех } \gamma \in \Gamma_1;\ \pi \in \Pi. \qquad (2.6)$$

Пусть для параметра π имеется достаточная статистика T с полным семейством $\mathcal{P}_\Delta^T = \{W(t|\gamma_{гр};\ \pi);\ \pi \in \Pi\}$ распределений на границе Δ. Тогда согласно теореме о правилах структуры Неймана и тождеству (2.4) условие (2.5) эквивалентно условию

$$M[\varphi|\gamma_{гр};\ T = t] = \alpha \quad \text{при всех} \quad t \in \mathcal{T}. \tag{2.7}$$

Здесь и далее $\mathcal{T}$ — множество значений статистики T. Из равенства $M[\varphi|\gamma;\ \pi] = M[M(\varphi|\gamma;\ T = t)|\gamma;\ \pi]$, в котором условное математическое ожидание в правой части не зависит от π в силу достаточности статистики T, получаем эквивалентное выражение условия (2.6) в виде

$$M[\varphi|\gamma;\ T = t] = \max \text{ при всех } \gamma \in \Gamma_1 \text{ и } t \in \mathcal{T}. \tag{2.8}$$

В условиях (2.7) и (2.8) отсутствует неизвестный параметр π и вместо него фигурирует наблюдаемое значение статистики T. Это позволяет исключить при синтезе РНМ правила параметр π путем построения правил с решающими функциями $\varphi_t(x) = f(x;\ t)$ для каждого значения $t \in \mathcal{T}$ в отдельности с последующим их объединением в единое правило с решающей функцией $\varphi(x) = f[x;\ T(x)]$.

Этап 3. На этом этапе достигается структурная устойчивость в отношении полезного параметра γ и устанавливается функциональный вид РНМ несмещенного правила. В соответствии с результатами этапа 2 зафиксируем значение $t \in \mathcal{T}$ и заменим исходную плотность вероятности $W(x|\gamma;\ \pi)$ плотностью $W(x|\gamma;\ t)$ условного распределения наблюдаемого процесса. В терминах условного распределения проверяемые гипотезы формулируются в виде

$$H_0 : \gamma \in \Gamma_0;\ H_1 : \gamma \in \Gamma_1;\ t \in \mathcal{T}. \tag{2.9}$$

Для построения правила проверки гипотез (2.9) временно зафиксируем два значения: $\gamma_{гр}$ и $\gamma_1 \in \Gamma_1$ полезного параметра, что равносильно замене сложных гипотез (2.9) простыми гипотезами

$$H_0' : \gamma = \gamma_{гр};\ H_1' : \gamma = \gamma_1;\ t \in \mathcal{T}.$$

Оптимальное по Нейману — Пирсону правило проверки простых гипотез H_0', H_1' имеет, как известно, решающую функцию

$$\varphi_t(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } l(x|\gamma_1;\ \gamma_{гр};\ t) \geqslant C(\alpha); \\ 0 \text{ в остальных случаях,} \end{cases} \tag{2.10}$$

где $l(x|\gamma_1;\ \gamma_{гр};\ t) = W(x|\gamma_1;\ t)/W(x|\gamma_{гр};\ t)$ — условное отношение правдоподобия; $C(\alpha)$ — порог, определяемый заданным уровнем α вероятности ложной тревоги. Допустим, что семейство $\mathcal{P}_t$ условных распределений наблюдаемого процесса имеет монотонное отношение правдоподобия $l(x|\gamma_1;\ \gamma_2;\ t) = f_{\gamma_1;\ \gamma_2;\ t}[U(x)]$ при любых $\gamma_1 > \gamma_2$ и $t \in \mathcal{T}$, где для конкретности $f_{\gamma_1;\ \gamma_2;\ t}$ — монотонно возрастающая функция. В этом случае, положив $\gamma_2 = \gamma_{гр}$, получим эквивалентное выражение решающей функции (2.10)

$$\varphi_t(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } U(x) \geqslant f^{-1}_{\gamma_1;\ \gamma_{гр};\ t}[C(\alpha)]; \\ 0 \text{ в остальных случаях,} \end{cases} \tag{2.11}$$

где $f^{-1}_{\gamma_1;\ \gamma_{гр};\ t}(\cdot)$ — обратная для $f_{\gamma;\ \gamma_{гр};\ t}(\cdot)$ функция.

Рассматривая $f^{-1}_{\gamma_1;\ \gamma_{гр};\ t}[C(\alpha)]$ как новый порог L, находим его из условия (2.7). В условие (2.7) не входят значения параметра $\gamma_1 \in \Gamma_1$. Поэтому порог L не зависит от γ_1 и определяется только уровнем α и значением t статистики T, т. е. является функцией $L(t;\ \alpha)$ (зависимость порога L от $\gamma_{гр}$ несущественна с точки зрения структурной устойчивости правила, так как $\gamma_{гр}$ априорно известно). Таким образом, решающую функцию (2.11) можно записать в форме

$$\varphi_t(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 \text{ при } U(\mathbf{x}) \geqslant L(t;\ \alpha); \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.12}$$

В связи с независимостью решающей функции (2.12) от значения $\gamma_1 \in \Gamma_1$ найденное правило структурно устойчиво относительно полезного параметра и максимизирует вероятность правильного обнаружения не только при $\gamma = \gamma_1$, но и при произвольных значениях $\gamma \in \Gamma$. Тем самым правило с решающей функцией (2.12) удовлетворяет (2.7) и (2.8) и является поэтому РНМ правилом структуры Неймана.

Нетрудно проверить, что в случае монотонности отношения правдоподобия $l(\mathbf{x}|\gamma_1;\ \gamma_2;\ t)$ выполняется неравенство

$$M[\varphi_t|\gamma;\ T = t] \leqslant \alpha \text{ для всех } \gamma_2 \in \Gamma_0. \tag{2.13}$$

Из неравенства (2.13) следует, что полученное правило имеет заданный уровень α вероятности ложной тревоги при любых $t \in \mathcal{T}$, т. е. является правилом структуры Неймана с уровнем α. В силу полноты семейства распределений статистики T на границе Δ правило с решающей функцией (2.12), в которой t заменено $T(\mathbf{x})$, совпадает с РНМ подобным правилом уровня α и поэтому согласно этапу 1 является искомым РНМ несмещенным правилом. Итак, получено структурно устойчивое относительно полезного и мешающего параметров РНМ несмещенное правило с решающей функцией

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 \text{ при } U(\mathbf{x}) \geqslant L[T(\mathbf{x});\ \alpha]; \\ 0 \text{ в остальных случаях,} \end{cases} \tag{2.14}$$

где пороговая функция $L[T(\mathbf{x});\ \alpha]$ определяется по заданному уровню α вероятности ложной тревоги из условия (2.7).

При построении РНМ несмещенного правила предполагалось выполнение ряда условий, которые соберем вместе для удобства применения принципа несмещенности.

1. Параметр $\boldsymbol{\theta}$, характеризующий семейство $\mathcal{P}$ распределений выборки из наблюдаемого процесса $\mathbf{x}$, разделяется на полезный γ и мешающий π параметры.

2. Семейство $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1$ таково, что функция мощности любого правила непрерывна по параметру $\boldsymbol{\theta}$.

3. Для мешающего параметра π существует достаточная статистика T.

4. Семейство $\mathcal{P}^T_\Delta$ распределений статистики T на границе Δ проверяемых гипотез является полным.

5. Семейство $\mathcal{P}_t$ условных распределений выборки x при любом значении t статистики T имеет монотонное отношение правдоподобия относительно некоторой статистики U.

Из этих условий наиболее ограничительно требование монотонности отношения правдоподобия семейства $\mathcal{P}_t$. Остальные условия обычно выполняются, если в отсутствие сигнала распределения наблюдаемого процесса образуют экспоненциальное семейство. Монотонность отношения правдоподобия семейства $\mathcal{P}_t$ часто может быть установлена без вычисления условного распределения на основе следующего результата. Если для полезного параметра имеется достаточная статистика U, т. е. плотность вероятности

$$W(\mathbf{x}|\gamma;\ \pi) = k(\gamma,\ \pi)\, g_1[U(\mathbf{x});\ \gamma]\, g_2[T(\mathbf{x});\ \pi]\, h(\mathbf{x}),$$

и функция $f_{\gamma 1;\,\gamma 2}(U) = g_1(U;\ \gamma_1)/g_1(U;\ \gamma_2)$ монотонна относительно U при всех $\gamma_1;\ \gamma_2$, то семейство $\mathcal{P}_t$ имеет монотонное отношение правдоподобия относительно U. Этот результат следует из того, что отношение правдоподобия $l(\mathbf{x}|\gamma_1;\ \gamma_2;\ t) = f_{\gamma 1;\,\gamma 2}[U(\mathbf{x})]/M[f_{\gamma 1;\,\gamma 2} \mid \gamma_2;\ T = t]$.

Построение пороговой функции РНМ несмещенного правила. Выражение (2.14) дает общую структуру РНМ несмещенного правила. Для его конкретизации необходимо еще определить пороговую функцию L. В общем случае она ищется из равенства (2.7), которое рассматривается как уравнение относительно L. Однако этот путь часто не приводит к успеху из-за сложностей вычисления в явном виде условной плотности $W(\mathbf{x}|\gamma;\ t)$ и решения уравнения (2.7). Существуют способы построения пороговой функции, не требующие вычисления $W(\mathbf{x}|\ \gamma t)$ и решения уравнения (2.7). Они устанавливают вид пороговой функции с точностью до некоторой константы, которая далее может быть уточнена при моделировании правила. Один из таких способов дан в гл. 5 монографии [87]. Приведем еще два способа, которые могут быть использованы в случае симметрии семейства $\mathcal{P}_\Delta$ распределений на границе Δ относительно некоторой группы $\mathbf{G}$ преобразований пространства $\mathbf{X}$ выборок из наблюдаемого процесса.

Пусть $f(u,\ t)$ — некоторая непрерывная функция, возрастающая по u при каждом t. Если 1) семейство $\mathcal{P}_\Delta$ симметрично относительно группы $\mathbf{G}$; 2) индуцированная в параметрическое пространство группа $\mathbf{G}_*$ транзитивна в Δ (т. е. для любых $\vartheta', \vartheta'' \in \Delta$ найдется такое преобразование $g_* \in \mathbf{G}_*$, что $\vartheta'' = g_*\vartheta'$); 3) статистика $V(\mathbf{x}) = f[U(\mathbf{x});\ T(\mathbf{x})]$ инвариантна относительно группы $\mathbf{G}$ (т. е. $V(g\mathbf{x}) = V(\mathbf{x})$ при всех $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $g \in \mathbf{G}$), то пороговая функция $L[T(\mathbf{x});\ \alpha] = f^{-1}[C(\alpha);\ T(\mathbf{x})]$, где $f^{-1}(\cdot\,;\ t)$ — обратная для $f(\cdot\,;\ t)$ функция; $C(\alpha)$ — некоторая константа, не зависящая от наблюдения $\mathbf{x}$ и определяемая только заданным уровнем вероятности ложной тревоги. Данный способ основан, по существу, на эвристическом отыскании пороговой функции, так как требует знания функции f. Он удобен, когда надо убедиться в том, что некоторая функция действительно является пороговой для несмещенного правила.

Следующий способ не предполагает эвристического подхода и дает каноническое построение пороговой функции. Он применим, если 1) семейство $\mathcal{P}_\Delta$ симметрично относительно некоторой группы $\mathbf{G}$; 2) ин-

дуцированная группа $\mathbf{G}_*$ транзитивна в Δ; 3) при всех $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ и $g \in \mathbf{G}$ статистика $U(\mathbf{x})$ правила (2.14) удовлетворяет равенству

$$U(g\mathbf{x}) = \mu_1(g)\, U(\mathbf{x}) + \mu_2(g), \qquad (2.15)$$

где $\mu_1(\cdot)$ и $\mu_2(\cdot)$ — некоторые функционалы на группе $\mathbf{G}$.

Введем в пространстве $\mathcal{T}$ значений статистики T группу $\bar{\mathbf{G}} = \{\bar{g}\}$ индуцированных преобразований $\bar{g}$, определенных тождеством $\bar{g}T \equiv T(g\mathbf{x})$, где $g \in \mathbf{G}$. Показано, что при выполнении условий 1 и 2 и полноте семейства $\mathcal{P}_\Delta^T$ распределений статистики T на границе Δ группа $\mathbf{G}$ транзитивна в $\mathcal{T}$ [109]. Отображение группы $\mathbf{G}$ в группу $\bar{\mathbf{G}}$ без отграничения общности полагаем изоморфным (взаимно-однозначным), так как в противном случае в группе $\mathbf{G}$ можно выделить подгруппу, которая изоморфно отображается в группу $\mathbf{G}$ и относительно которой симметрично семейство $\mathcal{P}_\Delta$

Зафиксируем некоторое начальное значение t_0 статистики T и возьмем произвольное ее значение $t \in \mathcal{T}$. В силу транзитивности группы $\bar{\mathbf{G}}$ найдется такое преобразование $\bar{g}_t \in \bar{\mathbf{G}}$, что $t = \bar{g}_t t_0$. Данное преобразование отыскивается путем решения уравнения $\bar{g}_t t_0 = t$ относительно $\bar{g}_t$. Обозначим через $g_{T(\mathbf{x})}$ преобразование из группы $\mathbf{G}$, которое индуцируется в преобразование $\bar{g}_t$, и введем статистики

$$V_1[T(\mathbf{x})] = \mu_1[g_{T(\mathbf{x})}];\ V_2[T(\mathbf{x})] = \mu_2[g_{T(\mathbf{x})}]. \qquad (2.16)$$

Тогда при выполнении условий 1—3 и полноте семейства $\mathcal{P}_\Delta^T$ пороговая функции

$$L[T(\mathbf{x});\ \alpha] = C(\alpha) V_1[T(\mathbf{x})] + V_2[T(x)], \qquad (2.17)$$

где $C(\alpha)$ — константа, определяемая только уровнем α вероятности ложной тревоги. Доказательство выражения (2.17) основано на эквивалентном представлении правила (2.14) в форме сравнения с постоянным порогом $C(\alpha)$ статистики

$$V(\mathbf{x}) = \{U(\mathbf{x}) - V_2[T(\mathbf{x})]\}/V_1[T(\mathbf{x})].$$

Такое представление возможно благодаря монотонности статистики V относительно U и ее независимости в вероятностном смысле от T (независимость от T есть следствие полноты семейства $\mathcal{P}_\Delta^T$ и подобия статистики V, которая вытекает из условий 1—3, [88]).

Отметим, что выбор начального значения t_0 не влияет на функциональный вид пороговой функции вследствие единственности РНМ несмещенного (подобного) правила. От выбора t_0 зависит лишь константа k, значение которой все равно уточняется после построения правила в соответствии с заданным уровнем α вероятности ложной тревоги. Независимость функционального вида пороговой функции от t_0 можно полезно использовать, выбирая t_0 так, чтобы упростить решение уравнения $\bar{g}_t t_0 = t$ относительно $\bar{g}_t$. Единственное требование к выбору значения t_0 сводится к тому, чтобы оно не принадлежало собственному подпространству группы $\bar{\mathbf{G}}$.

Дадим пример использования рассмотренного способа построения пороговой функции. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{X} = R_2$, где R_2 — двумерное евклидово пространство; $T(\mathbf{x}) = (T_1(\mathbf{x}), T_2(\mathbf{x}))$, где $T_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$; $T_2(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$, и $U(\mathbf{x}) = s_1 x_1 + s_2 x_2$, где $s_1 \neq s_2 \neq 1$. Пусть также условия применения данного способа выполняются для группы $\mathbf{G} = \{g: x_1 \to \delta x_1 + c; x_2 \to \delta x_2 + c; \delta \in (0; \infty); c \in (-\infty; \infty)\}$. Так как $U(gx) = \delta U(\mathbf{x}) + c(s_1 + s_2)$, то $\mu_1(g) = \delta$, $\mu_2(g) = c(s_1 + s_2)$. Замечая, что $T_1(gx) = \delta^2 T_1(\mathbf{x}) + 2c\delta T_2(\mathbf{x}) + 2c^2$ и $T_2(gx) = \delta T_2(\mathbf{x}) + 2c$, находим индуцированную группу $\overline{\mathbf{G}} = \{\bar{g}: t_1 \to \delta^2 t_1 + 2c\delta t_2 + 2c^2; t_2 \to \delta t_2 + 2c\}$. Выберем начальное значение $t_0 = (1; 0)$ и решим уравнение $\bar{g}_t t_0 = t$ относительно $\bar{g}_t$. Обозначая через δ_t и c_t параметры преобразования $\bar{g}_t$, находим систему уравнений $\delta_t^2 + 2c_t^2 = t_1$; $2c_t = t_2$. Решая данную систему, получаем $\delta_t = (t_1 - t_2^2/2)^{1/2}$; $c_t = t_2/2$,

Таким образом, преобразование $g_{T(\mathbf{x})}$ задается параметрами $\delta_{T(\mathbf{x})} = [T_1(\mathbf{x}) - T_2^2(\mathbf{x})/2]^{1/2}$; $c_{T(\mathbf{x})} = T_2(\mathbf{x})/2$. Поэтому $V_1[T(\mathbf{x})] = [T_1(\mathbf{x}) - T_2^2(\mathbf{x})/2]^{1/2}$; $V_2[T(\mathbf{x})] = (s_1 + s_2) T_2(\mathbf{x})/2$ и пороговая функция $L[T(\mathbf{x}), \alpha] = C(\alpha)[T_1(\mathbf{x}) - T_2^2(\mathbf{x})/2]^{1/2} + (s_1 + s_2) T_2(\mathbf{x})/2$.

Многоальтернативные несмещенные и подобные правила. Выше была рассмотрена теория несмещенных и подобных правил проверки бинарных гипотез, когда гипотезе H_0 сопоставлялась единственная альтернатива H_1. Эту теорию при обобщении критерия Неймана—Пирсона, понятий несмещенности и подобия можно распространить на случай проверки многоальтернативных гипотез [67]. Многоальтернативные гипотезы встречаются в тех случаях, когда требуется не только обнаружить сигнал, но и определить, какой сигнал принят. Например, при локационном обнаружении цели на интервале дальности с указанием элемента разрешения, в котором цель находится, гипотезе об отсутствии цели сопоставляется ряд альтернатив о ее наличии в определенном элементе дальности.

Сопоставим гипотезе H_0 альтернативы H_i, $i = \overline{1, m}$, и будем полагать, что гипотезе H_0 отвечает семейство $\mathcal{P}_0 = \{W(\mathbf{x}|\pi); \pi \in \Pi\}$, а альтернативам H_i — семейства $\mathcal{P}_i = \{W(\mathbf{x}|i; \gamma, \pi); \gamma \in \Gamma; \pi \in \Pi\}$, где π — мешающий параметр; γ — полезный параметр, такой, что при $\gamma = 0$ плотность вероятности $W(x \mid i, \gamma; \pi) = W(\mathbf{x} \mid \pi)$ при всех $i = \overline{1, m}$. В терминах этих семейств распределений гипотеза и альтернативы формулируются в виде

$$H_0: \gamma = 0; \pi \in \Pi; H_k: \gamma \in \Gamma; i = k; \pi \in \Pi; k = \overline{1, m}. \qquad (2.18)$$

Множества Γ и Π могут быть произвольными множествами евклидова пространства, единственное требование состоит в том, что $\gamma = 0$ является граничной точкой множества Γ, но ему не принадлежит. В этом случае граница между гипотезой H_0 и альтернативами H_i задается множеством $\Delta = \{\gamma = 0\} \times \Pi$, совпадающим с множеством Θ_0, определяющим гипотезу H_0.

Качество правила проверки многоальтернативных гипотез будем характеризовать, следуя критерию Неймана — Пирсона, полной вероятностью правильного обнаружения

$$D(\gamma; \pi) = \sum_{i=1}^{m} p_i D_i (\gamma; \pi)$$

при заданном уровне α вероятности ложной тревоги. Здесь и далее D_i — вероятности правильного решения о выполнении отдельных альтернатив H_i; p_i — априорные вероятности альтернатив H_i при условии, что гипотеза H_0 не выполняется ($\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$). Под ложной тревогой понимается решение о выполнении той или иной альтернативы (все равно какой), когда в действительности верна гипотеза H_0.

Обозначим через $\varphi(\mathbf{x}) = (\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_m(\mathbf{x}))$ решающую функцию и через $\beta(\varphi \mid \vartheta) = (\beta_1(\varphi|\vartheta), \ldots, \beta_m(\varphi|\vartheta))$ функцию мощности правила проверки гипотез (2.18), где $\varphi_i(\mathbf{x})$ — вероятность решения в пользу альтернативы H_i при наблюдении $\mathbf{x}$; $\beta_i(\varphi|\vartheta)$ — вероятность принятия H_i при значении параметра $\vartheta = (k, \gamma, \pi)$. Решение об отсутствии какого-либо сигнала при наблюдении $\mathbf{x}$ принимается с вероятностью $1 - \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(\mathbf{x})$. Если правило нерандомизированное, то при каждом наблюдении $\mathbf{x}$ либо все компоненты $\varphi_i(\mathbf{x}) = 0$, либо одна из них равна единице, а остальные — нулю. В случае рандомизированного правила $0 \leqslant \varphi_i(\mathbf{x}) \leqslant 1$, причем $\sum_{i=1}^{m} \varphi_i(\mathbf{x}) \leqslant 1$. В новых обозначениях вероятности правильного обнаружения $D_i(\gamma; \pi) = \beta_i(\varphi|i; \gamma; \pi)$ и вероятность ложной тревоги $F(\pi) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i(\varphi|i; \gamma = 0; \pi)$.

Правило проверки многоальтернативных гипотез называется несмещенным, если его функция мощности удовлетворяет условиям:

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i(\varphi|i; \gamma = 0; \pi) \leqslant \alpha \text{ при всех } \pi \in \Pi;$$

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i(\varphi|i; \gamma; \pi) \geqslant \alpha \text{ при всех } \gamma \in \Gamma; \pi \in \Pi. \qquad (2.19)$$

Правило называется подобным на множестве $\Delta = \{\gamma = 0\} \times \Pi$, если

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i(\varphi|i; \gamma = 0; \pi) = \alpha \text{ при всех } \pi \in \Pi. \qquad (2.20)$$

Условия (2.19) и (2.20) обобщают на многоальтернативный случай условия несмещенности (2.1) и условие подобия (2.2) правила проверки бинарных гипотез.

В задачах обнаружения априорные вероятности p_i обычно не известны. Поэтому естественно выделить те правила, у которых полная вероятность правильного обнаружения инвариантна к изменению p_i. Используя равенство $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, можно установить, что вероятность

$D(\gamma;\ \pi)$ инвариантна относительно p_i тогда и только тогда, когда $D_i(\gamma;\ \pi) = D_k(\gamma;\ \pi)$ при всех $\gamma \in \Gamma$, $\pi \in \Pi$ и любых $i, k = \overline{1, m}$. С учетом данного замечания правило считаем оптимальным (РНМ), если при всех $\gamma \in \Gamma$ и $\pi \in \Pi$:

$$1)\ D(\gamma;\ \pi) = \max;\ 2)\ F(\pi) \leqslant \alpha;$$
$$3)\ D_i(\gamma;\ \pi) = D_k(\gamma;\ \pi),\ i, k = \overline{1, m}. \qquad (2.21)$$

Многоальтернативные РНМ правила существуют так же редко, как и РНМ правила проверки бинарных гипотез. Однако в довольно широком классе задач, в которых отсутствуют РНМ правила, тем не менее имеются РНМ несмещенные (подобные) правила. Эти правила наряду с условиями (2.21) удовлетворяют еще условиям несмещенности (2.19) или условию подобия (2.20). Все посылки, которые требуются для построения РНМ несмещенных и подобных правил проверки бинарных гипотез, необходимы также и в многоальтернативном случае. Дополнительно к этим посылкам при проверке многоальтернативных гипотез добавляются требование независимости нормирующего множителя плотности вероятности $W(\mathbf{x}|i;\ \gamma;\ \pi)$ от альтернативы H_i и требование существования такой совокупности $\mathbf{G} = \{g_i;\ i = \overline{1,m}\}$ взаимно-однозначных преобразований $\mathbf{X} \to \mathbf{X}$, что:

1) для любых $g_i, g_k \in \mathbf{G}$ произведение $g_i g_k \in \mathbf{G}$;

2) $W(g_i\mathbf{x}|\pi)|J_{g_i}| = W(\mathbf{x}|\pi)$ при всех $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$; $\pi \in \Pi$; $i = \overline{1, m}$; (2.22)

3) $W(g_i\,\mathbf{x}|i;\ \gamma;\ \pi)|J_{g_i}| = W(\mathbf{x}|k = 1;\ \gamma;\ \pi) =$ при всех $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$; $\gamma \in \Gamma$; $\pi \in \Pi$; $i = \overline{1, m}$.

При выполнении указанных посылок существует многоальтернативное РНМ несмещенное (подобное) правило [67]. Решающая функция такого нерандомизированного правила

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} (\varphi_1(\mathbf{x}) = 0, \ldots, \varphi_m(\mathbf{x}) = 0) \text{ при } \max\limits_{k=\overline{1,m}} U_k(\mathbf{x}) \leqslant L[T(\mathbf{x});\ \alpha]; \\ (0, \ldots, \varphi_i(\mathbf{x}) = 1; 0, \ldots, 0) \text{ при } \max\limits_{k=\overline{1,m}} U_k(\mathbf{x}) = U_i(\mathbf{x}) > \\ \qquad > L[T(\mathbf{x});\ \alpha],\ i = \overline{1, m}, \end{cases} \qquad (2.23)$$

где T — статистика, достаточная для мешающего параметра π; U_k, $k = \overline{1,m}$, — статистики, относительно которых монотонны условные отношения правдоподобия $l_k(\mathbf{x} \mid \gamma;\ t) = W(\mathbf{x} \mid k;\ \gamma;\ t)/W(\mathbf{x} \mid t)$; $W(\mathbf{x}|k;\ \gamma;\ t)$; $W(\mathbf{x}|\ t)$ — плотности условных распределений соответственно при альтернативе H_k и гипотезе H_0 (они не зависят от π в силу достаточности T для π). Пороговая функция правила (2.23) может быть найдена либо из уравнения (2.7), либо одним из приведенных выше способов, при использовании которых надо только положить $U(\mathbf{x}) = \max\limits_{k=\overline{1,m}} U_k(\mathbf{x})$.

Допустимость РНМ несмещенного правила. РНМ несмещенные правила проверки как бинарных, так и многоальтернативных гипотез обладают важным свойством допустимости. Это свойство означает, что не существует другого структурно устойчивого правила, у которого при том же уровне вероятности ложной тревоги вероятность правильного обнаружения была бы не меньше этой вероятности у РНМ несмещенного правила при всех значениях параметра из области альтернатив [87]. Иначе говоря, если вероятность правильного обнаружения у некоторого правила выше вероятности правильного обнаружения у РНМ несмещенного правила при некоторых значениях параметра, то обязательно найдутся такие значения параметра, при которых она будет меньше, чем у РНМ несмещенного правила, и даже меньше уровня вероятности ложной тревоги. Благодаря свойству допустимости РНМ несмещенных правил принцип несмещенности предпочтительнее других подходов к преодолению априорной неопределенности, если, конечно, для его применения выполняются соответствующие условия.

Локально наиболее мощные (ЛНМ) несмещенные и подобные правила. В отсутствие РНМ несмещенных (подобных) правил могут оказаться полезными ЛНМ правила, которые максимизируют производную функции мощности при малых значениях полезного параметра. Ограничимся случаем проверки бинарных гипотез и положим, что плотность вероятности факторизуется в виде

$$W(\mathbf{x}|\gamma;\ \pi) = k(\gamma;\ \pi)\, g_1(\mathbf{x};\ \gamma) g_2[T(\mathbf{x});\ \pi],$$

где k — нормирующий множитель; γ — полезный, возможно многомерный параметр, равный нулю при выполнении гипотезы H_0.

Правило называется ЛНМ несмещенным (подобным), если оно удовлетворяет условиям несмещенности (2.1) или условию подобия (2.2) при $\gamma = 0$ и для его функции мощности $\beta(\varphi|\gamma;\ \pi)$ выполняется соотношение

$$\sum_{j=1}^{r} \mu_j \partial\beta(\varphi \mid \gamma;\ \pi)/\partial\gamma_j = \max \text{ при } \gamma = 0 \text{ и всех } \pi \in \Pi,$$

где r — размерность полезного параметра $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$; μ_j — заданные весовые множители. Решающая функция ЛНМ несмещенного (подобного) правила задается выражением (2.14), в котором статистика

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{r} \mu_j U_j(\mathbf{x}), \tag{2.24}$$

где $U_j(\mathbf{x}) = df(\mathbf{x};\ \gamma)/d\gamma_j$ при $\gamma = 0$, $f(\mathbf{x};\ \gamma) = g_1(\mathbf{x};\ \gamma)/g_1(\mathbf{x};\ \gamma = 0)$ [109]. Пороговая функция ЛНМ несмещенного (подобного) правила отыскивается теми же способами, что и у РНМ несмещенного (подобного) правила.

2.2. Несмещенные правила обнаружения и различения сигналов

2.2.1. Обнаружение и различение сигналов в гауссовском шуме неизвестной мощности

Рассмотрим задачу обнаружения сигнала $\sqrt{E}s(t)$ на фоне гауссовского шума. Наблюдаемым процессом $x(t)$, $t \in [0, T]$, считаем колебание на выходе линейного тракта приемника (ЛТП) с П-образной амплитудно-частотной характеристикой и полосой пропускания Δf. Шум на входе ЛТП полагаем белым с корреляционной функцией $N_0\delta(t_2 - t_1)$. Сигнал $s(t)$ принимаем полностью известным, имеющим единичную энергию. К априорно неопределенным параметрам относим энергию $E \in (0, \infty)$ принятого сигнала и спектральную плотность $N_0 \in (0, \infty)$ шума. Коэффициент передачи ЛТП полагаем равным 1.

Образуем выборку $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_\nu)$ объема $\nu = \Delta f T$ из отсчетов $\dot{x}_i$ комплексной огибающей $\dot{x}(t)$ наблюдаемого процесса в моменты времени $t_i = i/\Delta f$. Плотность вероятности этой выборки

$$W(\dot{\mathbf{x}} \mid E;\ N_0) = k \exp\left\{-\frac{1}{4N_0\,\Delta f}\,\|\dot{\mathbf{x}} - \sqrt{E}\,\dot{\mathbf{s}}\|^2\right\}, \qquad (2.25)$$

где $k = 1/(4\pi N_0 \Delta f)$; $\dot{\mathbf{s}} = (\dot{s}_1, \ldots, \dot{s}_\nu)$ — сигнальный вектор, образованный из отсчетов комплексной огибающей $\dot{s}(t)$ сигнала $s(t)$; $\|\cdot\|$ — норма в комплексном евклидовом пространстве.

Введем полезный $\gamma = \sqrt{E}/(2N_0)$ и мешающий $\pi = -1/(4N_0)$ параметры и статистики $U(\dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\Delta f}\,\mathrm{Re}\langle \dot{\mathbf{x}};\ \dot{\mathbf{s}}\rangle$, $T(\dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\Delta f}\,\|\dot{\mathbf{x}}\|^2$, где $\langle\cdot;\cdot\rangle$ — скалярное произведение в комплексном евклидовом пространстве. При большом произведении $\Delta f T$ (большой базе сигнала) статистики U и T можно приближенно представить в интегральной форме:

$$U(\dot{\mathbf{x}}) = \mathrm{Re}\int_0^T \dot{x}(t)\,\dot{s}^*(t)\,dt; \qquad (2.26)$$

$$T(\dot{\mathbf{x}}) = \int_0^T |\dot{x}(t)|^2\,dt. \qquad (2.27)$$

Через введенные параметры и статистики выражение (2.25) записывается в форме плотности вероятности экспоненциального семейства распределений

$$W(\dot{\mathbf{x}} \mid \gamma;\ \pi) = k \exp\left(\frac{\gamma^2}{2\pi}\right) \exp\left[\pi T(\dot{\mathbf{x}}) + \right.$$

$$\left. + \gamma U(\dot{\mathbf{x}})\right],\ \gamma \in [0, \infty);\ \gamma \in [0, \infty);\ \pi \in (-\infty, 0). \qquad (2.28)$$

Задача обнаружения через полезный и мешающий параметры формулируется как задача проверки сложных гипотез:

$$H_0: \vartheta = (\gamma;\ \pi) \in \Theta_0 = \Gamma_0 \times \Pi;\ \Gamma_0 = \{\gamma = 0\};\ \Pi = (-\infty, 0);$$

$$H_1:\ \vartheta \in \Theta_1 = \Gamma_1 \times \Pi;\ \Gamma_1 = (0, \infty).$$

Из (2.28) и теоремы факторизации получаем, что статистика (2,26) достаточна для полезного параметра γ и статистика (2.27) — для мешающего параметра π. Согласно теореме о полноте семейства распределения, статистики T образуют полное семейство на границе $\Delta = \Gamma_0 \times \Pi$. Используя (2.28) и свойства экспоненциальных семейств распределений [87], можно установить, что функция мощности любого правила непрерывна по параметру ϑ и семейство условных распределений имеет монотонное отношение правдоподобия относительно статистики U при всех значениях статистики T. Таким образом, в рассматриваемой задаче существует РНМ несмещенное правило с решающей функцией (2.14). Для окончательной конкретизации правила найдем его пороговую функцию.

Семейство $\mathcal{P}_\Delta$ распределений наблюдаемого процесса на границе Δ симметрично относительно группы $\mathbf{G} = \{g: x(t) \to \delta x(t),\ \delta \in (0,\infty)\}$, масштабных преобразований, так как этой группе соответствуют произвольные изменения спектральной плотности шума. Индуцированные в параметрическое пространство Π преобразования образуют группу $\mathbf{G}_* = \{g_*: \pi \to \pi/\delta^2;\ \delta \in (0,\ \infty)\}$, транзитивную в пространстве Π. Статистика U удовлетворяет равенству (2.15) при $\mu_1(g) = \delta$ и $\mu_2(g) = 0$, где δ — параметр, задающий преобразование $g \in \mathbf{G}$. Поэтому для построения пороговой функции воспользуемся вторым способом, рассмотренным в п. 2.1.3. Так как индуцированная группа $\overline{\mathbf{G}} = \{\overline{g}: t \to \delta^2 t;\ \delta \in (0,\ \infty)\}$, то преобразование g_t, удовлетворяющее уравнению $g_t t_0 = t$, задается параметром $\delta^2 = t/t_0$. Соответствующее ему преобразование $g_{T(\dot{x})}$ имеет параметр $\delta = \sqrt{T(\dot{x})/t_0}$. Тем самым статистика (2.16) $V_1[T(\dot{x})] = \sqrt{T(\dot{x})}/\sqrt{t_0}$. Полагая $t_0 = 1$ и используя равенство (2.17), находим пороговую функцию

$$L[T(\dot{x});\ \alpha] = C(\alpha)\sqrt{T(\dot{x})}. \tag{2.29}$$

Из (2.14), (2.26) и (2.29) получаем решающую функцию искомого правила

$$\varphi(\dot{x}) = \begin{cases} 1 \text{ при } \operatorname{Re}\int_0^T \dot{x}(t)\,\dot{s}^*(t)\,dt > C(\alpha)\left[\int_0^T |\dot{x}(t)|^2\,dt\right]^{1/2}; \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.30}$$

Структурная схема обнаружителя, реализующего правило (2.30), приведена на рис. 2.1. На этом и последующих рисунках СФ — фильтр, согласованный с сигналом $s(t) = \operatorname{Re} \dot{s}(t) \exp(i\,\omega_0 t)$; ω_0 — несущая частота; АФД — амплитудно-фазовый детектор; $\times$ — перемножитель;

ВС — временно́й селектор, который открывается коротким импульсом $\delta(t-T)$ в конце посылки сигнала $s(t)$; $\int$ — интегратор; ПУ — пороговое устройство, которое вырабатывает решение о наличии или отсутствии сигнала; $\sqrt{\ }$ — устройство извлечения квадратного корня.

Правило (2.30) обеспечивает стабильную вероятность ложной тревоги, равную α, при любом изменении спектральной плотности N_0 шума и обладает наибольшей вероятностью правильного обнаружения при всех отношениях сигнал-шум $d_T^2 = E/(2N_0)$. Характеристики обнаружения правила (2.30), рассчитанные по таблицам распределения Стьюдента [74], даны на рис. 2.2. Анализ этих характеристик показывает, что вероятность правильного обнаружения D монотонно возрастает с увеличением отношения сигнал-шум d_T^2 и произведения $\nu = \Delta fT$ полосы пропускания ЛТП на время наблюдения. В пределе, когда $\nu = \infty$, вероятность D сравнивается с вероятностью правильного обнаружения потенциального правила, предполагающего априорное знание спектральной плотности шума. При конечном значении ν имеется проигрыш в пороговом отношении сигнал-шум по сравнению с отношением, получаемым при потенциальном правиле. Этот проигрыш есть своего рода плата за незнание мощности шума. Потери в пороговом отношении сигнал-шум быстро убывают с ростом ν и уже при $\nu \geqslant 10$ не превышают 1—1,5 дБ. Тем самым, в отличие от случая известной спектральной плотности шума, помехоустойчивость обнаружения при априорной неопределенности этой плотности зависит от базы сигнала, но, одако, сравнительно быстро стремится к потенциальной помехоустойчивости при увеличении базы сигнала.

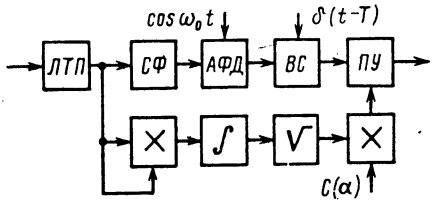


Рис. 2.1. Структурная схема обнаружителя когерентного сигнала в шумах неизвестной мощности

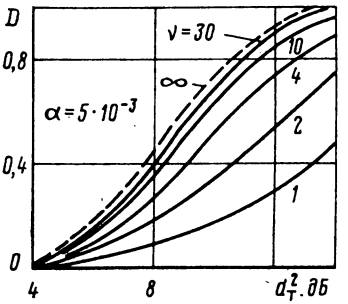


Рис. 2.2. Характеристики обнаружения когерентного сигнала в шумах неизвестной мощности

Перейдем к задаче обнаружения и различения $m > 1$ сигналов $\sqrt{E}s_k(t)$ на фоне гауссовского шума, который по-прежнему считаем белым на входе ЛТП. Полагаем, что сигналы s_k, $k = \overline{1, m}$, полностью известны, образуют ортогональную, биортогональную или эквидистантную совокупность и имеют единичные энергии. Такие сигналы встречаются в дискретных системах связи и при радиолокационном обнаружении цели с указанием элемента разрешения, в котором она находится. К априорно неопределенным параметрам задачи относим энергию E обнаруживаемых сигналов и спектральную плотность N_0 шума.

В данном случае выделяются полезный $\gamma = \sqrt{E}/(2\,N_0)$ и мешающий $\pi = -1/(4\,N_0)$ параметры. Статистики, входящие в решающую функцию (2.23), имеют вид

$$U_k(\dot{\mathbf{x}}) = \mathrm{Re}\int_0^T \dot{x}(t)\,\dot{s}_k^*(t)\,dt,\ k = \overline{1,\,m}. \tag{2.31}$$

Достаточная для мешающего параметра π статистика

$$T(\dot{\mathbf{x}}) = \int_0^T |\,\dot{x}(t)\,|^2\,dt. \tag{2.32}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что в этой задаче выполняются все предпосылки существования РНМ несмещенного правила. Совокупность $\mathbf{G}$, удовлетворяющая условиям (2.22), состоит из ортогональных преобразований g_k: $s_1 \to s_k$, $k = \overline{1,\,m}$. Такие преобразования задаются оператором g поворота на некоторый угол φ вокруг оси $O'O''$, перпендикулярной подпространству L_s сигналов s_k, $k = \overline{1,m}$ (рис. 2.3). Например, при трех эквидистантных сигналах $\varphi = 2\pi/3$ (рис. 2.3, *а*), при четырех биортогональных сигналах $\varphi = \pi/2$ (рис. 2.3, *б*). Преобразования $g_k = g^{k-1}$, где g^{k-1} — $(k-1)$-я степень оператора g.

Решающая функция РНМ несмещенного правила задается выражением (2.23), в котором статистики U_k и T определяются формулами (2.31) и (2.32). Замечая, что семейство распределений в отсутствие сигнала симметрично относительно группы $\mathbf{G} = \{g : x(t) \to \delta\,x(t);\ \delta > 0\}$ масштабных преобразований и статистика $U(\dot{\mathbf{x}}) = \max\limits_k U_k(\dot{\mathbf{x}})$ удовлетворяет соотношению $U(g\,\dot{\mathbf{x}}) = \delta\,U(\dot{\mathbf{x}})$, получаем по второму способу п. 2.1.3 пороговую функцию $L[T(\dot{\mathbf{x}});\ \alpha] = C(\alpha)\sqrt{T(\dot{\mathbf{x}})}$. Окончательное выражение для решающей функции РНМ несмещенного правила обнаружения и различения сигналов s_k, $k = \overline{1,\ m}$, имеет вид

$$\varphi(\dot{\mathbf{x}}) = \begin{cases} (\varphi_1(\dot{\mathbf{x}}) = 0,\ \ldots,\ \varphi_m(\dot{\mathbf{x}}) = 0) \text{ при } \max\limits_k \mathrm{Re}\int\limits_0^T \dot{x}(t)\,\dot{s}_k^*(t)dt \leqslant \\ \qquad \leqslant C(\alpha)\left[\int\limits_0^T |\,\dot{x}(t)\,|^2\,dt\right]^{1/2}; \\ (0,\ \ldots,\ \varphi_i(\dot{\mathbf{x}}) = 1,\ 0,\ \ldots,\ 0) \text{ при } \max\limits_k \mathrm{Re}\int\limits_0^T \dot{x}(t)\,\dot{s}_k^*(t)\,dt = \\ \qquad = \int\limits_0^T \dot{x}(t)\,\dot{s}_i^*(t)\,dt > C(\alpha)\left[\int\limits_0^T |\,\dot{x}(t)\,|^2\,dt\right]^{1/2}. \end{cases} \tag{2.33}$$

Структурная схема обнаружителя, реализующего правило (2.33), приведена на рис. 2.4. Здесь и далее УВМ — устройство выбора мак-

симального значения; $СФ_k$ — фильтр, согласованный с сигналом s_k. Остальные обозначения те же, что на рис. 2.1.

Правило (2.33) обеспечивает стабильную и равную α вероятность ложной тревоги при любом изменении спектральной плотности шума и обладает максимальной вероятностью D_k правильного обнаружения каждого сигнала s_k при всех отношениях сигнал-шум $d_T^2 = E/(2N_0)$. Вероятности D_k одинаковы при равных амплитудах обнаруживаемых сигналов, что обеспечивает инвариантность полной вероятности $D = \sum_{k=1}^{m} p_k D_k$ правильного обнаружения к изменению априорных вероятностей p_k сигналов s_k. У данного правила одинаковы также вероятности ошибочного распознавания принятого сигнала. Помехоустойчивость многоальтернативного обнаружения возрастает с переходом от ортогональной к биортогональной и эквидистантной совокупностям сигналов точно так же, как и в случае обнаружения в белом шуме с известной спектральной плотностью. Проигрыш в пороговом отношении сигнал-шум, связанный с незнанием спектральной плотности шума, имеет тот же порядок, что и при бинарном обнаружении, и быстро убывает с ростом базы сигналов.

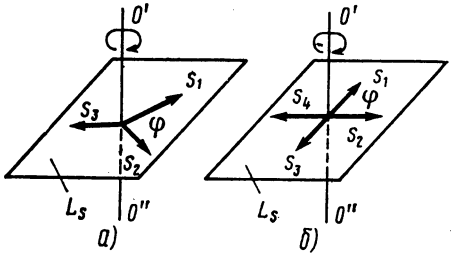


Рис. 2.3. Ортогональные преобразования сигналов

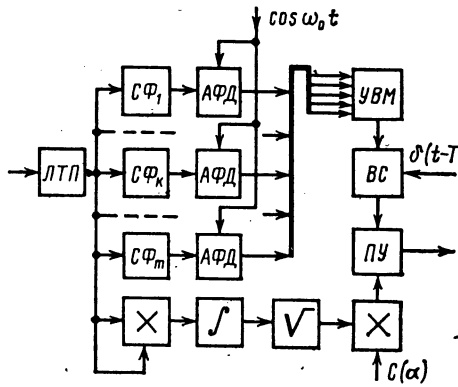


Рис. 2.4. Структурная схема обнаружителя нескольких когерентных сигналов в шумах неизвестной мощности

2.2.2. Обнаружение сигнала на фоне гауссовского шума и квазидетерминированной помехи с неизвестными параметрами

Рассмотрим задачу обнаружения сигнала $\sqrt{E}\,s(t)$, $t \in [0;\ T]$, на фоне белого гауссовского шума и квазидетерминированной помехи $\xi(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f_i(t)$ в виде линейной комбинации известных мешающих сигналов $f_i(t)$, $i = \overline{1, n}$. Мешающие сигналы $f_i(t)$ считаем ортонормированными. Априорно неопределенными полагаем спектральную плотность N_0 шума, энергию E сигнала и весовые коэффициенты $\xi_i \in (-\infty, \infty)$ помехи $\xi(t)$. Эта задача встречается, например, в системах связи и радионавигации с многолучевым распространением сиг-

нала, когда появляются опережающие и отстающие посылки сигнала, создающие квазидетерминированную помеху для приема по основному лучу.

Выборка $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_\nu)$, $\nu = \Delta f\, T$, из отсчетов комплексной огибающей $\dot{x}(t)$ процесса на выходе ЛТП имеет плотность вероятности

$$W(\dot{\mathbf{x}} \mid E, N_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) = k \exp\left\{-\frac{1}{4N_0 \Delta f} \times \right.$$

$$\left. \times \| \dot{\mathbf{x}} - \sqrt{E}\, \dot{\mathbf{s}} - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \dot{\mathbf{f}}_i \|^2 \right\},$$

где $\dot{\mathbf{f}}_i = \{\dot{f}_{1i}, \ldots, \dot{f}_{\nu i}\}$ — вектор из отсчетов комплексной огибающей $\dot{f}_i(t)$ мешающего сигнала; $\dot{\mathbf{s}} = (\dot{s}_1, \ldots, \dot{s}_\nu)$ — сигнальный вектор из отсчетов комплексной огибающей $\dot{s}(t)$ обнаруживаемого сигнала.

Из данного выражения следует, что в задаче выделяются одномерный полезный $\gamma = \sqrt{E}/(2N_0)$ и векторный мешающий $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n)$ параметры, где $\pi_0 = -1/(4N_0)$; $\pi_i = \xi_i/(2N_0)$, $i = \overline{1,n}$. Достаточными для этих параметров являются соответственно статистика $U(\dot{\mathbf{x}}) = (\mathrm{Re} < \dot{\mathbf{x}};\ \dot{\mathbf{s}} >)/\Delta f$ и векторная статистика $T(\dot{\mathbf{x}}) = (T_0(\dot{\mathbf{x}}), T_1(\dot{\mathbf{x}}), \ldots, T_n(\dot{\mathbf{x}}))$ с компонентами $T_0(\dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\Delta f} \|\dot{\mathbf{x}}\|^2$; $T_i(\dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\Delta f} \times \mathrm{Re} < \dot{\mathbf{x}};\ \dot{\mathbf{f}}_i >$, $i = \overline{1, n}$. При большом значении $\Delta f T$ эти статистики можно приближенно представить в интегральной форме:

$$U(\dot{\mathbf{x}}) = \mathrm{Re} \int_0^T \dot{x}(t)\, \dot{s}^*(t)\, dt; \qquad (2.34)$$

$$T_0(\dot{\mathbf{x}}) = \int_0^T |\dot{x}(t)|^2\, dt;\ T_i'(\dot{\mathbf{x}}) = \mathrm{Re} \int_0^T \dot{x}(t)\, \dot{f}_i^*(t)\, dt,\ i = \overline{1, n}. \qquad (2.35)$$

Через параметры γ и $\boldsymbol{\pi}$ задача обнаружения сигнала формулируется как задача проверки сложных гипотез:

$$H_0 : \vartheta = (\gamma;\ \boldsymbol{\pi}) \in \Theta_0 = \Gamma_0 \times \Pi;\ \Gamma_0 = \{\gamma = 0\};\ \Pi = \{\boldsymbol{\pi} : \pi_0 < 0;$$

$$-\infty < \pi_i < \infty;\ i = \overline{1, n}\};$$

$$H_1 : \vartheta \in \Theta_1 = \Gamma_1 \times \Pi;\ \Gamma_1 = \{\gamma : 0 < \gamma < \infty\}.$$

Для решения этой задачи применим принцип несмещенности, так как для мешающего параметра $\boldsymbol{\pi}$ существует достаточная статистика T с полным семейством распределений на границе Δ гипотез H_0, H_1 (совпадающей с множеством Θ_0) и условное отношение правдоподобия монотонно относительно статистики U. Решающая функция РНМ не-

смещенного правила имеет вид (2.14), в котором статистики U и T определяются выражениями (2.34) и (2.35). Для отыскания пороговой функции воспользуемся результатами п.2.1.3., так как семейство распределений в отсутствие сигнала симметрично относительно группы преобразований

$$\mathbf{G} = \{g : x(t) \to \delta_0 x(t) + \sum_{i=1}^{n} \delta_i f_i(t);\ \ \delta_0 \in (0,\ \infty);\ \ \delta_i \in (-\infty,\ \infty)\}.$$

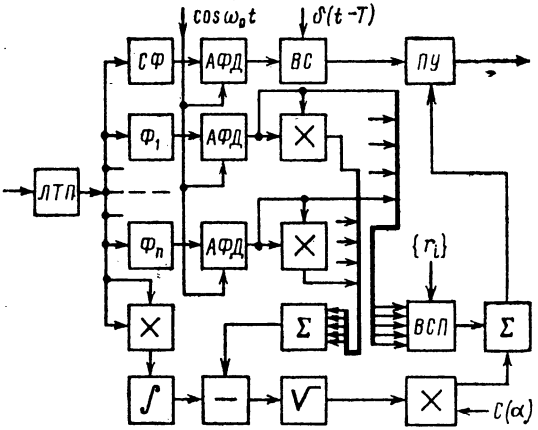


Рис. 2.5. Структурная схема обнаружителя сигнала на фоне шума и квазидетерминированной помехи

Применяя эти результаты, находим, что правило обнаружения имеет пороговую функцию

$$L[T(\dot{\mathbf{x}});\ \alpha] = C(\alpha)\left[T_0(\dot{\mathbf{x}}) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} T_i^2(\dot{\mathbf{x}})\right]^{1/2} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} r_i T_i(\dot{\mathbf{x}}),$$

где $r_i = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_0^T \dot{s}(t)\,\dot{f}_i^*(t)\,dt$ — коэффициенты корреляции между полезным s и мешающими f_i сигналами.

Структурная схема полученного обнаружителя приведена на рис. 2.5. На этом и последующих рисунках Φ_i — фильтры, согласованные с сигналами f_i, $i = \overline{1, n}$; ВСП «—» вычислитель скалярного произведения $\sum_{i=1}^{n} r_i T_i(\dot{\mathbf{x}})$; Σ — сумматор; «—» вычитающий каскад. Данный обнаружитель обеспечивает стабильную вероятность ложной тревоги при любых изменениях спектральной плотности шума и весовых коэффи-

циентов помехи. Вероятность правильного обнаружения максимальна при всех отношениях сигнал-шум и не зависит от того, присутствует помеха ξ или нет. Последнее следует из того, что решающая функция может быть эквивалентно выражена в форме сравнения с порогом $C(\alpha)$ статистики

$[U(\dot{x}) - \sum_{i=1}^{n} r_i T_i(\dot{x})]/[T_0(\dot{x}) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} T_i^2(\dot{x})]^{1/2}$, которая инвариантна относительно помехи ξ.

Характеристики обнаружения полученного правила рассчитать сложно. Однако они примерно совпадают с характеристиками когерентного обнаружения, рис. 2.2., если под отношением сигнал-шум d_T^2 понимать эффективное отношение $E_{эф}/(2N_0)$, где $E_{эф}$ — энергия проекции обнаруживаемого сигнала в подпространство, ортогональное к линейной оболочке мешающих сигналов. Так как $E_{эф} < E$, то вероятность правильного обнаружения снижается при наличии квазидетерминированной помехи. В этом проявляется мешающее действие данной помехи.

2.2.3. Контрастное обнаружение сигналов в шуме с неизвестными характеристиками

В случае неизвестных характеристик шума часто оказывается полезным контрастный метод обнаружения сигнала. При этом методе выделяется опорный временной интервал, содержащий только шум, и обнаружение сигнала производится сравнением процесса в опорном интервале с процессом в том интервале, в котором ожидается присутствие сигнала. Факт обнаружения сигнала регистрируется как несовпадение распределения процессов в данных интервалах. Контрастное обнаружение возможно при минимальных сведениях о шуме. Однако оно применимо, если шум имеет одинаковое распределение в обоих временных интервалах, т. е. стационарен в пределах этих интервалов.

Ниже рассмотрены задачи контрастного обнаружения сигналов в шумах с неизвестными параметрами распределений. Дальнейшее применение контрастного метода, включая случай неизвестного распределения шума, дано в п. 2.4.5.

Обнаружение некогерентной пачки импульсов. Для обнаружения используем процесс на выходе линейного амплитудного детектора. Амплитуды импульсов в пачке считаем разными и неизвестными, шум на входе детектора полагаем гауссовским и стационарным на интервале, равном периоду следования импульсов. Процедуру обнаружения разделим на два этапа — бинарное квантование наблюдаемого процесса в каждом периоде следования импульсов и накопление бинарно квантованных величин.

Рассмотрим задачу бинарного квантования в условиях априорной неопределенности мощности шума. Выделим в некотором периоде два временных интервала — шумовой, не содержащий импульса, и сигнальный, в котором может быть импульс. Возьмем в этих интервалах m независимых отсчетов x_i процесса на выходе амплитудного детектора, из которых последний отсчет x_m отнесем к сигнальному, а остальные $m-1$ отсчетов — к шумовому интервалу. Образованная из этих от-

счетов выборка $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ имеет семейство распределений с плотностью вероятности

$$W(\mathbf{x} \mid a; \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^{2m}} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \prod_{i=1}^{m} x_i \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{m} x_i^2\right) I_0\left(\frac{a x_m}{\sigma^2}\right), \qquad (2.36)$$

$$a \in [0, \infty); \ \sigma^2 \in (0, \infty),$$

где a — амплитуда импульса; σ^2 — дисперсия шума; $I_0(\cdot)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Бинарное квантование рассматриваем как контрастное обнаружение импульсов в каждом периоде следования. Решению в пользу гипотезы H_0 («импульса нет») соответствует нулевое значение квантованной выборки, а решению о выполнении гипотезы H_1 («импульс есть») — значение, равное единице. Согласно выражению (2.36) в задаче выделяются полезный $\gamma = a/\sigma^2$ и мешающий $\pi = -1/(2\sigma^2)$ параметры с достаточными статистиками:

$$U(\mathbf{x}) = x_m; \qquad (2.37)$$

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2. \qquad (2.38)$$

В терминах параметров γ и π правило квантования формулируется как проверка сложных гипотез

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = (\gamma; \ \pi) \in \Theta_0 = \Gamma_0 \times \Pi; \quad \Gamma_0 = \{\gamma = 0\}; \quad \Pi = (-\infty, 0);$$

$$H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 = \Gamma_1 \times \Pi; \ \Gamma_1 = (0, \infty).$$

В условиях априорной неопределенности мощности шума и амплитуды импульса естественно потребовать от правила квантования постоянства вероятности формирования «единицы» в отсутствие импульса и максимального значения этой вероятности при его наличии. Эти требования удовлетворяются, если в качестве правила квантования использовать РНМ несмещенное правило проверки гипотез H_0 и H_1.

Используя соответствующие теоремы § 2.1, из (2.36) нетрудно установить, что в данном случае выполняются все предпосылки существования РНМ несмещенного правила. Решающая функция этого правила согласно выражениям (2.14), (2.37) и (2.38) имеет вид

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 \ \text{при} \ x_m \geqslant C(p_0) \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}; \\ 0 \ \text{в остальных случаях}, \end{cases} \qquad (2.39)$$

где p_0 — заданная вероятность формирования «единицы» в отсутствие импульса. Пороговая функция $L\,[\,T\,(\mathbf{x});\,p_0] = C\,(p_0)\,\sqrt{T\,(\mathbf{x})}$ правила (2.39) может быть получена либо решением уравнения (2.7) при подстановке $\gamma_{гр} = 0$, либо по любой из двух методик п.2.1.3, если воспользоваться симметрией семейства распределений выборки $\mathbf{x}$ в отсутствие сигнала относительно группы масштабных преобразований.

Правило квантования (2.39) обеспечивает в отсутствие сигнала постоянную и равную p_0 вероятность формирования «единицы» при любой мощности шума и максимизирует эту вероятность при всех отношениях сигнал-шум $d_T^2 = a^2/(2\,\sigma^2)$, когда сигнал присутствует. Данные свойства правила создают необходимые предпосылки для стабилиза-

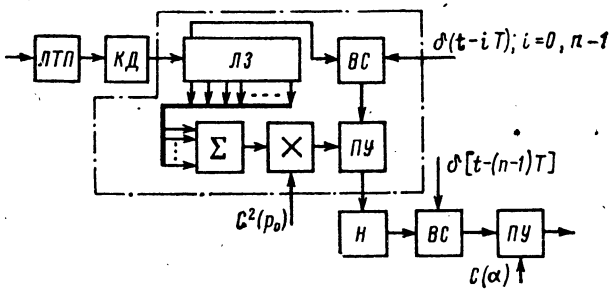


Рис. 2.6. Структурная схема обнаружителя с бинарным накоплением импульсов

ции вероятности ложной тревоги и максимизации вероятности правильного обнаружения пачки импульсов на этапе бинарного накопления. Вероятностью p_0 для оптимального согласования этапов квантования и накопления можно управлять, изменяя порог $C\,(p_0)$. Расчеты показывают, что при малых отношениях сигнал-шум d_T^2 оптимальное значение $p_0 \approx 0{,}5$.

При практической реализации обнаружителя целесообразно решающую функцию (2.39) заменить эквивалентной решающей функцией

$$\varphi\,(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_m^2 \geqslant C^2\,(p_0) \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \qquad (2.40)$$

Такая замена возможна, так как значения всех отсчетов $x_i \geqslant 0$. Структурная схема обнаружителя с правилом квантования (2.40) приведена на рис. 2.6. Здесь и далее КД — квадратичный амплитудный детектор; ЛЗ — линия задержки с m отводами; Н — накопитель. Штрихпунктирной линией на рис. 2.6 обведен блок бинарного квантования. Число импульсов в пачке равно n. Порог на выходе бинарного накопителя обозначен $C\,(\alpha)$, где α — заданный уровень вероятности ложной тревоги; T — период следования импульсов.

Сравнение этого обнаружителя с бинарным накопителем при известной мощности шума показывает, что бинарное накопление в шуме с не-

известной мощностью сопровождается потерями в пороговом отношении сигнал-шум. Однако эти потери быстро убывают с увеличением числа независимых отсчетов шума. При $n \geqslant 10$ и $m = 2$, когда берется всего один отсчет шума, они равны 2—3 дБ, при $m \geqslant 10$ потери пренебрежимо малы. Характеристики обнаружения можно рассчитать по известным выражениям для бинарного накопителя [84], используя функцию мощности $\beta(d_T^2)$ полученного правила квантования. При $m = 2$ функция мощности $\beta(d_T^2) = 1 - 0{,}5 \exp(-d_T^2/2)$ для нефлуктуирующих импульсов; $\beta(d_T^2) = (1 + d_T^2)/(2 + d_T^2)$ для флуктуирующих по закону Рэлея импульсов и $\beta(d_T^2) = 1 - \frac{1+\nu}{2(1+\nu)+d_T^2} \times$ $\times \exp\left(-\frac{\nu d_T^2}{2(1+\nu)+d_T^2}\right)$ для импульсов, флуктуирующих по закону Райса. Данные выражения получены при $p_0 = 0{,}5$. Параметр ν равен отношению мощностей нефлуктуирующей и флуктуирующей компонент сигнала в распределении Райса.

На рис. 2.7 приведена зависимость необходимого числа n накапливаемых импульсов от отношения сигнал-шум d_T^2 для нефлуктуирующего сигнала (*1*), флуктуирующего по закону Райса сигнала (*2*) и сигнала, флуктуирующего по закону Рэлея (*3*). Из рис. 2.7 следует, что при $n \geqslant 50$ характер флуктуаций сигнала слабо сказывается на эффективности обнаружения.

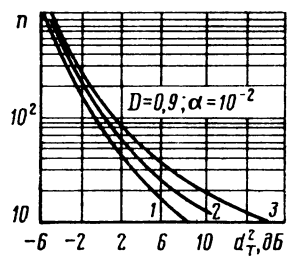


Рис. 2.7. Зависимость числа накапливаемых импульсов от отношения сигнал-шум

Обнаружение узкополосного сигнала с неизвестной несущей частотой. Наблюдаемым процессом в этой задаче выступают оценки x_{ij} спектральных плотностей принятого сигнала, поступающие в заданном частотном диапазоне от анализатора спектра. Здесь индекс i обозначает номер цикла формирования спектральных оценок; индекс j — номер интервала разрешения по частоте. Ширину интервала разрешения полагаем равной или большей ширины спектра обнаруживаемого сигнала. Спектр шумового фона принимаем достаточно гладким и имеющим постоянную плотность мощности в пределах $m \geqslant 2$ интервалов разрешения. В остальном спектр шумового фона может быть произвольным. Весь частотный диапазон разделим на ряд поддиапазонов, каждый из которых включает в себя m указанных интервалов. При обнаружении сигнала считаем, что в пределах поддиапазона может находиться только один сигнал.

Правила обнаружения во всех частотных поддиапазонах идентичны. Поэтому остановимся на задаче обнаружения в одном таком поддиапазоне. Наблюдаемой выборкой выступает совокупность $\mathbf{x} = \{x_{ij};\ i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, m}\}$, где n — число циклов формирования спектральных оценок x_{ij}. При статистической независимости спектральных оценок и аппроксимации их распределений χ^2-распределением с ν степенями свободы [76] (ν определяется произведением времени оценки

на ширину интервала разрешения) плотность вероятности выборки $\mathbf{x}$ при наличии сигнала в k-м интервале разрешения имеет вид

$$W(\mathbf{x} \mid k; \sigma_1^2; \sigma_2^2) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \frac{x_{ij}^{\nu/2-1}}{(2\sigma_1^2)^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)} \times \tag{2.41}$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij}\right) \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)^{\nu n/2} \exp\left(-\frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{2\sigma_1^2\,\sigma_2^2} \sum_{i=1}^{n} x_{ik}\right),$$

где σ_1^2, σ_2^2 — соответственно мощности шумового фона и смеси шумового фона и сигнала, отнесенные к одному интервалу разрешения по частоте. Из (2.41) следует, что в задаче имеются мешающий $\pi = -1/(2\sigma_1^2)$ и полезный $\gamma = (\sigma_2^2 - \sigma_1^2)/(2\,\sigma_1^2\sigma_2^2)$ параметры. Достаточная для мешающего параметра статистика

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij}. \tag{2.42}$$

Задача обнаружения, когда требуется указать номер интервала разрешения, в котором находится сигнал, формулируется как задача проверки многоальтернативных гипотез:

$$H_0 : \gamma = 0;\ \pi \in \Pi = (-\infty, 0);$$

$$H_r : k = r;\ \gamma \in \Gamma = (0, \infty);\ \pi \in \Pi;\ r = \overline{1, m}.$$

Используя теоремы § 2.1, можно показать, что в данной задаче выполняются все предпосылки, необходимые для существования многоальтернативного РНМ несмещенного правила. Совокупность преобразований $\mathbf{G}$, которая должна удовлетворять условиям (2.22), задается циклическими перестановками величины x_{ij}, $j = \overline{1, m}$, по индексу j. Условные отношения правдоподобия при каждой альтернативе H_k монотонны относительно статистик

$$U_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_{ik}. \tag{2.43}$$

Подставляя статистики (2.42), (2.43) в (2.23) и вычисляя пороговую функцию по методике п. 2.1.3, находим решающую функцию РНМ несмещенного правила

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} (\varphi_1(\mathbf{x}) = 0, \ldots, \varphi_m(\mathbf{x}) = 0) \text{ при } \max\limits_{j=\overline{1,m}} \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} \leqslant \\ \qquad \leqslant C(\alpha) \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} x_{ij}; \\ (0, \ldots, \varphi_k(\mathbf{x}) = 1, 0, \ldots, 0) \text{ при } \max\limits_{j=\overline{1,m}} \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = \\ \qquad = \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ik} > C(\alpha) \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} x_{ij},\ k = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{2.44}$$

Правило (2.44) обеспечивает стабильную вероятность ложной тревоги при любых изменениях уровня шумового фона и формы его энергетического спектра, не нарушающих постоянства спектральной плотности в пределах установленных поддиапазонов. Вероятность правильного обнаружения сигнала не зависит от его местоположения в поддиапазоне и максимальна для всех отношений сигнал-шум $d_T^2 = \sigma_c^2/\sigma_1^2$, где σ_c^2 — мощность сигнала; σ_1^2 — мощность шумового фона, отнесенная к одному элементу разрешения. Аналитический расчет характеристик обнаружения правила (2.44) довольно сложен из-за присутствия в нем экстремальных статистик. Эффективность таких правил целесообразно оценивать моделированием на ЭВМ.

Структурная схема обнаружителя, реализующего данное правило, дана на рис. 2.8. На этом рисунке АС — параллельный анализатор спектра.

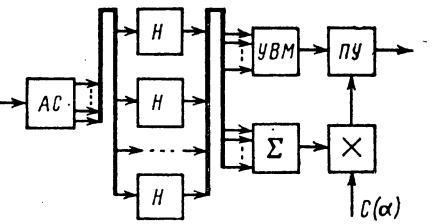


Рис. 2.8. Структурная схема обнаружителя узкополосного сигнала с неизвестной несущей частотой

Обнаружение сигнала в оптической локационной системе. Рассмотрим обнаружение эхо-сигнала при диффузном отражении когерентного светового сигнала оптически шероховатой поверхностью. Обнаружение производится контрастным методом при одновременном наблюдении двух световых потоков. Один из таких потоков (шумовой) обязан только шуму, другой же (сигнальный) может содержать полезный сигнал. В качестве чувствительного элемента приемника используется фотоэлектронный счетчик фотонов. Наблюдаемыми данными выступают числа x_1 и x_2 фотоэлектронов, появляющихся на фоточувствительной поверхности за время действия на нее соответственно шумового и сигнального световых потоков.

При независимости величин x_1 и x_2, медленных флуктуациях шума ($\Delta f T \ll 1$; Δf — ширина спектра шума; T — время действия светового потока на фоточувствительную поверхность) и близких значениях частоты f_c сигнала и средней частоты f_0 шума ($|f_c - f_0|T \ll 1$) распределение выборки $\mathbf{x} = (x_1; x_2)$ имеет вид [96]

$$p(\mathbf{x} \mid s_c;\ s_ш) = [(1+s_ш)^2 (1+s_ш+s_c)]^{-1} \left(\frac{s_ш}{1+s_ш}\right)^{x_1+x_2} \times$$

$$\times \left[\frac{1+s_c/s_ш}{1+s_c/(1+s_ш)}\right]^{x_2}, \quad s_c \geqslant 0; \quad s_ш > 0, \tag{2.45}$$

где $s_ш$, s_c — средние числа фотоэлектронов, характеризующие соответственно шум и сигнал. При $|f_c - f_0|T \gg 1$ распределение

$$p(\mathbf{x} \mid s_c;\ s_ш) = \left\{(1+s_c)(1+s_ш)^2 \left[1 - \frac{s_c(1+s_ш)}{s_ш(1+s_c)}\right]\right\}^{-1} \times$$

$$\times \left(\frac{s_ш}{1+s_ш}\right)^{x_1+x_2} \left\{1 - \left[\frac{s_c(1+s_ш)}{s_ш(1+s_c)}\right]^{x_2+1}\right\}, \quad s_c \geqslant 0; \quad s_ш > 0. \tag{2.46}$$

Из (2.45) и (2.46) следует, что в задаче выделяются мешающий $\pi = s_ш/(1+s_ш)$ и полезный γ параметры. Параметр $\gamma = s_c/[s_ш(1+s_c+s_ш)]$ для семейства (2.45) и $\gamma = s_c(1+s_ш)/[s_ш(1+s_c)]$ для семейства (2.46). Для параметров γ и π существуют соответственно достаточные статистики

$$U(\mathbf{x}) = x_2; \tag{2.47}$$

$$T(\mathbf{x}) = x_1 + x_2. \tag{2.48}$$

Задача обнаружения сигнала формулируется как задача проверки сложных гипотез

$$H_0 : \gamma = 0;\ \pi \in (0;\ 1); \quad H_1 : \gamma \in (0,\ \infty);\ \pi \in (0;\ 1).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что в данной задаче существует РНМ несмещенное правило. Находя пороговую функцию решением уравнения (2.7), из (2.14),(2.47) и (2.48) находим решающую функцию этого правила

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 \text{ при } x_2 > [(1-\alpha)(x_1+x_2)-\alpha]; \\ ](1-\alpha)(x_1+x_2)-\alpha[\text{ при } x_2 = [(1-\alpha)(x_1+x_2)-\alpha]; \\ 0, \text{ в остальных случаях,} \end{cases} \tag{2.49}$$

где $[\cdot]$ — целая часть; $]\cdot[$ — дробная часть числа, заключенного в скобки (правило рандомизировано, так как величины x_1 и x_2 принимают целые значения).

Функция мощности правила (2.49) при $|f_c - f_0|T \ll 1$, $|f_c - f_0|T \gg 1$ задается соответственно выражениями

$$\beta(s_ш;\ s_c) = 1 - \frac{s_ш}{s_c}\,\frac{a^{1-\alpha}-1}{1-ba^{1-\alpha}};$$

$$\beta(s_ш;\ s_c) = 1 - (1-\alpha)\frac{1-c}{1-c/b} + \frac{(1-c)(1-b)^2 c}{(1-c/b)(b-c)} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{1-b} - \frac{(b/c)^\alpha}{1-c(b/c)^\alpha}\right],$$

где $a = (1+s_ш)(s_c+s_ш)/[s_ш(1+s_ш+s_c)]$; $b = s_ш/(1+s_ш)$; $c = s_c(1+s_c)$. Правило (2.49) обеспечивает при максимальной вероятности правильного обнаружения стабильную вероятность ложной тревоги при любом изменении уровня $s_ш$ шумового фона.

2.2.4. Обнаружение некогерентной пачки импульсов

В качестве примера ЛНМ несмещенного правила рассмотрим обнаружение пачки из n некогерентных импульсов в гауссовском шуме с неизвестной мощностью σ^2. Амплитуды a_i, $i = \overline{1, n}$, импульсов полагаем произвольными. Образуем выборку $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ из отсчетов огибающей принятого процесса, взятых через период следования

импульсов. В отсутствие межпериодной корреляции шума плотность вероятности этой выборки

$$W(\mathbf{x} \mid a_1, \ldots a_n, \sigma^2) = (2\pi)^n \exp\left(-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\right) \times$$

$$\times \exp\left(-\pi\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\prod_{i=1}^{n}x_i I_0(\sqrt{\gamma_i}\,x_i),$$

где $\pi = 1/(2\sigma^2)$ — мешающий параметр; $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ — полезный параметр; $\gamma_i = a_i^2/\sigma^4$, $i = \overline{1, n}$; $I_0(\cdot)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

В данной задаче нет РНМ несмещенного правила из-за многомерности полезного параметра и отсутствия статистики $U(\mathbf{x})$, относительно которой было бы монотонно условное отношение правдоподобия. Однако существует ЛНМ несмещенное правило, у которого статистика (2.24) $U(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\mu_i x_i^2$. Весовые множители μ_i этой статистики могут быть определены из некоторых дополнительных соображений. Так, при локационном обнаружении целей их целесообразно устанавливать в соответствии с диаграммой направленности РЛС. Решающая функция ЛНМ несмещенного правила

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \sum_{i=1}^{n}\mu_i x_i^2 \geqslant C(\alpha)\sum_{i=1}^{n}x_i^2; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Данное правило имеет стабильную вероятность ложной тревоги при изменении мощности шума и обеспечивает при слабом сигнале максимальное приращение вероятности правильного обнаружения вдоль направления, заданного вектором $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

2.3. Принцип инвариантности в задачах проверки сложных гипотез

2.3.1. Симметричные семейства распределений. Инвариантность правил проверки гипотез

Принцип инвариантности часто оказывается полезным, когда не существует РНМ несмещенного правила. Он основан на представлении априорной неопределенности в форме воздействия на наблюдаемый процесс (или выборку из этого процесса) некоторого произвольного преобразования g из фиксированной группы $\mathbf{G}$. При таком представлении априорной неопределенности предполагается: 1) симметрия семейства $\mathcal{P} = \{W(\mathbf{x}|\vartheta); \vartheta \in \Theta\}$ распределений выборок из наблюдаемого процесса относительно группы $\mathbf{G}$ (определение симметричного семейства см. в п. 2.1.2); 2) инвариантность множеств Θ_0 и Θ_1, задающих в параметрическом пространстве Θ гипотезы H_0 и H_1 относительно индуцированной

группы $\mathbf{G}_*$ преобразований пространства Θ (определение индуцированного преобразования см. в п. 2.1.2). Множество Θ_i, $i=0,1$, инвариантно относительно группы $\mathbf{G}^*$, если $g_*\,\vartheta \in \Theta_i$ при всех $\vartheta \in \Theta_i$ и любом $g_* \in \mathbf{G}_*$.

Симметричность семейства $\mathcal{P}$ относительно группы $\mathbf{G}$ обеспечивает принадлежность распределения преобразованной выборки $g\,\mathbf{x}$ семейству $\mathcal{P}$ при всех $g \in \mathbf{G}$ (см. п. 2.1.2). Инвариантность множеств Θ_0 и Θ_1 свидетельствует о том, что преобразование выборки $\mathbf{x}$ операторами группы $\mathbf{G}$ не нарушает сформулированных гипотез. Без выполнения этих двух условий группу $\mathbf{G}$ нельзя было бы использовать для представления априорной неопределенности.

Приведем пример представления априорной неопределенности группой преобразований. Пусть требуется обнаружить сигнал с неизвестной начальной фазой φ_0 в гауссовском шуме. Амплитуду a сигнала и мощность σ^2 шума примем для простоты известными. Наблюдаемую выборку $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ образуем из отсчетов x_i, $i=1,2$, колебаний на выходах квадратурных каналов приемника в момент окончания сигнала. Плотность вероятности этой выборки

$$W(\mathbf{x} \mid \varphi_0) = (2\pi\sigma^2)^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x_1 - a\cos\varphi_0)^2 + (x_2 - a\sin\varphi_0)^2]\right\},$$

где $\varphi_0 \in (-\pi, \pi])$. Введем параметры $\vartheta_1 = a\cos\varphi_0/\sigma^2$; $\vartheta_2 = a\sin\varphi_0/\sigma^2$ и запишем гипотезы об отсутствии и наличии сигнала в виде

$$H_0 : \vartheta = (\vartheta_1; \vartheta_2) \in \Theta_0 = \{\vartheta : \vartheta_2^2 + \vartheta_2^2 = 0\};$$

$$H_1 : \vartheta \in \Theta_1 = \{\vartheta : \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 = a^2/\sigma^4\}.$$

Возьмем группу $\mathbf{G}$ ортогональных преобразований, заданных матрицами $[C_{ik}]$, где $C_{11} = C_{22} = \cos\psi$; $C_{12} = -C_{21} = \sin\psi$; $\psi \in (-\pi, \pi]$. Легко проверить, что семейство распределений с плотностями $W(\mathbf{x} \mid \varphi_0)$ симметрично относительно данной группы $\mathbf{G}$ и индуцированная группа $\mathbf{G}_* = \mathbf{G}$. Множества Θ_0 и Θ_1 инвариантны относительно группы $\mathbf{G}_*$, так как ортогональное преобразование не меняет значений $\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2$. Тем самым приведенная группа $\mathbf{G}$ может быть использована для представления априорной неопределенности начальной фазы сигнала.

Задачи с симметричными семействами $\mathcal{P}$ и инвариантными множествами Θ_0, Θ_1 называются далее симметричными относительно группы $\mathbf{G}$. Так как в симметричных задачах априорная неопределенность сводится к изменению распределения наблюдаемого процесса под действием преобразований индуцированной группы $\mathbf{G}_*$, то естественно потребовать от правила проверки гипотез независимости его функции мощности от такого изменения распределения. В связи с этим выделяются правила с инвариантными относительно группы $\mathbf{G}_*$ функциями мощности $\beta(\varphi|\vartheta)$, т. е. правила, у которых $\beta(\varphi|g_*\vartheta) = \beta(\varphi|\vartheta)$ при всех $\vartheta \in \Theta$, $g_* \in \mathbf{G}_*$. Для симметричных задач условие инвариантности функции мощности выполняется, если решающая функция φ правила инвари-

антна относительно группы $\mathbf{G}$, т. е. $\varphi(g\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$ при всех $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ и $g \in \mathbf{G}$. Это утверждение вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\beta(\varphi \mid g_* \vartheta) = \int_{\mathbf{X}} \varphi(\mathbf{x})\, W(\mathbf{x} \mid g_* \vartheta)\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{X}} \varphi(g\mathbf{x})\, W(g\mathbf{x} \mid g_* \vartheta)\, |J_g|\, d\mathbf{x} =$$

$$= \int_{\mathbf{X}} \varphi(\mathbf{x})\, W(\mathbf{x} \mid \vartheta)\, d\mathbf{x} = \beta(\varphi \mid \vartheta).$$

Поэтому при использовании принципа инвариантности из класса всех правил проверки гипотез выделяется класс $\mathcal{F}_{\text{ип}}$ инвариантных правил, имеющих инвариантные относительно группы $\mathbf{G}$ решающие функции. Выделение класса $\mathcal{F}_{\text{ип}}$ обеспечивает, с одной стороны, устойчивость правила в условиях априорной неопределенности и, с другой стороны, создает во многих случаях необходимые предпосылки для существования оптимального (РНМ) правила в этом классе. Оптимальное в классе $\mathcal{F}_{\text{ип}}$ правило называется РНМ инвариантным.

2.3.2. Синтез инвариантных правил проверки гипотез

Инвариантные правила проверки бинарных гипотез. Синтез РНМ инвариантного правила начинается с общего представления класса $\mathcal{F}_{\text{ип}}$. Для этого вводится специальная статистика $Z(\mathbf{x})$, называемая максимальным инвариантом (МИ) группы $\mathbf{G}$. Статистика $Z(\mathbf{x})$ — МИ группы $\mathbf{G}$, если:

а) $Z(g\mathbf{x}) = Z(\mathbf{x})$ при всех $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $g \in \mathbf{G}$;

б) из $Z(\mathbf{x}') = Z(\mathbf{x}'')$ следует $\mathbf{x}'' = g\mathbf{x}'$, где $g \in \mathbf{G}$. (2.50)

В приведенном выше примере $Z(\mathbf{x}) = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$.

Отметим, что МИ — не единственная статистика, удовлетворяющая условиям (2.50). Действительно, при любой взаимно-однозначной функции f статистика $f[Z(\mathbf{x})]$ также удовлетворяет условиям (2.50) и поэтому является МИ. Данное обстоятельство позволяет в ряде случаев упростить техническую реализацию инвариантного правила соответствующим выбором МИ. Так, в рассматриваемом примере, полагая $f(\cdot) = (\cdot)^2$, получаем МИ $Z(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$, для вычисления которого не требуется извлечения квадратного корня.

Статистика МИ обладает тем важным свойством, что она принимает, в отличие от просто инвариантных статистик, разные значения на различных траекториях группы $\mathbf{G}$ (под траекторией понимается совокупность всех точек $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, связанных друг с другом преобразованиями $g \in \mathbf{G}$). Тем самым МИ минимально редуцирует наблюдаемые данные и может быть использован для представления любой инвариантной статистики. Представление класса $\mathcal{F}_{\text{ип}}$ через МИ дается следующей теоремой [87]: правило принадлежит классу $F_{\text{ип}}$ тогда и только тогда, когда существует такая функция ψ, что его решающая функция $\varphi(\mathbf{x}) = \psi[Z(\mathbf{x})]$, где $Z(\mathbf{x})$ — МИ группы $\mathbf{G}$.

Принцип инвариантности, редуцируя наблюдаемые данные до МИ, сокращает также параметрическое пространство Θ. Математическое

выражение этого дается следующей теоремой [87]: если некоторая статистика инвариантна относительно группы $\mathbf{G}$ и $\gamma(\vartheta)$ — МИ индуцированной в параметрическое пространство группы $\mathbf{G}_*$, то распределение этой статистики зависит только от γ. Из этой теоремы следует, что параметром семейства $\mathcal{P}^Z$ является γ и что функция мощности инвариантного правила зависит от ϑ только через $\gamma(\vartheta)$, т. е. $\beta(\varphi|\vartheta) = \beta[\varphi|\gamma(\vartheta)]$. Это еще раз подтверждает независимость функции мощности инвариантного правила от изменения параметра ϑ под действием преобразований группы $\mathbf{G}$.

В соответствии с приведенными теоремами при синтезе оптимального инвариантного правила сначала отыскиваются максимальные инварианты $Z(\mathbf{x})$, $\gamma(\vartheta)$ групп $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}_*$ и находится семейство распределений $\mathcal{P}^Z = \{W(Z \mid \gamma)\}$. Затем через параметр γ семейства $\mathcal{P}^Z$ вновь формулируются проверяемые гипотезы и ищется РНМ правило проверки этих гипотез. Проверяемые гипотезы в новой формулировке имеют вид

$$H_0 : \gamma \in \Gamma_0; \quad H_1 : \gamma \in \Gamma_1,$$

где Γ_0, Γ_1 — соответственно образы множеств Θ_0, Θ_1 при отображении $\gamma(\vartheta)$.

Принцип инвариантности приводит к построению РНМ инвариантного правила, если $\mathcal{P}^Z$ оказывается семейством с монотонным относительно некоторой статистики $U(Z)$ отношением правдоподобия. Это условие обычно выполняется, когда МИ $\gamma(\vartheta)$ одномерен. В частности, в приведенном примере $\gamma = \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2$, и семейство распределений МИ группы $\mathbf{G}$ имеет монотонное относительно статистики $U(Z) = Z$ отношение правдоподобия. В тех случаях, когда $\Gamma_0 = \{\gamma : \gamma = \gamma_{\text{гр}}\}$ и $\Gamma_1 = \{\gamma : \gamma > \gamma_{\text{гр}}\}$, где $\gamma_{\text{гр}}$ — граничное значение параметра, решающая функция РНМ инвариантного правила

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 \text{ при } U[Z(\mathbf{x})] \geqslant C(\alpha); \\ 0 \text{ в остальных случаях,} \end{cases} \tag{2.51}$$

где постоянный порог $C(\alpha)$ определяется заданным уровнем α вероятности ложной тревоги (порог находится из условия $\beta(\varphi|\gamma) = \alpha$ при $\gamma = \gamma_{\text{гр}}$). В рассмотренном примере РНМ инвариантное правило имеет решающую функцию

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 \text{ при } x_1^2 + x_2^2 \geqslant C(\alpha); \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

При построении РНМ инвариантных правил предполагалось выполнение ряда условий, которые соберем вместе для удобства использования принципа инвариантности. Эти условия состоят в следующем:

1) семейство $\mathcal{P}$ распределений наблюдаемого процесса $\mathbf{x}$ или выборки из него симметрично относительно группы $\mathbf{G}$;

2) множества Θ_0 и Θ_1, представляющие гипотезы H_0 и H_1, инвариантны относительно индуцированной группы $\mathbf{G}_*$;

3) семейство $\mathcal{P}^Z$ распределений МИ группы $\mathbf{G}$ имеет монотонное отношение правдоподобия.

Из перечисленных условий наиболее ограничительным оказывается требование монотонности отношения правдоподобия семейства $\mathcal{P}^Z$. Это требование выполняется обычно в тех случаях, когда МИ одномерен и исходное семейство $\mathcal{P}$ экспоненциально. В случае многомерности МИ требование монотонности отношения правдоподобия, как правило, не выполняется.

Построение МИ. Важным этапом при использовании принципа инвариантности является построение МИ. В ряде случаев МИ можно найти непосредственной проверкой условий (2.50) для некоторой статистики. Этот способ достаточно эффективен, если преобразование $g \in \mathbf{G}$ представимо в виде группового произведения $g^{(m)}\, g^{(m-1)}\, g^{(1)}$ более простых преобразований $g^{(k)} \in \mathbf{G}^{(k)}$, $k = \overline{1, m}$, где $\mathbf{G}^{(k)}$ — подгруппы $\mathbf{G}$; МИ группы $\mathbf{G}$ ищется последовательным построением МИ для групп $\overline{\mathbf{G}}^{(1)}$ $\overline{\mathbf{G}}^{(2)}$, ..., $\overline{\mathbf{G}}^{(m)}$, где $\overline{\mathbf{G}}^{(k)}$ — подгруппа $\mathbf{G}^{(k)}$, индуцированная в область значений статистики Z_{k-1}. Искомый МИ $Z = Z_m$ [87].

При некоторых условиях, налагаемых на группу $\mathbf{G}$, существуют более удобные регулярные способы построения МИ. Впервые такой способ был предложен в [85]. Он основан на максимизации функционала $\mu_{\mathbf{x}}(g)$, определенного на группе $\mathbf{G}$ и зависящего от наблюдения $\mathbf{x}$. Если при каждом $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ функционал $\mu_{\mathbf{x}}(g)$ имеет единственный максимум, достигаемый при $g_{\mathbf{x}}$, то МИ группы $Z(\mathbf{x}) = g_{\mathbf{x}}\mathbf{x}$. Данный способ требует подбора функционала $\mu_{\mathbf{x}}$ с единственным максимумом на группе $\mathbf{G}$.

Существуют также другие способы построения МИ [65, 70]. Приведем один их них, при котором группа $\mathbf{G}$ дополняется до транзитивной в пространстве $\mathbf{X}$ группы $\mathbf{D}$ [70]. Если $\mathbf{G}$ — коммутативная группа ($g_2 g_1 = g_1 g_2$ при всех $g_1, g_2 \in G$) и существует такая коммутативная группа Λ, что

а) $\lambda g = g\lambda$ при всех $g \in \mathbf{G}$, $\lambda \in \Lambda$;

б) пересечение $\mathbf{G} \cap \Lambda = e$, где e — единичное преобразование;

в) совокупность $\mathrm{D} = \{\lambda g : \lambda \in \Lambda;\ g \in \mathbf{G}\}$ транзитивна в $\mathbf{X}$,

то для любых $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_0$ найдутся единственные преобразования $\lambda_{\mathbf{x}}$ и $g_{\mathbf{x}}$, при которых $\lambda g_{\mathbf{x}} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0$; статистики $V_1(\mathbf{x}) = g_{\mathbf{x}}\mathbf{x}$ и $V_2(\mathbf{x}) = \lambda_{\mathbf{x}}\mathbf{x}$ являются соответственно МИ групп $\mathbf{G}$ и Λ.

Замечание. Если $V_1(\mathbf{x}) = f[Z(\mathbf{x})]$, где $f[\cdot]$ — взаимно-однозначная функция, то $Z(\mathbf{x})$ — также МИ группы $\mathbf{G}$.

Дадим пример использования данного способа. Пусть $\mathrm{X} = R_n$, где R_n — n-мерное евклидово пространство векторов $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, и операторы $g \in \mathbf{G}$ заданы диагональными матрицами $\mathrm{diag}\,(k_1, \ldots, k_n)$, где $k_i = \pm 1$, $i = \overline{1, n}$. Операторы $\lambda \in \Lambda$ задаются диагональными матрицами $\mathrm{diag}\,(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. При $x_0 \neq 0$ операторы $\lambda_{\mathbf{x}}$ и $g_{\mathbf{x}}$ представляются соответственно матрицами $\mathrm{diag}\left(\left|\frac{x_{01}}{x_1}\right|, \ldots, \left|\frac{x_{0n}}{x_n}\right|\right)$, $\mathrm{diag}\left(\mathrm{sign}\,\frac{x_{01}}{x_1}, \ldots, \mathrm{sign}\,\frac{x_{0n}}{x_n}\right)$. Поэтому $V_1(\mathbf{x}) = (|x_1|\ \mathrm{sign}\ x_{01}, \ldots, |x_n|\ \mathrm{sign}\ x_{0n})$. Так как функция $f(\mathbf{y}) = (y_1 \mathrm{sign}\, x_{01}, \ldots, y_n\ \mathrm{sign}\ x_{0n})$ взаимно-однозначна относительно $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, то МИ будет также статистика $Z(\mathbf{x}) = (|x_1|, \ldots, |x_n|)$.

Многоальтернативные инвариантные правила проверки гипотез. Теория инвариантности допускает обобщение на многоальтернативный случай, если качество правил оценивать полной вероятностью правильного обнаружения, введенной в п. 2.1.3, и оптимальными (РНМ) считать правила, удовлетворяющие условиям (2.21). Для существования многоальтернативного РНМ инвариантного правила требуется, чтобы: 1) гипотеза H_0, сформулированная через параметры семейства $\mathcal{P}^Z$ распределений МИ, была простой; 2) семейства $\mathcal{P}_k^Z$ распределений МИ при каждой альтернативе H_k, $k=\overline{1, m}$, обладали монотонными относительно некоторых статистик $U_k(Z)$ отношениями правдоподобия и нормирующие множители распределений были одинаковыми при всех альтернативах; 3) существовала совокупность преобразований МИ, удовлетворяющая условиям (2.22). Решающая функция многоальтернативного РНМ инвариантного (нерандомизированного) правила

$$\varphi(\mathbf{x})=\begin{cases}(\varphi_1(\mathbf{x})=0,\ldots,\varphi_m(\mathbf{x})=0) \text{ при } \max\limits_{k=\overline{1,m}} U_k[Z(\mathbf{x})]\leqslant C(\alpha);\\ (0,\ldots,\varphi_i(\mathbf{x})=1,0,\ldots,0) \text{ при } \max\limits_{k=\overline{1,m}} U_k[Z(\mathbf{x})]=\\ \qquad =U_i[Z(\mathbf{x})]>C(\alpha),\quad i=\overline{1,m},\end{cases} \tag{2.52}$$

где постоянный порог $C(\alpha)$ определяется заданным уровнем α вероятности ложной тревоги.

РНМ инвариантные правила оптимальны в классе правил с инвариантной решающей функцией. Однако это не гарантирует допустимости (см. п. 2.1.3) РНМ инвариантных правил. Иногда РНМ инвариантное правило оказывается также РНМ несмещенным [87], что автоматически влечет его допустимость. В остальных случаях допустимость РНМ инвариантного правила надо специально доказывать. Интересно сравнить РНМ инвариантные правила с РНМ правилами, у которых функция мощности инвариантна относительно индуцированной группы $\mathbf{G}_*$. Класс таких правил шире класса инвариантных правил. Поэтому РНМ правило в этом классе не менее эффективно, чем РНМ инвариантное правило, и, следовательно, предпочтительнее последнего. Однако РНМ инвариантное правило и РНМ правило с инвариантной функцией мощности совпадают, если семейство распределений наблюдаемого процесса имеет достаточные статистики, распределения которых образуют полное семейство [87]. Подобная ситуация довольно часто встречается в задачах обнаружения с экспоненциальными семействами распределений.

ЛНМ инвариантные правила. В отсутствие РНМ инвариантных правил могут быть полезны ЛНМ инвариантные правила, максимизирующие производную функции мощности $\beta(\varphi \mid \gamma)$ при малых значениях γ. ЛНМ инвариантные правила строятся по той же схеме, что и ЛНМ несмещенные правила, с той лишь разницей, что наблюдаемый процесс заменяется МИ.

2.4. Инвариантные правила обнаружения и различения сигналов

2.4.1. Обнаружение и различение сигналов в гауссовском шуме с неизвестными характеристиками

Рассмотрим задачу обнаружения сигнала $\sqrt{E}s\,(t;\,\varphi_0)$ с произвольной начальной фазой φ_0 на фоне гауссовского шума. Шум на входе ЛТП полагаем белым с корреляционной функцией $N_0\delta\,(t_2-t_1)$, сигнал $s\,(t;\,\varphi_0)$ при фиксированной фазе φ_0 — известным и имеющим единичную энергию. Наблюдаемым процессом $x\,(t)$, $t\in[0,\,T]$, считаем колебание на выходе ЛТП с П-образной амплитудно-частотной характеристикой, единичным коэффициентом передачи и полосой пропускания Δf. К априорно неопределенным параметрам принятого сигнала относим энергию $E\in(0,\,\infty)$ и начальную фазу $\varphi_0\in(-\pi;\,\pi]$, к априорно неопределенному параметру шума — спектральную плотность $N_0\in\in(0;\,\infty)$.

Образуем выборку $\dot{\mathbf{x}}=(\dot{x}_1,\ldots,\,\dot{x}_\nu)$ объема $\nu=\Delta fT$ из отсчетов $\dot{x}_i$ комплексной огибающей $\dot{x}\,(t)$ наблюдаемого процесса в моменты времени $t_i=i/\Delta f$. Плотность вероятности этой выборки

$$W(\dot{\mathbf{x}}\,|\,E;\,\varphi_0;\,N_0)=k\exp\left\{-\frac{1}{4N_0\,\Delta f}\,\|\dot{\mathbf{x}}-\sqrt{E}\exp(-i\varphi_0)\,\dot{\mathbf{s}}\|^2\right\},\quad(2.53)$$

где $k=1/(4\pi N_0\Delta f)^\nu$; $\dot{\mathbf{s}}=(\dot{s}_1,\ldots,\,\dot{s}_\nu)$ — сигнальный вектор, образованный из отсчетов комплексной огибающей $\dot{s}\,(t)$ сигнала $s\,(t;\,\varphi_0)$ при $\varphi_0=0$; $\|\cdot\|$ — норма в комплексном евклидовом пространстве.

Введем полезный параметр $\boldsymbol{\vartheta}=(\vartheta_1,\,\vartheta_2)$, где $\vartheta_1=\sqrt{E}\cos\varphi_0/(2\,N_0)$, $\vartheta_2=\sqrt{E}\sin\varphi_0/(2\,N_0)$; мешающий параметр $\pi=1/(4N_0)$ и статистики $U_1(\dot{\mathbf{x}})=\frac{1}{\Delta f}\,\mathrm{Re}\langle\dot{\mathbf{x}};\,\dot{\mathbf{s}}\rangle$, $U_2(\dot{\mathbf{x}})=\frac{1}{\Delta f}\,\mathrm{Im}\langle\dot{\mathbf{x}};\,\dot{\mathbf{s}}\rangle$, $T(\dot{\mathbf{x}})=\frac{1}{\Delta f}\,\|\dot{\mathbf{x}}\|^2$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в комплексном евклидовом пространстве. При большом произведении ΔfT (большой базе сигнала) статистики U_1, U_2 и T можно приближенно представить в интегральной форме:

$$U_1(\dot{\mathbf{x}})=\mathrm{Re}\int_0^T\dot{x}\,(t)\,\dot{s}^*\,(t)\,dt;\quad U_2(\mathbf{x})=\mathrm{Im}\int_0^T\dot{x}\,(t)\,\dot{s}^*\,(t)\,dt;$$

$$T(\dot{\mathbf{x}})=\int_0^T|\,\dot{x}\,(t)\,|^2\,dt,\qquad(2.54)$$

Тогда плотность (2.53) можно записать в виде плотности вероятности экспоненциального распределения

$$W(\dot{\mathbf{x}}\,|\,\boldsymbol{\vartheta})=k\exp\left(-\frac{\vartheta_1^2+\vartheta_2^2}{4\pi}\right)\exp[-\pi T(\dot{\mathbf{x}})+$$

$$+\vartheta_1U_1(\dot{\mathbf{x}})+\vartheta_2U_2(\dot{\mathbf{x}})],\qquad(2.55)$$

где $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_1; \vartheta_2; \pi)$. Через параметр $\boldsymbol{\vartheta}$ задача обнаружения формулируется как задача проверки сложных гипотез:

$$H_0 : \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta_0 = \{\boldsymbol{\vartheta}: \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 = 0;\ 0 < \pi < \infty\};$$

$$H_1 : \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta_1 = \{\boldsymbol{\vartheta} : 0 < \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 < \infty;\ 0 < \pi < \infty\}.$$

Для решения этой задачи не удается воспользоваться принципом несмещенности, так как полезный параметр $(\vartheta_1; \vartheta_2)$ неодномерен. Поэтому попытаемся применить принцип инвариантности.

Неопределенность начальной фазы, энергии сигнала и спектральной плотности шума представим группой $\mathbf{G} = \{g: \dot{\mathbf{x}} \to \delta \exp(-i\varphi)\dot{\mathbf{x}},\ \delta \in (0;\infty);\ \varphi \in (-\pi, \pi)\}$. Замечая, что якобиан $|J_g| = \delta$ и $\frac{1}{N_0} \|\delta \times \times \exp(-i\varphi)\,\dot{\mathbf{x}} - \sqrt{E}\exp(-i\varphi_0)\,\dot{\mathbf{s}}\|^2 = \frac{1}{N_0'} \|\dot{\mathbf{x}} - \sqrt{E'}\exp(-i\varphi_0')\,\times \times \dot{\mathbf{s}}\|^2$ при $N_0' = N_0/\delta^2$; $E' = E/\delta^2$; $\varphi_0' = \varphi_0 - \varphi$, нетрудно установить симметрию семейства $\mathcal{P}$ с плотностью вероятности (2.55) относительно группы $\mathbf{G}$. Группа $\mathbf{G}$ индуцируется в пространство значений статистики $(U_1(\dot{\mathbf{x}}); U_2(\dot{\mathbf{x}}); T(\dot{\mathbf{x}}))$, определяемой выражениями (2.54), в группу линейных преобразований с матрицами $\mathbf{C} = [C_{ik}]$, у которых $C_{11} = C_{22} = \delta\cos\varphi$; $C_{12} = -C_{21} = \delta\sin\varphi$; $C_{33} = \delta^2$ и остальные элементы равны нулю.

Статистики (2.54) согласно теореме факторизации достаточны для семейства $\mathcal{P}$. Поэтому вместо выборки $\mathbf{x}$ будем рассматривать статистику $(U_1; U_2; T)$, а группу $\mathbf{G}$ — представлять линейными преобразованиями с матрицами $\mathbf{C}$. Так как семейство распределений статистики $(U_1; U_2; T)$ является экспоненциальным, то индуцированная в пространство $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ группа $\mathbf{G}_*$ состоит из линейных преобразований, матрицы которых $\mathbf{C}_* = (\mathbf{C}^{-1})$. Легко проверить, что множества Θ_0 и Θ_1 инвариантны относительно группы $\mathbf{G}^*$.

Таким образом, к данной задаче применим принцип инвариантности. По методике п. 2.3.2 находим, что МИ групп $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}_*$ соответственно равны $Z = (U_1^2 + U_2^2)/T$ и $\gamma = (\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2)\pi/$. В терминах параметра γ гипотезы H_0 и H_1 формулируются в виде

$$H_0 : \gamma \in \Gamma_0 = \{\gamma = 0\};\quad H_1 : \gamma \in \Gamma_1 = \{\gamma : 0 < \gamma < \infty\}.$$

Статистика Z имеет нецентральное бета-распределение с параметром нецентральности $(\gamma/2)^{1/2}$ [87]. Семейство бета-распределений обладает монотонным относительно статистики Z отношением правдоподобия. Поэтому существует РНМ инвариантное правило проверки гипотез H_0 и H_1, его решающая функция

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 \text{ при } U_1^2(\dot{\mathbf{x}}) + U_2^2(\dot{\mathbf{x}}) \geqslant C(\alpha)\,T(\dot{\mathbf{x}}); \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \qquad (2.56)$$

Правило (2.56) обладает стабильной вероятностью ложной тревоги при любых изменениях спектральной плотности шума, обеспечивает инвариантность вероятности правильного обнаружения относительно начальной фазы сигнала и максимизирует эту вероятность для всех от-

ношений сигнал-шум $d_T^2 = E / (2N_0)$ в классе инвариантных правил. Так как в задаче имеются достаточные статистики (2.54) и их распределения согласно (2.55) и теореме о полноте семейства образуют полное семейство, то правило (2.56) максимизирует вероятность правильного обнаружения не только в классе инвариантных правил, но и в более широком классе правил, у которых функция мощности имеет отмеченные свойства инвариантности.

Структурная схема обнаружителя, реализующего правило (2.56), изображена на рис. 2.9. На рис. 2.10 даны характеристики обнаружения для различных значений $\nu = \Delta f T$. Характеристики рассчитаны по таблицам F-распределения [74]. Из этих характеристик следуют те же выводы, что и при когерентном обнаружении сигнала с известной начальной фазой.

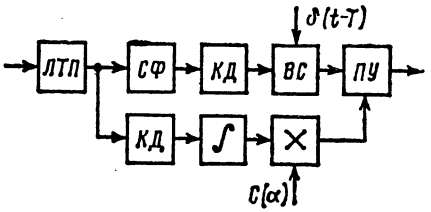


Рис. 2.9 Структурная схема обнаружителя некогерентного сигнала в шумах неизвестной мощности

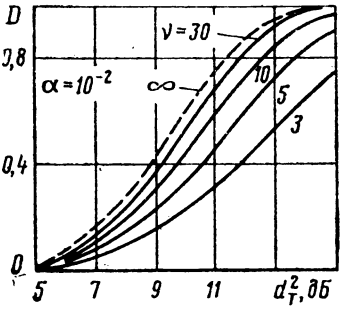


Рис. 2.10. Характеристики обнаружения некогерентного сигнала в шумах неизвестной мощности

Усложним задачу обнаружения, полагая априорно неопределенной не только мощность шума, но и его корреляционную функцию (энергетический спектр). Строгое решение этой задачи методами теории инвариантности невозможно, так как полная неопределенность корреляционной функции представляется транзитивной группой, относительно которой МИ является константой. Однако могут быть получены приближенно инвариантные правила. Рассмотрим одно из них. Пусть в полосе частот обнаруживаемого сигнала $s_1(t)$ существуют сигналы $s_j(t)$, $j = \overline{2, n}$, ортогональные к сигналу $s_1(t)$ и друг к другу при любых временных задержках и имеющие такой же, как у сигнала $s_1(t)$, амплитудно-частотный спектр. Используя эти сигналы, образуем выборку $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ из комплексных случайных величин $\dot{x}_j = \int_0^T \dot{x}(t)\, \dot{s}_j^*(t)\, dt$, где $\dot{x}(t)$ — комплексная огибающая процесса на выходе ЛТП; $\dot{s}_j(t)$ — комплексная огибающая сигнала $s_j(t)$, $j = \overline{1,n}$.

Если шум стационарный, то случайные величины $\dot{x}_j$ не коррелированы между собой и имеют одинаковые дисперсии. Математические ожидания всех величин $\dot{x}_j$ равны нулю в отсутствие обнаруживаемого сигнала $s_1(t)$. При наличии сигнала $s_1(t)$ математические ожидания величин $\dot{x}_j$, $j = \overline{2, n}$, остаются нулевыми, а математическое ожидание величины

$\dot{x}_1$ принимает значение $2\sqrt{E}\exp(-i\varphi_0)$. Априорная неопределенность корреляционной функции шума выражается в неопределенности дисперсий случайных величин x_j, причем изменение корреляционной функции сопровождается «дружными» изменениями этих дисперсий и не влияет на некоррелированность величин x_j, если не нарушается стационарность шума.

С учетом отмеченных свойств выборки $\dot{\mathbf{x}}$ ее плотность вероятности

$$W(\dot{\mathbf{x}}\mid E;\ \varphi_0;\ \sigma^2)=(2\pi\sigma^2)^n\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=2}^{n}|\dot{x}_j|^2\right)\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}|\dot{x}_1-2\sqrt{E}\exp(-i\varphi_0)|^2\right], \qquad (2.57)$$

где σ^2— дисперсия квадратурных составляющих $\mathrm{Re}\,\dot{x}_j$, $\mathrm{Im}\,\dot{x}_j$ величин $\dot{x}_j$. При априорной неопределенности энергии E, начальной фазы φ_0 сигнала и корреляционной функции шума, выражающейся, как было отмечено, в неопределенности дисперсии σ^2, гипотезы о наличии и отсутствии сигнала имеют вид

$$H_0:\boldsymbol{\vartheta}=(\vartheta_1,;\ \vartheta_2;\ \pi)\in\Theta_0=\{\boldsymbol{\vartheta}:\ \vartheta_1^2+\vartheta_2^2=0;\ 0<\pi<\infty\}; \qquad (2.58)$$

$$H_1:\boldsymbol{\vartheta}\in\Theta_1=\{\boldsymbol{\vartheta}:0<\vartheta_1^2+\vartheta_2^2<\infty;\quad 0<\pi<\infty\},$$

где параметры $\vartheta_1=2\sqrt{E}\cos\varphi_0/\sigma^2$; $\vartheta_2=2\sqrt{E}\sin\varphi_0/\sigma^2$; $\pi=1/(2\sigma^2)$.

Из (2.57) и (2.58) следует, что задача обнаружения симметрична относительно группы $\mathbf{G}=\{g:\ \mathbf{x}\to\delta\exp(i\varphi)\,\mathbf{x};\ \delta\in(0;\ \infty);\ \varphi\in(-\pi;\ \pi]\}$. Индуцированная группа $\mathbf{G}_*$ состоит из линейных операторов с матрицами $[C_{ik}]$, у которых $C_{11}=C_{22}=\delta\cos\varphi$; $C_{12}=-C_{21}=\delta\sin\varphi$; $C_{33}=\delta^2$; $C_{13}=C_{31}=C_{23}=C_{32}=0$. Применяя методику п. 2.3.2, находим МИ группы $\mathbf{G}$: $Z=(Z_1,\ \ldots,\ Z_n)$, где $Z_j=|\dot{x}_j|^2/|\dot{x}_n|^2$, $j=\overline{1,n}$. Аналогично устанавливаем, что МИ группы $\mathbf{G}_*$ совпадает с отношением сигнал-шум d_T^2 на выходе фильтра, согласованного с обнаруживаемым сигналом. Плотность вероятности МИ

$$W(Z\mid\gamma)=\frac{\Gamma(n)\exp(-\gamma)}{\left(\sum_{j=1}^{n}Z_j\right)^n}\Phi\left(n;\ 1;\ \gamma\frac{Z_1}{\sum_{j=1}^{n}Z_j}\right), \qquad (2.59)$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция; $\Phi(\cdot)$ — вырожденная гипергеометрическая функция; $\gamma=d_T^2$.

Семейство распределений с плотностью вероятности (2.59) имеет монотонное отношение правдоподобия относительно статистики $U(Z)=Z_1/\sum_{j=1}^{n}z_j$. Поэтому существует РНМ инвариантное правило. Раскрывая выражения для статистик U и Z, решающая функция этого правила

$$\varphi(\dot{\mathbf{x}})=\begin{cases}1 \text{ при } |\dot{x}_1|^2\geqslant C(\alpha)\sum_{j=2}^{n}|\dot{x}_j|^2;\\ 0 \text{ в остальных случаях.}\end{cases} \qquad (2.60)$$

Структурная схема обнаружителя с решающей функцией (2.60) дана на рис. 2.11. Характеристики обнаружения полученного правила совпадают с характеристиками некогерентного обнаружения в шумах неизвестной мощности рис. 2.10, если положить $\nu = n$ и в качестве d_T^2 подставлять отношение сигнал-шум на выходе фильтра, согласованного с обнаруживаемым сигналом, при воздействии коррелированного шума. Из этих характеристик следует вывод о целесообразности использования сигналов с большой базой, так как с увеличением базы расширяются возможности построения ансамбля взаимно-ортогональных сигналов s_j, $j = \overline{1, n}$, что позволяет увеличить параметр n и повысить благодаря этому эффективность обнаружения.

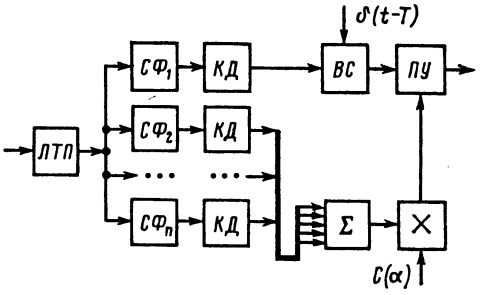


Рис. 2.11. Структурная схема обнаружителя некогерентного сигнала в шумах с неизвестным спектром

Инвариантность правила (2.60) выражается в стабильности вероятности ложной тревоги при изменении уровня шума и его корреляционной функции (если только не нарушается стационарность шума на интервале наблюдения) и в независимости вероятности правильного об-

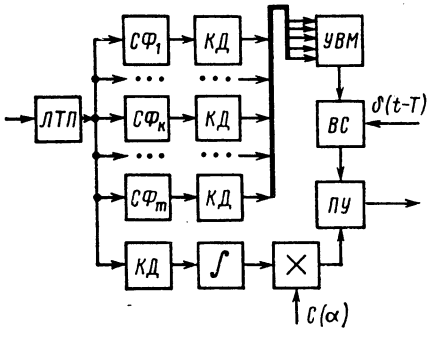


Рис. 2.12. Структурная схема обнаружителя ортогональных сигналов в шумах неизвестной мощности

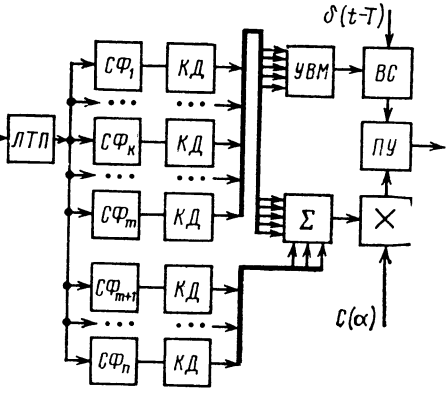


Рис. 2.13. Структурная схема обнаружителя ортогональных сигналов в шумах с неизвестным спектром

наружения от таких изменений характеристик шума, которые не сказываются на отношении сигнал-шум на выходе согласованного фильтра, причем вероятность правильного обнаружения максимальна при всех отношениях сигнал-шум.

Следует отметить, что правило (2.60) не обеспечивает строгой инвариантности относительно корреляционной функции шума, так как не существует сигналов, сохраняющих идеальную ортогональность

при любых относительных задержках. Однако его устойчивость к изменению корреляционной функции шума будет достаточно высокой, если интервал корреляции шума меняется в конечных пределах и взаимно-корреляционные функции сигналов s_j имеют малые выбросы при изменении относительных задержек в этих пределах. Эти требования обычно выполняются при достаточно широкополосном шуме и большой базе обнаруживаемого сигнала.

Правила обнаружения (2.56) и (2.60) допускают обобщение на случай многоальтернативного обнаружения, если обнаруживаемые сигналы ортогональны при любых начальных фазах при обнаружении в белом шуме или ортогональны при произвольных относительных задержках в случае коррелированного шума. Структурные схемы соответствующих обнаружителей даны на рис. 2.12, 2.13.

2.4.2. Обнаружение сигналов на фоне пассивных помех с неопределенными параметрами

Рассмотрим задачу обнаружения сигнала при совместном воздействии гауссовского шума и мешающих сигналов, например мешающих отражений в локационных системах, межсимвольных помех при многолучевом распространении сигнала и межканальных помех в системах связи. Мешающие сигналы подобного рода принято называть пассивными помехами. Известны методы борьбы с пассивными помехами, когда они адекватно представляются гауссовским коррелированным шумом [75]. Однако не всегда для пассивных помех справедлива гауссовская аппроксимация. В ряде случаев вообще отсутствуют основания для представления пассивной помехи случайным процессом с устойчивым распределением. Поэтому представляют интерес правила обнаружения при минимальных априорных данных о пассивной помехе, когда задано только множество ее реализаций без определения на нем вероятностного распределения. Ниже рассмотрен вариант такого правила, полученного с использованием принципа инвариантности.

В качестве наблюдаемого процесса возьмем колебание на выходе ЛТП с П-образной амплитудно-частотной характеристикой. Спектральную плотность гауссовского шума считаем постоянной в пределах полосы Δf пропускания ЛТП. При этих предположениях комплексные огибающие $\dot{s}(t)$, $\dot{\xi}(t)$ и $\dot{n}(t)$ сигнала, пассивной помехи и шума на выходе ЛТП аппроксимируются финитными по частоте процессами, принадлежащими гильбертову пространству $\mathbf{H}$ с воспроизводящим ядром [93]. Воспроизводящее ядро пространства $\mathbf{H}$ равно корреляционной функции комплексной огибающей шума на выходе ЛТП. Комплексная огибающая наблюдаемого процесса $\dot{x}(t) = \dot{s}(t) + \dot{\xi}(t) + \dot{n}(t)$ также принадлежит пространству $\mathbf{H}$. Так как точность аппроксимации ограниченного во времени процесса финитным по частоте процессом возрастет с увеличением произведения ширины Δf спектра на время T наблюдения, то полагаем $\Delta f T \gg 1$. Конкретный вид реализации $\dot{\xi}(t)$ пассивной помехи считаем неизвестным. Единственное предположение о помехе состоит в том, что совокупность всех ожидаемых реализаций $\dot{\xi}(t)$ образует подпространство $\mathbf{L} \subset \mathbf{H}$.

Действие пассивной помехи на наблюдаемый процесс равносильно преобразованию его комплексности огибающей группой $\mathbf{G} = \{g: \dot{x}(t) \to \dot{x}(t) + \dot{\xi}(t); \dot{\xi}(t) \in \mathbf{L}\}$ аддитивных операторов. В связи с этим для построения правила обнаружения, устойчивого относительно пассивной помехи, воспользуемся принципом инвариантности. Применяя методику п. 2.3.2, находим, что МИ группы $\mathbf{G}$ является процесс $\dot{\mathbf{Z}}(t) = \dot{x}(t) - \widehat{\dot{x}}(t)$, где $\widehat{\dot{x}}(t) = \mathrm{Pr}[\dot{x}(t)]$ — ортогональная проекция наблюдения $\dot{x}(t)$ в подпространство $\mathbf{L}$. Оператор Pr ортогонального проектирования существует, так как $\mathbf{L}$ — подпространство в пространстве $\mathbf{H}$ и $\dot{x}(t) \in \mathbf{H}$. Полученный МИ принадлежит ортогональному дополнению $\mathbf{Q}$ подпространства $\mathbf{L}$ и состоит из сигнальной $\dot{s}(t) - \widehat{\dot{s}}(t)$ и шумовой $\dot{\zeta}(t) = \dot{n}(t) - \widehat{\dot{n}}(t)$ компонент, где $\widehat{\dot{s}}(t) = \mathrm{Pr}[\dot{s}(t)]$ и $\widehat{\dot{n}}(t) = \mathrm{Pr}[\dot{n}(t)]$. Пассивная помеха отсутствует в процессе $\dot{Z}(t)$, так как $\dot{x}(t) + \dot{\xi}(t) - \mathrm{Pr}[\dot{x}(t) + \dot{\xi}(t)] = \dot{x}(t) - \mathrm{Pr}[\dot{x}(t)]$ в силу равенства $\mathrm{Pr}[\dot{\xi}(t)] = \dot{\xi}(t)$. Это создает необходимые предпосылки для устойчивости правила обнаружения к действию пассивной помехи. В связи с линейностью оператора Pr процесс $\dot{Z}(t)$ является гауссовским со средним значением $\dot{s}(t) - \widehat{\dot{s}}(t)$ и некоторой корреляционной функцией $B_\zeta(t_1; t_2)$.

Образуем выборку $\dot{\mathbf{Z}} = (\dot{Z}_1, \ldots, \dot{Z}_\nu)$, $\nu = \Delta f T$, из отсчетов $\dot{Z}_i$ процесса $\dot{Z}(t)$ в моменты времени $t_i = i/\Delta f$. Плотность вероятности этой выборки

$$W(\dot{\mathbf{Z}}) = k \exp\left[-\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\langle \dot{\mathbf{Z}} - (\dot{\mathbf{s}} - \widehat{\dot{\mathbf{s}}});\ \dot{\mathbf{Y}}\rangle\right], \tag{2.61}$$

где $\dot{\mathbf{s}} - \widehat{\dot{\mathbf{s}}} = (\dot{s}_1 - \widehat{\dot{s}_1}, \ldots, \dot{s}_\nu - \widehat{\dot{s}_\nu})$ — выборка из отсчетов сигнальной компоненты процесса $\dot{Z}(t)$; $\dot{\mathbf{Y}} = (\dot{Y}_1, \ldots, \dot{Y}_\nu)$ — вектор, удовлетворяющий уравнению

$$\mathbf{B}_\zeta \dot{\mathbf{Y}} = \dot{\mathbf{Z}} - (\dot{\mathbf{s}} - \widehat{\dot{\mathbf{s}}}) \tag{2.62}$$

с матрицей $\mathbf{B}_\zeta = [B_\zeta(t_i; t_k)]$. Используя свойство воспроизведения пространства $\mathbf{H}$ и заменяя (2.62) интегральным уравнением с ядром $B_\zeta(t_1; t_2)$, можно показать, что при большом значении $\nu = \Delta f T$ уравнение (2.62) имеет решение $\dot{\mathbf{Y}} \approx [\dot{\mathbf{Z}} - (\dot{\mathbf{s}} - \widehat{\dot{\mathbf{s}}})]/(2N_0 \Delta f)$, где N_0 — спектральная плотность гауссовского шума на входе ЛТП. С учетом этого решения плотность вероятности (2.61) принимает вид

$$W(\dot{\mathbf{Z}}) = k \exp\left[-\frac{1}{4N_0 \Delta f}\,\|\dot{\mathbf{Z}}\|^2 + \frac{1}{2N_0 \Delta f}\,\mathrm{Re}\,\langle \dot{\mathbf{Z}};\ \dot{\mathbf{s}} - \widehat{\dot{\mathbf{s}}}\rangle - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4N_0 \Delta f}\,\|\dot{\mathbf{s}} - \widehat{\dot{\mathbf{s}}}\|^2\right]. \tag{2.63}$$

При достаточно большом объеме выборки $\dot{\mathbf{Z}}$ статистика $\frac{1}{\Delta f}\|\dot{\mathbf{Z}}\|^2 \approx$ $\approx \|\dot{\mathbf{Z}}\|_{\text{н}}^2$ и статистика $\frac{1}{\Delta f}\langle \dot{\mathbf{Z}};\ \dot{\mathbf{s}}-\hat{\dot{\mathbf{s}}}\rangle \approx \langle \dot{\mathbf{Z}};\ \dot{\mathbf{s}}-\hat{\dot{\mathbf{s}}}\rangle_{\text{н}}$, где $\|\cdot\|_{\text{н}}$ и $\langle\cdot;\cdot\rangle_{\text{н}}$ — соответственно норма и скалярное произведение в пространстве $\mathbf{H}$. Ниже указанные статистики выражаются через норму и скалярное произведение в пространстве $\mathbf{H}$, поэтому индекс «н» при записи этих статистик опускается.

Распределения с плотностью вероятности (2.63) образуют экспоненциальное семейство, для которого выполняются условия существования РНМ инвариантного правила. Так как (2.63) совпадает с выражением для плотности вероятности при обнаружении сигнала в белом шуме с той только разницей, что наблюдаемая выборка $\mathbf{x}$ заменена вектором $\dot{\mathbf{Z}}$ и обнаруживаемый сигнал $\dot{\mathbf{s}}$ — сигналом $\dot{\mathbf{s}}-\hat{\dot{\mathbf{s}}}$, то при построении РНМ инвариантного правила можно непосредственно использовать результаты пп. 2.2.1 и 2.4.1. Согласно этим результатам в случае когерентного обнаружения (начальная фаза сигнала известна) и априорно неопределенной спектральной плотности шума получаем с учетом равенства $\langle \dot{\mathbf{Z}};\ \dot{\mathbf{s}}-\hat{\dot{\mathbf{s}}}\rangle = \langle \dot{\mathbf{x}};\ \dot{\mathbf{s}}-\hat{\dot{\mathbf{s}}}\rangle$ решающую функцию РНМ инвариантного правила

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 \text{ при } \operatorname{Re}\langle \dot{\mathbf{x}};\ \dot{\mathbf{s}}-\hat{\dot{\mathbf{s}}}\rangle \geqslant C(\alpha)\sqrt{\|\dot{\mathbf{x}}-\hat{\dot{\mathbf{x}}}\|^2}; \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.64}$$

При некогерентном обнаружении (начальная фаза сигнала произвольная) и априорно неопределенной спектральной плотности шума решающая функция

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 \text{ при } |\langle \dot{\mathbf{x}};\ \dot{\mathbf{s}}-\hat{\dot{\mathbf{s}}}\rangle|^2 \geqslant C(\alpha)\|\dot{\mathbf{x}}-\hat{\dot{\mathbf{x}}}\|^2; \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.65}$$

Правила (2.64) и (2.65) обеспечивают инвариантность вероятностей ложной тревоги и правильного обнаружения к воздействию пассивной помехи. Они имеют также стабильную вероятность ложной тревоги при изменении уровня шума, а правило (2.65) — инвариантную к начальной фазе сигнала вероятность правильного обнаружения. Вероятность правильного обнаружения у этих правил максимальна среди всех правил, инвариантных к действию пассивной помехи рассмотренного вида.

Остановимся на вычислении статистик $\langle \dot{\mathbf{x}};\ \dot{\mathbf{s}}-\hat{\dot{\mathbf{s}}}\rangle$ и $\|\dot{\mathbf{x}}-\hat{\dot{\mathbf{x}}}\|^2$. Значение статистики $\langle \dot{\mathbf{x}};\ \dot{\mathbf{s}}-\hat{\dot{\mathbf{s}}}\rangle$ равно в некоторый момент времени t_0 отклику фильтра, согласованного с сигналом $\dot{s}(t)-\hat{\dot{s}}(t)$. Нормированная импульсная реакция этого фильтра $g(t) = h^*(t_0 - t)$, где

$$h(t) = [\dot{s}(t)-\hat{\dot{s}}(t)]/\|\dot{\mathbf{s}}-\hat{\dot{\mathbf{s}}}\|. \tag{2.66}$$

Фильтр (2.66) режектирует пассивную помеху $\dot{\xi}(t) \in \mathbf{L}$, так как функция $h(t)$ ортогональна подпространству $\mathbf{L}$. Такой режекторный фильтр (РФ) наряду с подавлением пассивной помехи выделяет также полезный сигнал $\dot{s}(t)$ с максимальным выходным отношением сигнал-шум, т. е. оказывается своего рода оптимальным в классе всех РФ, подавляющих помеху и выделяющих сигнал. Чтобы это показать, сравним выходные отношения сигнал-шум фильтра (2.66) и произвольного РФ, импульсная реакция которого задается отличной от $h(t)$ функцией $f(t)$. При условии нормировки ($||\mathbf{h}|| = ||\mathbf{f}|| = 1$) выходные отношения сигнал-шум этих фильтров соответственно равны $d_h^2 = |<\dot{\mathbf{s}}; \mathbf{h}>|^2/(2N_0)$; $d_f^2 = |<\dot{\mathbf{s}}; \mathbf{f}>^2/(2N_0)$. Так как $||\mathbf{h}||^2 = <\dot{\mathbf{s}} - \widehat{\mathbf{s}}; \mathbf{h}>/||\dot{\mathbf{s}} - \widehat{\mathbf{s}}||$, $||\mathbf{h}|| = 1$ и $<\widehat{\mathbf{s}}; \mathbf{h}> = 0$, то $<\dot{\mathbf{s}}; \mathbf{h}> = ||\dot{\mathbf{s}} - \widehat{\mathbf{s}}||$. Далее с учетом равенств $<\mathbf{h}; \mathbf{f}> = <\dot{\mathbf{s}} - \widehat{\mathbf{s}}; \mathbf{f}>/||\dot{\mathbf{s}} - \widehat{\mathbf{s}}||$, $<\widehat{\mathbf{s}}; \mathbf{f}> = 0$ имеем $<\dot{\mathbf{s}}; \mathbf{f}> = ||\dot{\mathbf{s}} - \widehat{\mathbf{s}}|| < \mathbf{h}; \mathbf{f}>$. Отсюда, применяя неравенство Коши—Буняковского ($|<\mathbf{h}; \mathbf{f}>| \leqslant 1$), получаем $|<\dot{\mathbf{s}}; \mathbf{f}>| \leqslant |<\dot{\mathbf{s}}; \mathbf{h}>|$, т. е. $d_f^2 \leqslant d_h^2$. Таким образом, фильтр (2.66) действительно максимизирует выходное отношение сигнал-шум в классе всех РФ.

Фильтр (2.66) является единственным оптимальным РФ в смысле выходного отношения сигнал-шум. Для доказательства этого покажем, что в классе РФ, у которых $\mathrm{Im} <\dot{\mathbf{s}}; \mathbf{f}> = 0$, равенство $d_f^2 = d_h^2$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mathbf{f} = \mathbf{h}$. Так как $||\mathbf{h} - \mathbf{f}||^2 = 2 - <\mathbf{h}; \mathbf{f}> - <\mathbf{f}; \mathbf{h}>$ и $<\mathbf{h}; \mathbf{f}> = <\dot{\mathbf{s}} - \widehat{\mathbf{s}}; \mathbf{f}>/||\dot{\mathbf{s}} - \mathbf{s}|| = <\dot{\mathbf{s}}; \mathbf{f}>/||\dot{\mathbf{s}} - \widehat{\mathbf{s}}||$, то при $\mathrm{Im} <\dot{\mathbf{s}}; \mathbf{f}> = 0$ с учетом равенства $<\dot{\mathbf{s}}; \mathbf{h}> = ||\dot{\mathbf{s}} - \widehat{\mathbf{s}}||$ получаем $||\mathbf{h} - \mathbf{f}||^2 = 2[1 - <\dot{\mathbf{s}}; \mathbf{f}>/<\dot{\mathbf{s}}; \mathbf{h}>]$. Отсюда следует, что $d_f^2 = d_h^2$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{h} = \mathbf{f}$. Ограничение типа $\mathrm{Im} <\dot{\mathbf{s}}; \mathbf{f}> = 0$ несущественно, так как касается только начальной фазы импульсной реакции фильтра. Поэтому можно считать, что фильтр (2.66) является единственным фильтром с максимальным выходным отношением сигнал-шум. Доказанная оптимальность РФ (2.66) есть по существу следствие того, что он построен на основе статистики МИ, которая при соответствующей инвариантности минимально редуцирует наблюдаемые данные (через МИ выражаются все другие инвариантные статистики).

В прикладных задачах пассивная помеха часто аппроксимируется квазидетерминированным сигналом с комплексной огибающей

$$\dot{\xi}(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \dot{\Psi}_i(t), \tag{2.67}$$

где ξ_i — произвольные комплексные коэффициенты; $\dot{\Psi}_i(\cdot)$ — известные линейно-независимые сигналы с единичной энергией; n — конечное число.

Множество сигналов (2.67) образует подпространство L. Ортогональная проекция сигнала $\dot{s}(t)$ в это подпространство

$$\widehat{\dot{s}}(t) = \sum_{i=1}^{n} \widehat{\xi}_i \dot{\Psi}_i(t). \tag{2.68}$$

Весовые коэффициенты $\widehat{\xi}_i$ проекции (2.68) определяются из системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \widehat{\xi}_i R_{ik} = \langle \dot{\mathbf{s}}; \dot{\Psi}_k \rangle, \quad k = \overline{1, n},$$

где $R_{ik} = \langle \dot{\Psi}_i; \dot{\Psi}_k \rangle$ — коэффициенты взаимной корреляции мешающих сигналов.

Согласно выражению (2.68) импульсная реакция оптимального РФ задается функцией

$$h(t) = \left[\dot{s}(t) - \sum_{i=1}^{n} \widehat{\xi}_i \dot{\Psi}_i(t) \right] \Big/ \| \dot{\mathbf{s}} - \widehat{\mathbf{s}} \|. \tag{2.69}$$

Фильтр (2.69) реализуется на основе фильтра СФ, согласованного с обнаруживаемым сигналом $\dot{s}(t)$, совокупности из n фильтров Φ_i, согласованных с мешающими сигналами $\dot{\Psi}_i(t)$, сумматора откликов этих фильтров с весами $\widehat{\xi}_i$ и вычитающего устройства. Отклик такой линейной системы в некоторый момент времени, как отмечалось выше, дает значение статистики $\langle \dot{\mathbf{x}}; \dot{\mathbf{s}} - \widehat{\mathbf{s}} \rangle$.

Вторая статистика $\| \dot{\mathbf{x}} - \widehat{\mathbf{x}} \|^2$, входящая в пороговые функции правил (2.64) и (2.65), при пассивной помехе вида (2.67) определяется выражением

$$\| \dot{\mathbf{x}} - \widehat{\mathbf{x}} \|^2 = \| \dot{\mathbf{x}} \|^2 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \langle \dot{\mathbf{x}}; \dot{\Psi}_i \rangle R_{ik}^{-1} \langle \dot{\mathbf{x}}; \dot{\Psi}_k \rangle^*, \tag{2.70}$$

где R_{ik}^{-1} — элементы матрицы $\mathbf{R}^{-1}$, обратной к матрице $\mathbf{R} = [R_{ik}]$.

Устройство, вычисляющее статистику (2.70), состоит из совокупности фильтров, согласованных с сигналами $\dot{\Psi}_i(t)$, вычислителя ВКФ квадратичной формы с матрицей $\mathbf{R}^{-1}$, вычислителя нормы $\| \dot{\mathbf{x}} \|^2$ в виде квадратичного детектора с интегратором и разностного каскада.

Структурные схемы обнаружителей, реализующих правила (2.64) и (2.65), даны на рис. 2.14 и 2.15. На этих рисунках штрихпунктирной линией выделены фильтры, режектирующие пассивную помеху и выделяющие полезный сигнал. Характеристики обнаружения правил (2.64) и (2.65) с достаточной для инженерной практики точностью совпадают с характеристиками когерентного и некогерентного обнаружения сигнала, приведенными на рис. 2.2 и 2.10, если под отношением сиг-

нал-шум понимать отношение сигнал-шум d_h^2 на выходе РФ и заменить параметр $\nu = \Delta f T$ параметром $\nu = \Delta f T - n$, где n — число мешающих сигналов модели (2.67) пассивной помехи. Отношение сигнал-шум на выходе РФ

$$d_h^2 = \frac{1}{2N_0}\left[E - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \langle \dot{s}; \dot{\Psi}_i\rangle R_{ik}^{-1} \langle \dot{s}; \dot{\Psi}_k\rangle^*\right],$$

где E — энергия обнаруживаемого сигнала. Так как $d_h^2 < E/(2N_0)$, то вероятность правильного обнаружения при наличии пассивной помехи меньше, чем в ее отсутствие. Анализ полученных правил показы-

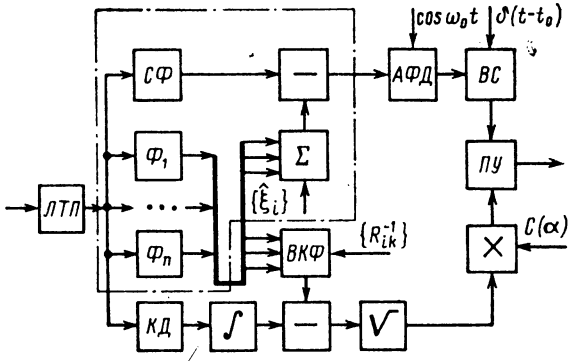


Рис. 2.14. Структурная схема обнаружителя когерентного сигнала на фоне шума и пассивной помехи

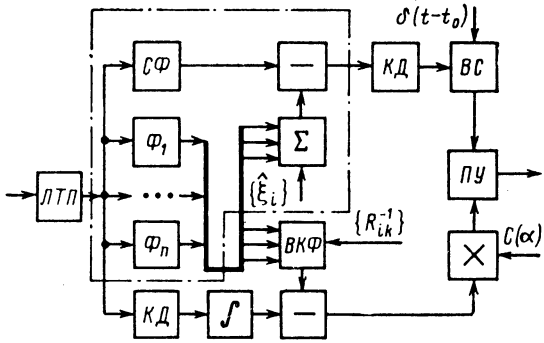


Рис. 2.15. Структурная схема обнаружителя некогерентного сигнала на фоне шума и пассивной помехи

вает, что их применение оправдано, если протяженность зоны пассивной помехи на плоскости (время — частота) мала по сравнению с длительностью и шириной спектра обнаруживаемого сигнала и уровень помех существенно превышает уровень гауссовского шума (имеются в виду пассивные помехи, создаваемые мешающими отражениями зондирующего сигнала).

Полученные выше РФ не являются принципиально новыми, близкие к ним фильтры рассматривались ранее в ряде работ (см., например, [78]). Однако в этих работах не была установлена их оптимальность в

смысле вероятностных характеристик обнаружения при одновременном воздействии шума и пассивной помехи. Здесь показано, что такие РФ входят в обнаружители, максимизирующие вероятность правильного обнаружения, когда сведения о пассивной помехе минимальны и сводятся только к заданию множества ее возможных реализаций.

Рассмотренный РФ можно эффективно использовать для подавления боковых лепестков функции неопределенности сигнала. В частности, он позволяет полностью подавить боковые лепестки автокорреляционной функции (АКФ) фазо-манипулированного (ФМ) сигнала на некотором конечном интервале $\Delta = [m\tau; p\tau]$, где τ — длительность элемента ФМ сигнала; m и p — произвольные целые числа, причем подавление боковых лепестков сопровождается минимальным ослаблением главного максимума АКФ, так как фильтр оптимален в смысле выходного отношения сигнал-шум.

Импульсная реакция фильтра определяется выражением (2.69) при подстановке $\Psi_i(t) = s[t - (i - 1 + m)\tau]$. По построению такой фильтр подавляет боковые лепестки АКФ в дискретных точках $\tau_i = i\tau$, $i = \overline{m, p}$. Непосредственной проверкой нетрудно установить, что этот же фильтр подавляет боковые лепестки на всем интервале Δ, так как АКФ сигнала с фазовой манипуляцией удовлетворяет равенству

$$R_s(\vartheta) = \left(1 - \frac{\vartheta - i\tau}{\tau}\right) R_s(i\tau) + \frac{\vartheta - i\tau}{\tau} R_s[(i+1)\tau]$$

при любом $\vartheta \in [i\tau; (i+1)\tau]$.

2.4.3. Обнаружение сигналов с неизвестными характеристиками замираний

Рассмотрим задачу обнаружения сигнала, подверженного замираниям в канале передачи на фоне белого гауссовского шума с неизвестной спектральной плотностью. В случае общих замираний, которые сопровождаются изменениями амплитуды и начальной фазы сигнала, применимо правило (2.56) некогерентного обнаружения. Это правило инвариантно относительно начальной фазы сигнала и обеспечивает максимальную вероятность правильного обнаружения при всех отношениях сигнал-шум d_T^2. Поэтому оно будет РНМ относительно среднего отношения сигнал-шум $d_{\text{ср}}^2$ при любом распределении амплитудных флуктуаций сигнала и произвольном распределении его начальной фазы.

Вероятность правильного обнаружения может быть получена усреднением вероятности правильного обнаружения правил (2.56) по распределению амплитудных флуктуаций сигнала. В частности, при рэлеевском распределении амплитудных флуктуаций эта вероятность

$$D = \alpha \left(\frac{1 + d_{\text{ср}}^2}{1 + d_{\text{ср}}^2 \alpha^{1/\nu}} \right)^{\nu},$$

где $\nu = \Delta f T$ — произведение полосы пропускания ЛТП на время наблюдений. Из данного выражения следует, что вероятность правильного

обнаружения растет с увеличением параметра ν и в пределе становится равной вероятности $D = \alpha^{1/(1+d_{ср}^2)}$ правильного обнаружения флуктуирующего сигнала в шумах известного уровня. Характеристики обнаружения сигнала с рэлеевскими замираниями даны на рис. 2.16.

Перейдем к задаче обнаружения сигнала с селективными замираниями, когда в канале передачи происходит рассеяние сигнала по времени и частоте [75, 79]. В таких каналах сигнал подвергается как время, так и частотно-селективным замираниям. Для представления сигнала с подобными замираниями воспользуемся дискретной моделью [75, 79, 80]

$$\dot{s}(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{M-1} h_{jk} \dot{s}_{ik}(t), \quad (2.71)$$

где $\dot{s}(t)$ — комплексная огибающая принятого сигнала; $\dot{s}_{jk}(t) = \dot{s}_0(t - j/\Delta f) \times \times \exp(-i2\pi kt/T)$ — комплексная огибающая сигнала в jk-й ветви разнесения; $\dot{s}_0(t)$ — комплексная огибающая переданного сигнала; Δf — ширина спектра; T — длительность переданного сигнала; NM — общее число ветвей разнесения в канале передачи; $h_{jk} = \mu_{jk} \times \times \exp(-i\varphi_{jk})$ — параметры, определяющие интенсивность μ_{jk} и фазу φ_{jk} замираний сигнала в jk-й ветви разнесения. Параметр $\mu_{jk} = \sqrt{E_{jk}}$, где E_{jk}—энергия сигнала в jk-й ветви разнесения.

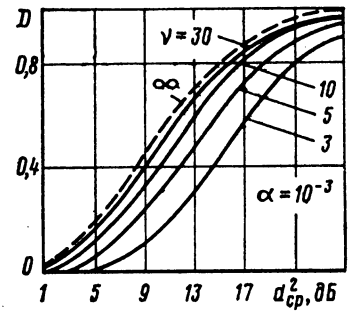


Рис. 2.16. Характеристики обнаружения сигнала с рэлеевскими замираниями в шумах неизвестной мощности

Параметры μ_{jk}, φ_{jk} считаем априорно неопределенными и принимающими соответственно произвольные значения из интервалов $(0; \infty)$ и $(-\pi; \pi)$]. Сигналы в различных ветвях разнесения полагаем ортогональными при любых начальных фазах. В качестве наблюдаемого процесса примем колебание на выходе ЛТП с прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой. Шум по-прежнему считаем гауссовским с постоянной спектральной плотностью в пределах полосы пропускания ЛТП.

При сделанных предположениях в задаче выделяются параметры

$$\pi = 1/(4N_0); \quad \gamma_{1jk} = \mu_{jk} \cos \varphi_{jk}/(2N_0); \quad \gamma_{2jk} = \mu_{jk} \sin \varphi_{jk}/(2N_0),$$

$$j = \overline{0, N-1}; \quad k = \overline{0; M-1}$$

и достаточные статистики

$$U_{1jk}(\dot{\mathbf{x}}) = \mathrm{Re} \int_0^T \dot{x}(t) \dot{s}_{jk}^*(t)\, dt; \quad U_{2jk}(\dot{\mathbf{x}}) = \mathrm{Im} \int_0^T \dot{x}(t) \dot{s}_{jk}^*(t)\, dt;$$

$$T(\dot{\mathbf{x}}) = \int_0^T |\dot{\mathbf{x}}(t)|^2 dt. \quad (2.72)$$

Задача обнаружения сигнала (2.71) формулируется через введенные параметры как задача проверки статистических гипотез

$$H_0: \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{M-1}(\gamma_{1jk}^2+\gamma_{2jk}^2)=0;\ \ 0<\pi<\infty;$$

$$H_1: 0<\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{M-1}(\gamma_{1jk}^2+\gamma_{2jk}^2)<\infty;\ \ 0<\pi<\infty.$$

Эта задача симметрична относительно группы масштабных преобразований наблюдаемого процесса и унитарных преобразований, собственные подпространства которых совпадают с подпространством сигналов $\dot{s}_{jk}(t)$. Поэтому воспользуемся принципом инвариантности. Так как масштабные преобразования отражают изменение уровней шума и сигнала, а унитарные — перераспределение энергии принятого сигнала между его компонентами по ветвям разнесения, то применение принципа инвариантности позволяет построить правило обнаружения, устойчивое как к замираниям сигнала, так и к изменению уровня шума. Решающая функция РНМ инвариантного правила

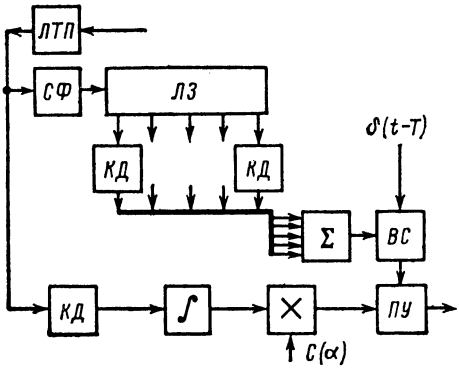


Рис. 2.17. Структурная схема обнаружителя сигнала с частотно-селективными замираниями

$$\varphi(\dot{\mathbf{x}})=\begin{cases}1 \text{ при } \sum\limits_{j=0}^{N-1}\sum\limits_{k=0}^{M-1}[U_{1jk}^2(\dot{\mathbf{x}})+U_{2jk}^2(\dot{\mathbf{x}})]\geqslant C(\alpha)\,T(\dot{\mathbf{x}});\\ 0 \text{ в остальных случаях.}\end{cases} \quad (2.73)$$

Характеристики обнаружения правила (2.73) полностью определяются суммарным отношением сигнал-шум $d_\Sigma^2=\sum\limits_{jk}E_{jk}/(2N_0)$ и параметром $\nu=\Delta fT$, равным произведению полосы пропускания ЛТП на время наблюдения. Они могут быть рассчитаны по таблицам нецентрального F-распределения с параметром нецентральности d_Σ^2 и степенями свободы $\nu_1=2r$, $\nu_2=2$ ($[\Delta fT]-r+1$), где r — общее число ветвей разнесения, $[\cdot]$ — целая часть числа [74]. Правило (2.73) обеспечивает постоянство вероятности ложной тревоги при любом изменении уровня шума. Вероятность правильного обнаружения максимальна при всех отношениях сигнал-шум d_Σ^2. Устойчивость правила к замираниям сигнала проявляется в том, что вероятность правильного обнаружения не зависит от перераспределения энергии сигнала по ветвям разнесения. Структурная схема обнаружителя в случае частотно-селективных замираний (сигнал рассеивается только во времени) дана на рис. 2.17.

Правило (2.73) допускает обобщение на случай многоальтернативного обнаружения сигналов. Решающая функция многоальтернативного правила

$$\varphi(\dot{\mathbf{x}}) = \begin{cases} (\varphi_1(\dot{\mathbf{x}}) = 0, \ldots, \varphi_m(\dot{\mathbf{x}}) = 0) \text{ при } \max\limits_n V_n(\dot{\mathbf{x}}) \leqslant C(\alpha)\, T(\dot{\mathbf{x}}); \\ (0, \ldots, \varphi_i(\dot{\mathbf{x}}) = 1; 0; \ldots; 0) \text{ при } \max\limits_n V_n(\dot{\mathbf{x}}) = V_i(\dot{\mathbf{x}}) > C(\alpha)\, T(\dot{\mathbf{x}}), \\ i = \overline{1, m}, \end{cases}$$

$$\text{где } V_n(\dot{\mathbf{x}}) = \sum_{j,\,k} \{[U_{1jk}^{(n)}(\dot{\mathbf{x}})]^2 + [U_{2jk}^{(n)}(\dot{\mathbf{x}})]^2\};$$

$$U_{1jk}^{(n)}(\dot{\mathbf{x}}) = \operatorname{Re} \int_0^T \dot{x}(t)\, \dot{s}_{njk}^*(t)\, dt; \quad U_{2jk}^{(n)}(\dot{\mathbf{x}}) = \operatorname{Im} \int_0^T \dot{x}(t)\, \dot{s}_{njk}^*(t)\, dt;$$

$$T(\dot{\mathbf{x}}) = \int_0^T |\dot{x}(t)|^2\, dt; \quad \dot{s}_{njk}(t) = \dot{s}_0^{(n)}[t - j/\Delta f] \exp(-i2\pi kt/T);$$

$s_0^{(n)}(t)$ — комплексная огибающая n-го переданного сигнала, $n = \overline{1, m}$. Данное правило получено в предположении равенства энергий и ортогональности передаваемых сигналов при произвольных начальных фазах. Оно дополнительно к перечисленным выше свойствам обеспечивает равные вероятности правильного обнаружения каждого сигнала из передаваемой совокупности.

2.4.4. Обнаружение сигналов при разнесенном приеме

Для борьбы с общими замираниями сигнала используется разнесенный прием, при котором переданный сигнал поступает на обнаружитель от ряда независимых каналов приема. Каналы выбираются так, чтобы замирания сигналов в них были статистически независимыми. Рассмотрим задачу обнаружения сигнала при разнесенном многоканальном приеме, полагая, что сигналы в каналах приема подвержены общим независимым замираниям по закону Рэлея и шумы в каналах являются независимыми гауссовскими процессами с постоянной спектральной плотностью в пределах полосы пропускания ЛТП. Амплитудно-частотную характеристику ЛТП по-прежнему считаем прямоугольной с полосой пропускания Δf. При данных предпосылках наблюдаемый процесс $x_i(t)$, $i = \overline{1, N}$, в каждом из N каналов приема характеризуется достаточными статистиками

$$T_i(\dot{\mathbf{x}}_i) = \int_0^T |\dot{x}_i(t)|^2\, dt; \quad V_i(\dot{\mathbf{x}}_i) = \left| \int_0^T \dot{x}_i(t)\, \dot{s}_i^*(t)\, dt \right|^2, \quad (2.74)$$

где $\dot{x}_i(t)$ — комплексная огибающая процесса $x_i(t)$; $\dot{s}_i(t)$ — комплексная огибающая сигнала в i-м канале. Эти статистики имеют плотность

вероятности

$$W(\mathbf{V};\mathbf{T}|\,\boldsymbol{\gamma};\boldsymbol{\pi}) = k\prod_{i=1}^{N}\frac{\pi_i^{\nu+1}}{1+\gamma_i}\,h(\mathbf{V}_i;\,T_i)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{N}\exp\left(-\pi_i T_i+\frac{\gamma_i\pi_i V_i}{1+\gamma_i}\right),\ \mathbf{V}=(V_1,\ldots,V_N);$$

$$\mathbf{T}=(T_1,\ldots,T_N);\ \boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n);\ \boldsymbol{\pi}=(\pi_1,\ldots,\pi_N),$$

где γ_i -- среднее отношение сигнал-шум в i-м канале; $\pi_i = 1/(4\,N_{0i})$; N_{0i} — спектральная плотность шума в i-м канале; k — нормирующий множитель; $\nu = [\Delta f T]$ — целая часть произведения полосы пропускания ЛТП на время наблюдения; функция $h(V_i;\,T_i)$ при любом $\delta > 0$ удовлетворяет равенству $h(\delta V_i;\,\delta T_i) = \delta^{\nu-1}\,h(V_i;\,T_i)$. Параметры γ_i и

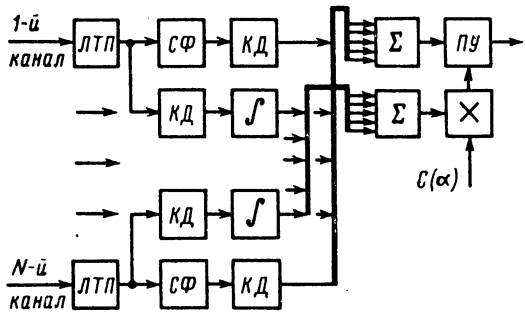


Рис. 2.18. Структурная схема обнаружителя сигналов с замираниями при разнесенном приеме

π_i полагаются априорно неопределенными и не зависящими от $i = \overline{1,\,N}$, если каналы приема идентичны по коэффициенту передачи и уровню шума, и различными при разных i в случае неидентичности каналов.

При идентичных каналах согласно (2.74) выделяются достаточные статистики $T = \sum_{i=1}^{N} T_i$; $V = \sum_{i=1}^{N} V_i$. Семейство распределений этих статистик симметрично относительно группы $\mathbf{G} = \{g\colon T \to \delta T;\ V \to \delta V;\ \delta \in (0;\,\infty)\}$ масштабных преобразований, которая представляет дружные изменения коэффициентов передачи каналов и уровней шумов в них. Поэтому применим принцип инвариантности, который приводит к построению РНМ инвариантного правила с решающей функцией

$$\varphi(V;\,T) = \begin{cases} 1 & \text{при } V \geqslant C(\alpha)\,T; \\ 0 & \text{при } V < C(\alpha)\,T. \end{cases} \qquad (2.75)$$

Структурная схема обнаружителя, реализующего правило (2.75), приведена на рис. 2.18. Характеристики обнаружения приведены на

рис. 2.19. Эти характеристики рассчитываются по таблицам центрального F-распределения [74].

На рис. 2.20 показана зависимость порогового отношения сигнал-шум $d_{\text{п}}^2$ от числа каналов приема (имеется в виду отношение сигнал-шум в отдельном канале). Правило (2.75) обеспечивает стабильную вероятность ложной тревоги при дружных изменениях уровней шумов в каналах приема и максимальную вероятность правильного обнаружения при любых, но равных отношениях сигнал-шум в этих каналах.

При неидентичных каналах приема семейство с плотностями вероятностей (2.74) симметрично относительно группы $\mathbf{G} = \{g: T_i \to \delta_i T_i;$

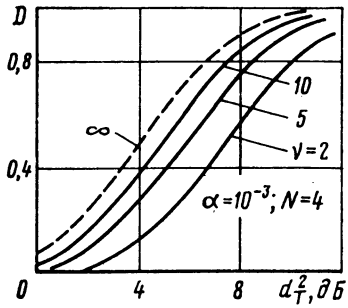


Рис. 2.19. Характеристики обнаружения сигналов с замираниями при разнесенном приеме

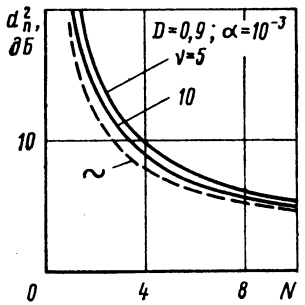


Рис. 2.20. Зависимость порогового отношения сигнал-шум от числа каналов приема

$V_i \to \delta_i V_i$; $\delta_i \in (0; \infty)$; $i = \overline{1,N}\}$, которая отражает независимые изменения коэффициентов передачи каналов приема и уровней шумов в них. Относительно этой группы МИ является статистика $\mathbf{Z} = (Z_1,.., Z_N)$, где $Z_i = V_i/T_i$. Распределение МИ не зависит от параметров π_i, $i = \overline{1, N}$, и имеет плотность вероятности

$$W(\mathbf{Z} \mid \boldsymbol{\gamma}) = k \prod_{i=1}^{N} \frac{\Gamma(\nu+1)}{1+\gamma_i} h(Z_i; 1) \Big/ \left(1 - \frac{\gamma_i}{1+\gamma_i} Z_i\right)^{\nu+1}, \qquad (2.76)$$

где $0 \leqslant Z_i \leqslant 1$ при всех $i = \overline{1, N}$. Семейство распределений с плотностью вероятности (2.76) не обладает монотонным отношением правдоподобия. Поэтому при неидентичных каналах приема не существует РНМ инвариантного правила, имеющего максимальную вероятность правильного обнаружения при любых отношениях сигнал-шум γ_i. Однако могут быть построены правила, которые максимизируют эту вероятность соответственно при малых ($\gamma_i \ll 1$) и больших ($\gamma_i \gg 1$) отношениях сигнал-шум в каналах приема. Эти правила имеют решающую функцию

$$\varphi(\mathbf{Z}) = \begin{cases} 1 \text{ при } U(\mathbf{Z}) \geqslant C(\alpha); \\ 0 \text{ при } U(\mathbf{Z}) < C(\alpha), \end{cases} \qquad (2.77)$$

где $U(\mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^{N} Z_i$ для малых отношений сигнал-шум и $U(\mathbf{Z}) = -\sum_{i=1}^{N} \ln(1 - Z_i)$ для больших отношений сигнал-шум. Правила (2.77) наряду с отмеченными свойствами оптимальности обеспечивают также стабильную вероятность ложной тревоги при любых и независимых изменениях уровней шумов в каналах приема.

Правила (2.75) и (2.77) допускают обобщение на многоальтернативный случай. В частности, при идентичных каналах приема решающая функция многоальтернативного правила

$$\varphi(\mathbf{V}; T) = \begin{cases} (\varphi_1(\mathbf{V}; T) = 0, \ldots, \varphi_m(\mathbf{V}; T) = 0) \text{ при } \max\limits_k V_k \leqslant C(\alpha)\, T; \\ (0, \ldots, \varphi_i(\mathbf{V}; T) = 1, 0, \ldots, 0) \text{ при } \max\limits_k V_k = V_i > C(\alpha)\, T; \\ \mathbf{V} = (V_1, \ldots, V_m), \quad i = \overline{1, m}, \end{cases}$$

где $V_k = \sum_{n=1}^{N} V_n^{(k)}$; $V_n^{(k)}$ — квадрат огибающей процесса на выходе фильтра, согласованного с сигналом $s_k(t)$ и входящего в n-й канал приема.

2.4.5. Обнаружение сигналов в шумах с неизвестным распределением

В задачах обнаружения встречаются случаи, когда отсутствуют сведения о функциональном виде распределения шумов. Иногда неизвестен также характер взаимодействия сигнала и шума. В таких случаях полезны непараметрические методы обнаружения. Ниже на основе принципа инвариантности получены непараметрические правила контрастного обнаружения сигнала. Обнаружение производится по двум классифицированным выборкам независимых наблюдений, одна из которых (шумовая) содержит только шум, а вторая (сигнальная) — либо шум, либо смесь сигнала и шума. Распределение шума полагается произвольным по форме, но имеющим плотность вероятности. Считается, что присутствие сигнала приводит к стохастическому возрастанию сигнальной выборки по сравнению с шумовой.

Обозначим через $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ шумовую и через $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ сигнальную выборку. Наблюдения x_i шумовой выборки полагаем независимыми между собой и имеющими одинаковое распределение $F_{\text{ш}}$. Наблюдения y_i сигнальной выборки также принимаем независимыми с одинаковым распределением $F_{\text{сш}}$. Задача обнаружения сигнала при сделанных предположениях формулируется как задача проверки непараметрических гипотез

$$\begin{aligned} &H_0 : F_{\text{сш}} = F_{\text{ш}} \quad (\text{«сигнала нет»}); \\ &H_1 : F_{\text{сш}} > F_{\text{ш}} \quad (\text{«сигнал есть»}). \end{aligned} \tag{2.78}$$

Здесь неравенством $F_{\text{сш}} > F_{\text{ш}}$ отражается тот факт, что значения функции распределения $F_{\text{сш}}$ превышают соответствующие значения функции распределения $F_{\text{ш}}$, т. е. отражается стохастическое превышение сигнальной выборки над шумовой. Выделим два варианта этой задачи: 1) сигнальная выборка состоит из единственного наблюдения y; 2) шумовая выборка состоит из единственного наблюдения x. Вторые выборки в этих задачах могут состоять из произвольного конечного числа наблюдений.

Для построения правила обнаружения воспользуемся принципом инвариантности, так как задача (2.78) симметрична относительно группы $G = \{g : x_i \to f(x_i);\ y_i \to f(y_i)\}$, где $f(\cdot)$ — произвольная неубывающая функция. Данная группа отражает неопределенность функций распределений $F_{ш}$ и $F_{сш}$ и не нарушает стохастического превышения сигнальной выборки над шумовой. Для этой группы МИ является ранговая статистика $(R_1, \ldots, R_m; R)$, составленная из рангов наблюдений совместной выборки $(x_1, \ldots, x_m; y)$ в первом варианте задачи, и ранговая статистика $(R, R_1, \ldots, R_n)$, составленная из рангов наблюдений совместной выборки $(x, y_1, \ldots, y_n)$ во втором варианте задачи. Из соображений достаточности можно ограничиться только рангом R наблюдения y в первом варианте и рангом R наблюдения x во втором варианте. Семейство распределений ранга R имеет монотонное отношение правдоподобия. Поэтому существуют РНМ инвариантные правила обнаружения в указанных задачах с решающей функцией

$$\varphi(R) = \begin{cases} 1 & \text{при } U(R) > C(\alpha); \\ p & \text{при } U(R) = C(\alpha); \\ 0 & \text{при } U(R) < C(\alpha), \end{cases} \qquad (2.79)$$

где $U(R) = R$ для первого варианта и $U(R) = (n+1)(n+2)/2 - R$ для второго варианта задачи. Правила (2.79) рандомизированы $(0 \leqslant p \leqslant 1)$, так как при целочисленных значениях ранга R произвольный уровень p_0 вероятности ложной тревоги нельзя получить без рандомизации процедуры принятия решения.

Правила (2.79) обеспечивают стабильную вероятность ложной тревоги при любом распределении $F_{ш}$ шума и максимальную вероятность правильного обнаружения, если присутствие сигнала вызывает стохастическое возрастание сигнальной выборки. Правило (2.79) при многократных сигнальных наблюдениях можно рекомендовать для некогерентного обнаружения нефлуктуирующей пачки импульсов в шумах с неизвестным распределением. В этом случае сигнальная выборка $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ формируется из отсчетов огибающей наблюдаемого процесса, взятых в каждом периоде следования импульсов пачки. В качестве шумового наблюдения x можно взять, например, отсчет огибающей этого колебания в момент времени, предшествующий появлению пачки импульсов.

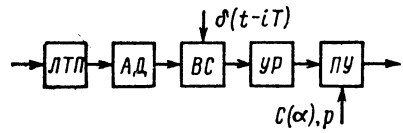


Рис. 2.21. Структурная схема рангового обнаружителя пачки импульсов в шумах с неизвестным распределением

Структурная схема обнаружителя, реализующего данное правило, приведена на рис. 2.21. На этом рисунке АД — амплитудный детектор; УР — устройство ранжирования и формирования статистики $U(R)$; T — период следования импульсов. Правило (2.79) при однократном сигнальном наблюдении целесообразно использовать как правило квантования наблюдений на два уровня при бинарном накоплении пачки импульсов. В этом случае наблюдение y формируется как отсчет колебания на выходе амплитудного детектора в конце каждого импульса пачки, а шумовые наблюдения y_i образуются из отсчетов шума вблизи сигнального отсчета. В результате применения такого правила квантования формируются бинарные случайные величины с устойчивым распределением, не зависящим от распределения шума. Благодаря этому создаются необходимые предпосылки для стабилизации вероятности ложной тревоги на этапе накопления бинарно-квантованных величин.

Бинарное накопление квантованных величин может быть получено на основе принципа инвариантности как правило обнаружения пачки импульсов на втором этапе, если под первым этапом понимать бинарное квантование наблюдений. В результате бинарного квантования образуется последовательность $\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_n)$ случайных величин Z_j, принимающих значение 1 с вероятностя-

ми p_j и значение 0 с вероятностями 1 — p_j. В отсутствие сигнала все вероятности $p_j = \alpha$, где α — стабильное значение вероятности ложной тревоги правила (2.79). При наличии сигнала вероятности $p_j > \alpha$, так как стохастическое возрастание сигнального отсчета y увеличивает вероятность формирования единицы на этапе квантования. Таким образом, задача обнаружения на втором этапе равносильна задаче проверки статистических гипотез

$$H_0 : p_j = \alpha; \quad j = \overline{1, n}; \quad H_1 : p_j > \alpha; \quad j = \overline{1, n}. \tag{2.80}$$

Вероятности p_j при наличии сигнала неизвестны и в общем случае различны, так как импульсы в пачке могут иметь произвольные замирания. Поэтому необходимо правило обнаружения, устойчивое к изменению вероятностей p_j.

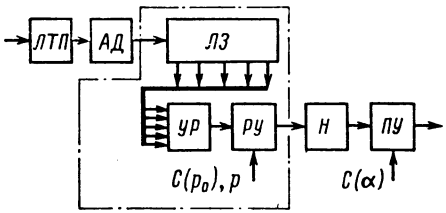


Рис. 2.22. Структурная схема обнаружителя с бинарным накоплением импульсов при неизвестном распределении шума

При независимости квантованных величин Z_j задача проверки гипотез (2.80) симметрична относительно группы перестановок величин $Z_j, j = \overline{1, n}$ (индуцированная группа также состоит из перестановок величин p_j, $j = \overline{1, n}$). Непосредственной проверкой убеждаемся, что МИ этой группы является статистика $U(\mathbf{Z}) = \sum_{j=1}^{n} Z_j$. Семейство распределений статистики $U(\mathbf{Z})$ обладает монотонным относительно $U(\mathbf{Z})$ отношением правдоподобия [87]. Поэтому существует РНМ инвариантное правило. Его решающая функция

$$\varphi(\mathbf{Z}) = \begin{cases} 1 & \text{при } U(\mathbf{Z}) > C(\alpha); \\ p & \text{при } U(\mathbf{Z}) = C(\alpha); \\ 0 & \text{при } U(\mathbf{Z}) < C(\alpha), \end{cases} \tag{2.81}$$

где α — заданный уровень вероятности ложной тревоги на этапе накопления; p — параметр рандомизации.

Объединяя правила (2.79) и (2.81), получаем правило обнаружения пачки импульсов при бинарном квантовании наблюдений. Это правило обеспечивает стабильный уровень вероятности ложной тревоги при любом распределении шума благодаря стабилизации вероятности формирования единицы на этапе квантования в отсутствие сигнала и высокую вероятность правильного обнаружения, так как на каждом этапе используются РНМ правила. При этом вероятность правильного обнаружения инвариантна к таким замираниям импульсов пачки, которые приводят к перестановке вероятностей p_j квантованных наблюдений. Структурная схема обнаружителя дана на рис. 2.22. На этом рисунке АД — амплитудный детектор; УР — устройство ранжирования, формирующее ранг R сигнального наблюдения; РУ — решающее устройство, функционирующее по правилу (2.79). Штрихпунктирной линией выделен блок бинарного квантования.

Расчет эффективности данного обнаружителя показывает его ввысокую устойчивость к распределению шума. Потери в пороговом отношении сигнал-шум обнаружителя по сравнению с бинарным накоплением в шумах с известными характеристиками быстро убывают с увеличением размерности шумовой выборки и числа накапливаемых импульсов. При числе накапливаемых импульсов больше 20—30 эти потери не превосходят 2 дБ практически для всех часто встречающихся распределений на выходе амплитудного детектора (см. рис. 2.7).

Глава 3
МИНИМАКСНЫЕ ПРАВИЛА ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ

3.1. Минимаксные критерии оптимизации обнаружения сигналов на фоне шумов с неизвестными параметрами

3.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим вначале задачу двоичного обнаружения сигнала на фоне шума с неизвестными параметрами, т. е. задачу решения о присутствии или отсутствии сигнала по входной информации в виде дискретной действительной или комплексной случайной выборки $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ конечного объема n из входных колебаний. Предполагается, что сигнал может входить в $\mathbf{x}$ как аддитивно, так и не аддитивно с шумом, распределение вероятности которого зависит от неизвестных параметров.

Пусть семейство условных распределений вероятности выборки $\mathbf{x}$ при различных значениях неизвестных параметров задачи есть $F(\mathbf{x}|\boldsymbol{\vartheta})$, $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $\boldsymbol{\vartheta} \in \Theta$, где $\mathbf{X}$ — выборочное евклидово n- или $2n$-мерное пространство, а Θ — пространство всех возможных значений $\boldsymbol{\vartheta}$. Рассматриваемая задача обнаружения сигнала может быть сформулирована как задача проверки сложной статистической гипотезы $H_0 : \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta_0 \subset \Theta$ при сложной альтернативе $H_1 : \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta_1 \subset \Theta$.

Оптимизация обнаружения сигнала на фоне шумов с неизвестными параметрами заключается в построении решающего правила φ, удовлетворяющего некоторому критерию оптимальности. Решающим правилом будем, как обычно [87, 106], считать функцию на $\mathbf{X}$ со значениями в пространстве решений $\mathcal{D}$, состоящем в рассматриваемом случае из двух решений d_0 и d_1, соответствующих отсутствию и присутствию сигнала. В соответствии с общей теорией статистических решений [106] можно ввести в рассмотрение рандомизированное решающее правило $\psi = \psi(\mathbf{x})$, определяющее зависящее от $\mathbf{x}$ распределение вероятности на $\mathcal{D}$. В этом случае решающее правило принимает решение d с помощью подходящего случайного механизма с вероятностью $\psi(d \mid \mathbf{x})$. В нашем случае положим $\psi(d_1|\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})$, $\psi(d_0|\mathbf{x}) = 1 - \psi(\mathbf{x})$. В соответствии с теорией проверки сложных гипотез функция $\psi(\mathbf{x})$, $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, есть критическая функция или рандомизированный тест (критерий) для проверки $H_0 : \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta_0$ против $H_1 : \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta_1$.

Пусть $W(\mathbf{x}|\boldsymbol{\vartheta})$ — плотность распределения вероятности $\mathbf{x}$ (относительно меры Лебега) на $\mathbf{X}$. Обозначим $W(\mathbf{x}|\boldsymbol{\vartheta})$ при $\boldsymbol{\vartheta} \in \Theta_0$ через $W_0(\mathbf{x}|\boldsymbol{\lambda})$, а при $\boldsymbol{\vartheta} \in \Theta_1$ — через $W_1(\mathbf{x}|\boldsymbol{\vartheta})$, где $\boldsymbol{\lambda}$ — неизвестные параметры шума.

Неизвестные параметры $\boldsymbol{\vartheta}$ задачи обнаружения обычно бывает удобно представить в виде двух совокупностей параметров — полезных $\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma$ и мешающих $\boldsymbol{\pi} \in \Pi$, т. е. $\boldsymbol{\vartheta} = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\pi}) \in \Theta = \Gamma \times \Pi$. Полезными называются параметры, значения которых определяют принадлежность к альтернативным областям. Например, если $\boldsymbol{\gamma}$ есть скалярный полезный параметр, имеющий смысл отношения средних энергий сигнала и шума в $\mathbf{x}$, то области гипотезы и альтернативы Θ_0 и Θ_1 могут опре-

деляться в виде H_0: $\gamma = 0$ и H_1: $\gamma \geqslant \gamma_0$, где γ_0 — некоторое отношение сигнал-шум *. В этом случае $W_1(\mathbf{x}|\vartheta) = W_1(\mathbf{x}|\gamma, \pi)$. Все параметры λ шума, входящие в $W_0(\mathbf{x}|\lambda)$, являются мешающими.

Если сигнал и шум входят в $\mathbf{x}$ аддитивно, что мы будем далее предполагать, $\vartheta = (\mathbf{s}, \lambda)$ является совокупностью неизвестных параметров сигнала $\mathbf{s} \in S$ и шума $\lambda \in \Lambda$. В этом случае $W_1(\mathbf{x}|\vartheta) = W_1(\mathbf{x}|\,\mathbf{s}, \lambda)$ и как полезный $\gamma = \gamma(\vartheta) = \gamma(\mathbf{s}, \lambda)$ так и мешающие $\pi = \pi(\vartheta) = \pi(\mathbf{s}, \lambda)$ параметры являются функциями от параметров сигнала и шума.

При наличии неизвестных параметров ϑ основными характеристиками качества любого решающего правила ψ двоичного обнаружения сигнала являются зависимости условной вероятности правильного обнаружения от ϑ (функция мощности соответствующего теста), т. е. $\beta(\vartheta) = \beta(\vartheta, \psi) = M[\psi(\mathbf{x})]$ для $\vartheta \in \Theta$, и ложной тревоги от λ, т. е. $\alpha(\lambda) = \alpha(\lambda, \psi) = \beta(\vartheta, \psi)$, $\lambda \in \Lambda$, $\vartheta \in \Theta_0$, рассматриваемые во всей области определения полезных Γ и мешающих Π параметров.

Для оптимизации обнаружения в рассматриваемых условиях в первую очередь целесообразно потребовать, чтобы условная вероятность ложной тревоги $\alpha(\lambda)$ не зависела от конкретных значений неизвестных параметров помехи λ либо была ограничена сверху наперед заданным значением:

$$\alpha(\lambda) = \alpha_0 \text{ при всех } \lambda \in \Lambda, \tag{3.1}$$

или

$$\alpha(\lambda) \leqslant \alpha_0 \text{ при всех } \lambda \in \Lambda. \tag{3.2}$$

Решающие правила, удовлетворяющие (3.1), носят название подобных или, более полно, подобных выборочному пространству, так как ситуация с $\alpha(\lambda) = 1$ характерна для области принятия решения, совпадающей со всем выборочным пространством [87, 88]. С практической точки зрения наибольший интерес могли бы представить попытки отыскания равномерно наиболее мощного решающего правила ψ^*, которое при удовлетворении условию (3.1) или (3.2) обеспечило бы наибольшую возможную вероятность правильного обнаружения при любых значениях неизвестных параметров, т. е. удовлетворяло бы условию

$$\beta(\vartheta, \psi^*) \geqslant \beta(\vartheta, \psi) \text{ при всех } \vartheta \in \Theta_1 \text{ и } \psi \in \Psi \tag{3.3}$$

где Ψ — множество решающих правил, удовлетворяющих (3.1) или (3.2). К сожалению, решающие правила с таким свойством не всегда существуют.

Любой критерий оптимальности обнаружения, приводящий к единственному решению, может быть связан, помимо принятых ограничений на множество рассматриваемых правил, с выбором способа упорядочения множества всех решающих правил ψ, удовлетворяющих этим ограничениям, т. е. заданием функционала качества $Q(\psi)$, с помощью которого для любой пары решающих правил ψ_1 и ψ_2 можно устанавливать отношения предпочтения вида $Q(\psi_1) \geqslant Q(\psi_2)$. При этом оптимизация сводится к отысканию решающего правила $\psi^* \in \Psi$, такого, что

*Отметим, что возможен подход, когда полезным считается параметр, множество значений которого изоморфно множеству решений.

для всех $\psi \in \Psi$ имеем $Q(\psi^*) \geqslant Q(\psi)$. Последнее неравенство по существу определяет критерий оптимальности. Оптимальное решающее правило будет существенно единственным, если $Q(\psi^*) > Q(\psi)$ для всех $\psi \in \Psi$, не равных ψ^*, за исключением, быть может, правил с критическими функциями, отличающимися от критической функции $\psi^*(\mathbf{x})$ оптимального правила лишь на подмножествах нулевой меры для всех $\vartheta \in \Theta$. Отметим, что в рассматриваемых в этой главе конкретных задачах минимаксные правила являются единственными.

3.1.2. Минимаксные критерии двоичного обнаружения сигнала

В качестве критерия оптимизации двоичного обнаружения в рассматриваемых условиях представляется целесообразным следующий максиминный критерий относительно вероятности правильного обнаружения с ограничением на уровень вероятности ложной тревоги:

$$\beta^* = \inf_{\vartheta \in \Theta_1} \beta(\vartheta, \psi^*) \geqslant \inf_{\vartheta \in \Theta_1} \beta(\vartheta, \psi) \text{ при } \psi^* \in \Psi \text{ и всех } \psi \in \Psi, \quad (3.4)$$

где Ψ — множество решающих правил ψ, удовлетворяющих условиям, эквивалентным условиям (3.1) и (3.2);

$$\beta(\vartheta, \psi) = \alpha_0 \text{ при всех } \vartheta \in \Theta_0, \quad (3.5)$$

или

$$\beta(\vartheta, \psi) \leqslant \alpha_0 \text{ при всех } \vartheta \in \Theta_0. \quad (3.6)$$

Здесь β^* называется максиминной вероятностью правильного обнаружения.

Для того чтобы максиминный критерий (3.4) был практически эффективен, необходимо, чтобы альтернативная область Θ_1 находилась на некотором «расстоянии» от области гипотезы Θ_0 и не имела с ней общих точек. В противном случае $\inf_{\vartheta \in \Theta_1} \beta(\vartheta, \psi) \leqslant \alpha_0$, для любого решающего правила $\psi \in \Psi$. Таким образом, ограничения на Θ_1, так же как и на α, являются существенными дополнениями, без которых приведенный выше максиминный критерий для решения задач обнаружения сигнала в условиях неопределенности лишается практической эффективности.

Следует отметить, что для задач обнаружения сигналов указанное ограничение на Θ_1 обычно соответствует желанию оптимизировать характеристики обнаружения в области их удовлетворительных и хороших значений.

Приведенный критерий хорошо известен в математической статистике [87] и рекомендован для применения к широкому классу задач обнаружения сигналов на фоне помех с неизвестными параметрами [82, 119, 129]. Как видно из предыдущего, максиминное решающее правило по критерию (3.4) обеспечивает максимум гарантированной вероятности правильного обнаружения в области Θ_1 неизвестных параметров при соответствующем ограничении вероятности ложных тревог.

Каждому максиминному критерию типа (3.4) относительно вероятности правильного обнаружения, очевидно, соответствует эквивалентный ему минимаксный критерий относительно вероятности про-

пуска сигнала $1 - \beta(\vartheta, \psi)$. Поэтому оба конкретных варианта этих критериев в дальнейшем могут обобщенно называться минимаксными критериями.

Выбор области Θ_1 должен производиться на основании практических соображений, подсказываемых условиями конкретной задачи, что для многих задач удается сделать довольно естественным образом. При этом должны учитываться требуемое качество обнаружения, сравнительная важность эффективного обнаружения в различных условиях, сохранение симметрии (инвариантности) задачи относительно преобразований координат, облегчающей ее решение и упрощающей сами решающие правила. Наиболее характерным примером такого выбора является ограничение снизу отношения сигнал-шум, выраженного в подходящих характеристиках интенсивности.

Достаточно общим методом выбора Θ_1 является выбор его в виде

$$\Theta_1 = \{\vartheta : \beta_{\text{ог}}(\vartheta) \geqslant \beta_0\}, \tag{3.7}$$

где

$$\beta_{\text{ог}}(\vartheta) = \sup_{\psi \in \Psi_\lambda} \beta(\vartheta, \psi), \quad \lambda = \lambda(\vartheta). \tag{3.8}$$

Здесь $\beta_{\text{ог}}(\vartheta)$ — модифицированная огибающая вероятности правильного обнаружения, равная для каждого ϑ вероятности правильного обнаружения наиболее мощным решающим правилом Неймана-Пирсона уровня α; $\lambda(\vartheta)$ — значение совокупности неизвестных параметров помех при данном ϑ и Ψ_λ — множество решающих правил с $\alpha(\lambda, \psi) \leqslant \alpha_0$ при данном λ.

При таком выборе Θ_1 в значительной степени компенсируется недостаток минимаксного критерия — выделять наиболее неблагоприятные значения неизвестных параметров и не всегда реализовывать возможности повышения эффективности обнаружения в остальных не столь неблагоприятных условиях.

Действительно, $\beta_{\text{ог}}(\vartheta)$ может рассматриваться как потенциальный предел для $\beta(\vartheta)$ — минимаксного решающего правила, который, как правило, асимптотически достижим при возрастающем объеме входной выборки. При этом возможности эффективного обнаружения для всех ϑ, принадлежащих границе области Θ_1, определяемой уравнением $\beta_{\text{ог}}(\vartheta) = \beta_0$, по крайней мере, асимптотически выравниваются и практически реализуются. Указанный положительный эффект выбора Θ_1 в виде (3.7) в значительной степени сохраняется и при конечных, в том числе малых, выборках. А в тех случаях, когда минимаксное решающее правило с ограничениями (3.1) или (3.2) оказывается подобным, оно является и минимаксным подобным решающим правилом, т. е. удовлетворяющим ограничению (3.1).

Таким образом, разумный выбор Θ_1 уже сам по себе позволяет существенно ослабить обычно указываемый недостаток минимаксного подхода — его чрезмерную «осторожность» [2, 31, 109].

Другие варианты минимаксных критериев, в принципе позволяющие еще более ослабить эту особенность минимаксных правил, рассматриваются ниже.

Следует отметить, что в тех задачах обнаружения, для которых существует равномерно наиболее мощное решающее правило, минимаксное решающее правило автоматически оказывается равномерно наиболее мощным.

Идея применения огибающей функции мощности теста для выбора Θ_1 в случае, когда в качестве $\beta_{\text{ог}}(\hat{\theta})$ используется огибающая $\beta^*_\alpha(\hat{\theta}) = \sup_{\psi \in \Psi} \beta(\hat{\theta}, \psi)$, на множестве всех тестов уровня α проверки сложной гипотезы H_0 изложена в [87]. Следует отметить, что, хотя $\beta^*_\alpha(\hat{\theta})$ может лучше аппроксимировать потенциальные возможности минимаксного правила для исходной задачи, задача определения функций мощности соответствующих тестов для практического задания Θ_1 может оказаться намного сложнее аналогичной задачи в случае простой гипотезы при простой альтернативе с фиксированными в соответствии с (3.8) параметрами шума.

Приведенный выше минимаксный критерий оптимизации, который является обобщением критерия Неймана—Пирсона на случай априори неизвестных параметров сигнала и помехи, может быть сформулирован и в терминах условного среднего риска $R(\hat{\theta}, \psi)$ в рамках общей теории статистических решений [106] при прежних ограничениях на множество возможных решающих правил.

Пусть минимаксное решающее правило ψ^* удовлетворяет условию $\psi^* \in \Psi$ и

$$\sup_{\hat{\theta} \in \Theta} R(\hat{\theta}, \psi^*) \leqslant \sup_{\hat{\theta} \in \Theta} R(\hat{\theta}, \psi) \text{ при всех } \psi \in \Psi, \tag{3.9}$$

где

$$R(\hat{\theta}, \psi) = \begin{cases} r(\hat{\theta})[1 - \beta(\hat{\theta}, \psi)] \text{ при } \hat{\theta} \in \Theta_1; \\ 0 \text{ при } \hat{\theta} \in \Theta \setminus \Theta_1; \end{cases} \tag{3.10}$$

$r(\hat{\theta})$ — функция потерь, связанная с пропуском сигнала при данном $\hat{\theta}$.

Заметим, что вследствие наличия общего ограничения на вероятность ложной тревоги (3.5) или (3.6) потери, связанные с ложной тревогой, не учитываются.

При $r(\hat{\theta}) = \text{const}$ для $\hat{\theta} \in \Theta_1$ минимаксный критерий (3.9) эквивалентен максминному критерию (3.4). Более общий случай $r(\hat{\theta}) \neq \text{const}$ позволяет придать различный вес ошибкам, т. е. пропускам сигнала при различных $\hat{\theta} \in \Theta_1$.

3.1.3. Критерий минимума порогового отношения сигнал-шум

Иногда оптимизация обнаружения для конкретной области Θ_1, выбираемой заранее, оказывается нецелесообразной. В таких случаях множество Θ_1 может не фиксироваться, а оптимизация — основываться на отыскании такого решающего правила $\psi^* \in \Psi$, при котором заданная вероятность правильного обнаружения β_0 гарантируется в области Θ_1 (т. е. $\beta(\hat{\theta}, \psi^*) \geqslant \beta_0$, $\hat{\theta} \in \Theta_1$), находящейся в определенном смысле на минимальном расстоянии от области гипотезы Θ_0.

При этом может быть задана некоторая система «вложенных» друг в друга областей $\Theta_1 = \Theta_1(\rho_0)$ монотонно и взаимно-однозначно связанных с единственным скалярным параметром ρ_0, характеризующим расстояние от $\Theta_1(\rho_0)$ до Θ_0. В частности, система областей $\Theta_1(\rho_0)$ может быть задана неравенствами

$$\rho = \rho(\hat{\theta}) \geqslant \rho_0, \tag{3.11}$$

где $\rho(\vartheta)$ — расстояние от Θ_0 до любой точки ϑ пространства неизвестных параметров, задаваемое на основании конкретных условий обнаружения и таким образом, чтобы Θ_0 определялось условием $\rho(\vartheta) = 0$. Некоторые примеры $\rho(\vartheta)$ приведены в [119].

Полагая функционал качества решающего правила в виде

$$\rho_{0\,\min}(\psi) = \inf_{\rho_0 \in R(\psi)} \rho_0, \tag{3.12}$$

где $R(\psi) = \{\rho_0 : \beta(\vartheta, \psi) \geqslant \beta_0$ при всех $\vartheta \in \Theta_1(\rho_0)\}$, решающее правило будем считать оптимальным по критерию минимума расстояния области с гарантируемой вероятностью правильного обнаружения от области гипотезы, если

$$\rho_{0\,\min}(\psi^*) \leqslant \rho_{0\,\min}(\psi) \text{ при всех } \psi \text{ и } \psi^* \in \Psi. \tag{3.13}$$

Пусть для β_0 минимальное расстояние ρ_0, обеспечиваемое ψ^*, равно $\rho_{0\,min}$ и ему соответствует Θ_1^*; тогда ψ^* оптимально и по критерию (3.4) для $\Theta_1 = \Theta_1^*$, причем $\beta_0^* = \beta_0$. Вместе с тем необходимо подчеркнуть, что в общем случае рассматриваемые критерии оптимальности не эквивалентны. По существу общим для них является лишь то, что множеству критериев (3.4) для различных $\Theta_1(\rho_0)$ и множеству критериев (3.13) с различной β_0 соответствует одно и то же множество оптимальных решающих правил.

Во многих задачах обнаружения на фоне помех с неизвестными параметрами роль расстояния $\rho(\vartheta)$ может играть скалярный параметр задачи $\gamma = \gamma(\vartheta)$, имеющий смысл отношения мощностей сигнала и аддитивного шума. В этом случае ρ_0 соответствует γ_0 и критерий (3.13) в качестве $\rho_{0\min}(\psi)$ предусматривает минимум порогового отношения сигнал-шум $\gamma_{0\min}(\psi)$, гарантирующего заданное значение β_0 в области Θ_1 вида $\gamma(\vartheta) \geqslant \gamma_0$. Таким образом, согласно (3.11) ψ^* оптимально по критерию минимума порогового отношения сигнал-шум при

$$\gamma_{0\,\min}(\psi^*) \leqslant \gamma_{0\,\min}(\psi) \text{ при всех } \psi, \psi^* \in \Psi. \tag{3.14}$$

Пусть $\vartheta \in (\gamma, \pi)$, $\vartheta \in \Theta$, $\gamma \in \Gamma = [0, \infty)$, $\pi \in \Pi$. Тогда из (3.12) имеем $\gamma_{0\min}(\psi) = \inf_{\gamma_0 \in \Gamma_\psi} \gamma_0$, где

$$\Gamma_\psi = \{\gamma_0 : \beta(\gamma, \pi, \psi) \geqslant \beta_0 \text{ при всех } \pi \text{ и } \gamma \geqslant \gamma_0\}. \tag{3.15}$$

Для того чтобы исключить ситуации, в которых множество $\Gamma_\psi = 0$, т. е. является пустым, целесообразно множество рассматриваемых решающих правил ψ ограничить лишь такими правилами, для которых $\beta(\gamma, \pi, \psi)$ являются монотонно возрастающими по γ при любых π, причем $\gamma_{0\min}(\psi)$ конечны. При этих условиях критерий (3.14) может быть заменен эквивалентным ему критерием

$$\sup_{\pi} \gamma_0(\pi, \psi^*) \leqslant \sup_{\pi} \gamma_0(\pi, \psi) \text{ при всех } \psi^*, \psi \in \Psi, \tag{3.16}$$

где

$$\gamma_0(\pi, \psi) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{\pi,\psi}} \gamma, \quad \Gamma_{\pi,\psi} = \{\gamma : \beta(\gamma, \pi, \psi) \geqslant \beta_0\}. \tag{3.17}$$

Действительно, это следует из равенства

$$\gamma_{0\,\min}(\psi) = \inf_{\gamma_0 \in \Gamma_\psi} \gamma_0 = \sup_{\pi} \inf_{\gamma \in \Gamma_{\pi,\,\psi}} \gamma = \sup_{\pi} \gamma_0(\pi, \psi).$$

Критерий (3.16) имеет простой физический смысл и в явном виде показывает, каким образом в нем учитывается наличие в задаче априори неизвестных мешающих параметров. Как указывалось выше, этот критерий приводит к тому же оптимальному решающему правилу, что и критерий (3.4), если $\Theta_1 = \{\vartheta : \gamma \geqslant \gamma_0\}$ и $\beta_0 = \beta^* = \inf_{\pi} \beta(\gamma_0, \pi, \psi^*)$.

Здесь всюду inf и sup берутся по всем $\pi \in \Pi$.

3.1.4. Критерий локальной оптимальности

Приведенные выше критерии являются достаточно общими и, в частности, применимы при любом (в том числе малом) конечном объеме выборки и любом отношении сигнал-шум. В некоторых случаях полезно ограничиться рассмотрением только «близких» гипотез, например обнаружением относительно слабых сигналов при сравнительно большом объеме выборки. Оптимизация обнаружения сигналов в этих условиях часто упрощает оптимальные решающие правила и облегчает их синтез. Вместе с тем такие правила могут обладать приемлемыми характеристиками и при не слишком малых отношениях сигнал-шум и сравнительно небольших объемах выборки.

Предположим, что функция мощности $\beta(\vartheta, \psi) = \beta(\gamma, \pi, \psi)$ произвольного решающего правила $\psi = \psi(\mathbf{x})$ непрерывно дифференцируема по параметру $\gamma \in \Gamma$ и проверяется гипотеза $H_0 : \gamma = 0$. Тогда в качестве критерия локальной оптимальности для альтернатив типа $H_1 : \gamma > 0$ можно потребовать максимизации минимума по π первой частной производной β по γ в точке $\gamma = 0$. В этом случае решающее правило $\psi^* \in \Psi$ называется максимизирующим производную функции мощности, если для любого другого решающего правила $\psi \in \Psi$

$$\inf_{\pi \in \Pi} \frac{\partial}{\partial \gamma} \beta(\gamma, \pi, \psi^*)\,|_{\gamma=0} \geqslant \inf_{\pi \in \Pi} \frac{\partial}{\partial \gamma} \beta(\gamma, \pi, \psi). \tag{3.18}$$

Здесь Π — множество π, соответствующее Θ_1.

Приведенный критерий дает наиболее определенные гарантии в локальной области, если под $\underline{\Psi}$ подразумевать лишь $\underline{\Psi}_0$ — множество решающих правил с заданной фиксированной вероятностью ложной тревоги.

Если производные по γ в (3.18) в точке $\gamma = 0$ не существуют (равны бесконечности), то γ в (3.18) можно заменить на $\rho = \gamma^{1/r}$, где константа $r > 1$ выбирается такой наименьшей, что $0 < \frac{\partial}{\partial \rho} \beta(\rho^r, \pi, \psi)|_{\rho=0} < \infty$. Если же указанные производные по γ в точке $\gamma = 0$ равны нулю, критерий локальной оптимальности может предусматривать максимизацию минимума по π p-й производной функции мощности, т. е. ненулевой производной наименьшего порядка. Тогда вместо (3.18) можно потребовать

$$\inf_{\pi \in \Pi} \frac{\partial^{(p)}}{\partial \gamma^p} \beta(\gamma, \pi, \psi^*)\,|_{\gamma=0} \geqslant \inf_{\pi \in \Pi} \frac{\partial^{(p)}}{\partial \gamma^p} \beta(\gamma, \pi, \psi). \tag{3.19}$$

Другим типом критерия локальной минимаксной оптимальности может служить аналогичное обобщение известного критерия локальной наибольшей мощности для альтернатив типа $H_1 : \gamma = \gamma_0$ [87]. В этом случае локально наиболее мощным критерием называется критерий $\psi^* \in \Psi$, если для любого другого критерия найдется такое число $\gamma_0 > 0$, что

$$\inf_{\pi \in \Pi} \beta(\gamma, \pi, \psi^*) \geqslant \inf_{\pi \in \Pi} \beta(\gamma, \pi, \psi), \quad 0 < \gamma \leqslant \gamma_0. \tag{3.20}$$

Наконец, для рассматриваемых задач обнаружения может быть применен известный минимаксный критерий локальной оптимальности для альтернатив типа H_1: $\gamma \geqslant \gamma_0$ [87]. Согласно этому критерию решающее правило $\psi^* \in \Psi$ называется локально минимаксным, если, каким бы ни было другое решающее правило, $\psi \in \Psi$, найдется такое $\Delta > 0$, что

$$\inf_{\vartheta \in \Theta_1} \beta(\gamma, \pi, \psi^*) \geqslant \inf_{\vartheta \in \Theta_1} \beta(\gamma, \pi, \psi), \quad 0 < \gamma_0 \leqslant \Delta, \tag{3.21}$$

где $\Theta_1 = \{\vartheta = (\gamma, \pi) : \pi \in \Pi, \ \gamma \geqslant \gamma_0\}$.

Отметим, что хотя критерии (3.18), (3.20) и (3.21) в общем случае не эквивалентны, между ними существует тесная связь. В частности, как нетрудно видеть, решающее правило, удовлетворяющее (3.20), функция мощности которого при любом π не убывает по γ, удовлетворяет также и критерию (3.21). С другой стороны, если существует единственное подобное решающее правило ψ^*, удовлетворяющее (3.18) или (3.19), то оно должно также удовлетворять и критерию (3.20). В результате нередко оказывается, что одно и то же решающее правило удовлетворяет одновременно всем приведенным выше критериям локальной оптимальности.

Для рассмотренных критериев локальной оптимальности можно построить их аналоги и в терминах порогового отношения сигнал-шум.

Применительно к задачам обнаружения сигналов критерии (3.18), (3.20) и (3.21) применялись в [83].

3.1.5. Относительные минимаксные критерии

Идея относительных минимаксных критериев состоит в том, чтобы оптимизировать решающее правило не по абсолютным значениям показателей качества, как это предполагалось в предыдущих пунктах, а по некоторой мере различия показателей качества оптимизируемого решающего правила и решающего правила, оптимального при условии, что часть или все параметры задачи априори известны. Такой подход в некоторых практических задачах обнаружения больше отвечает потребностям разработчика алгоритмов и позволяет нейтрализовать особенность минимаксных критериев, которые выделяют абсолютно наихудшие условия обнаружения.

Рассмотрим несколько вариантов относительных минимаксных критериев, в том числе аналоги так называемых строгих критериев математической статистики [87, 139].

Критерий минимакса потерь вероятности правильного обнаружения. Критерий минимакса потерь вероятности β (нехватки мощности) гарантирует минимум наибольшего в Θ_1 снижения β по сравнению с предельно достижимым ее значением, обеспечиваемым решающими правилами Неймана — Пирсона для случая точно известных параметров задачи, а именно

$$\sup_{\vartheta \in \Theta_1} [\beta_{\text{ог}}(\vartheta) - \beta(\vartheta, \psi)] = \inf_{\psi \in \Psi}, \tag{3.22}$$

где $\beta_{\text{ог}}(\vartheta)$, Θ_1 и Ψ имеют прежний смысл.

Как видно, отличие (3.22) от (3.4) проявляется в тех случаях, когда огибающая $\beta_{\text{ог}}(\vartheta)$ в пределах Θ_1 резко зависит от конкретных значений неизвестных параметров. При этом критерием качества решающего правила оказывается не минимальное значение $\beta(\vartheta)$, а максимальная разность $\beta_{\text{ог}}(\vartheta) - \beta(\vartheta)$. В общем случае эти минимумы достигаются на различных подмножествах значений ϑ.

В задачах обнаружения сигналов иногда целесообразно применять принцип относительных потерь β не ко всей области Θ_1, а только к мешающим параметрам. Пусть неизвестные параметры ϑ могут быть представлены совокупностью «полезного» параметра γ, характеризующего отношение сигнала к помехе, и мешающего векторного параметра π. В этом случае критерий (3.22) может быть заменен на

$$\sup_{\vartheta \in \Theta_1} [\beta_{\text{ог}}^{(1)}(\vartheta) - \inf_{\vartheta' \in \Theta_\pi} \beta(\vartheta', \psi)] = \inf_{\psi \in \Psi}, \tag{3.23}$$

где

$$\beta_{\text{ог}}^{(1)}(\vartheta) = \beta^*(\pi) = \sup_{\psi \in \Psi_\lambda} \inf_{\vartheta' \in \Theta_\pi} \beta(\vartheta', \psi). \tag{3.24}$$

Здесь Θ_π — подмножество Θ_1, соответствующее фиксированному значению параметра $\pi = \pi(\vartheta)$; Ψ_λ — множество решающих правил, обеспечивающих $\alpha \leqslant \alpha_0$ при фиксированном значении параметра шума $\lambda = \lambda(\pi)$.

Критерий (3.23) предпочтительнее критерия (3.22) в тех случаях, когда конструктор заинтересован прежде всего в оптимизации пороговых характеристик обнаружения. При этом критерий контролирует максимальную нехватку мощности только по мешающим параметрам π, а по параметру γ применяется обычный (абсолютный) минимаксный принцип.

Возможен и альтернативный подход, когда относительная оптимизация производится по отношению к огибающей вероятности правильного обнаружения множества минимаксных решающих правил при известных параметрах γ. В этом случае $\beta_{\text{ог}}(\vartheta)$ в (3.22) заменяется на

$$\beta_{\text{ог}}^{(2)}(\vartheta) = \beta^*(\gamma) = \sup_{\psi \in \Psi} \inf_{\vartheta' \in \Theta_\gamma} \beta(\vartheta', \psi), \tag{3.25}$$

где Θ_γ — подмножество Θ_1, соответствующее фиксированному значению $\gamma = \gamma(\vartheta)$.

В случаях, когда $\beta_{\text{ог}}^{(1)}(\vartheta)$ или $\beta_{\text{ог}}^{(2)}(\vartheta)$ идентичны $\beta_{\text{ог}}(\vartheta)$ или отличаются от нее на константу, соответствующие относительные критерии взаимно эквивалентны. В тех же случаях, когда $\beta_{\text{ог}}(\vartheta)$, $\beta_{\text{ог}}^{(1)}(\vartheta)$ или $\beta_{\text{ог}}^{(2)}(\vartheta)$ не зависят от ϑ, относительные минимаксные критерии (3.22) и (3.23), очевидно, эквивалентны критерию (3.4). Отметим, что все указанные случаи встречаются среди инвариантных задач обнаружения, рассматриваемых в этой работе.

Критерий (3.22) является модификацией так называемого строгого (наиболее строгого) критерия качества решающих правил математической статистики для проверки сложных статистических гипотез [138] с учетом ограничений на Θ_1. Впервые строгие критерии были предложены Вальдом [145]. В наших обозначениях наиболее строгим решающим правилом по [87] является правило ψ^*, удовлетворяющее при всех $\psi \in \Psi$ условию

$$\sup_{\vartheta \in \Theta \setminus \Theta_0} [\beta_\alpha^*(\vartheta) - \beta(\vartheta, \psi^*)] \leqslant \sup_{\vartheta \in \Theta \setminus \Theta_0} [\beta_\alpha^*(\vartheta) - \beta(\vartheta, \psi)], \tag{3.26}$$

где $\beta^*_\alpha(\vartheta)$ — огибающая функций мощности решающих правил для проверки исходной сложной гипотезы, удовлетворяющих условию (3.2), т. е.

$$\beta^*_\alpha(\vartheta) = \sup_{\psi \in \Psi} \beta(\vartheta, \psi).$$

В случае $\beta_{or}(\Theta)$ вида (3.8) критерий (3.22) отличается от (3.26) не только размером области Θ_1, но и модифицированной огибающей функции мощности, которая при каждом $\vartheta \in \Theta_1$ определяется на множестве Ψ_λ наиболее мощных решающих правил уровня α для проверки простых гипотез, соответствующих известным параметрам помехи $\lambda = \lambda(\vartheta)$. При этом огибающая функций мощности в (3.26) определяется на множестве решающих правил уровня α для проверки сложных первоначальных гипотез, соответствующих всей области гипотез Θ_0 [см. также замечание по поводу (3.8) в п. 3.1.2].

Критерий (3.22) и его варианты можно рассматривать также как частные случаи критерия оптимизации статистических решающих функций [139] при дополнительном ограничении на множество решающих правил и в том числе по α.

Как известно, если минимаксное решающее правило ψ_0 по критерию (3.4) для $\Theta_1 = \{\vartheta : \beta^*_\alpha(\vartheta) = \beta_0\}$ не зависит от β_0, оно является также и наиболее строгим по критерию (3.26) (см. например, [87, 138]).

Следует отметить, что практическая значимость одной и той же нехватки мощности в области малых и больших (близких к единице) β (γ) может быть существенно различной. Поэтому в таких случаях целесообразно нехватку мощности в относительных критериях заменить на ее взвешенный вариант вида $\eta(\vartheta) = k(\vartheta))\,[\beta_{or}(\vartheta) - \beta(\vartheta, \psi)]$, где весовая функция $k(\vartheta)$ определяется желаниями конструктора. Например, при $k(\vartheta) = [1 - \beta_{or}(\vartheta)]^{-1}$ имеем

$$\eta(\vartheta) = [1 - \beta(\vartheta, \psi)]/[1 - \beta_{or}(\vartheta)] - 1, \qquad (3.27)$$

т. е. качество обнаружения при различных $\vartheta \in \Theta_1$ считается одинаковым, если одинаково отношение вероятности пропуска сигнала к ее минимальному возможному значению (при тех же ϑ).

Критерий минимакса энергетических потерь. Как будет проиллюстрировано в дальнейшем, появление неизвестных мешающих параметров, как правило, приводит к снижению качества обнаружения по сравнению с предельно возможным, достигаемым в случае априорно известных мешающих параметров. Практически это снижение качества нередко удобно измерять так называемыми энергетическими потерями, показывающими, во сколько раз следует увеличить мощность (энергию) полезного сигнала, а следовательно, и отношение сигнал-шум, чтобы компенсировать уменьшение вероятности правильного обнаружения. Это приводит к следующему относительному энергетическому критерию оптимальности решающего правила:

$$\sup_{\pi \in \Pi} \frac{\gamma_0(\pi, \psi^*)}{\gamma_0^*(\pi)} \leqslant \sup_{\pi \in \Pi} \frac{\gamma_0(\pi, \psi)}{\gamma_0^*(\pi)}; \quad \psi^*, \psi \in \Psi, \qquad (3.28)$$

где $\gamma_0(\pi, \psi)$ — пороговое энергетическое отношение сигнал-шум для ψ при фиксированном π и заданном значении β_0; $\gamma_0^*(\pi)$ — то же для решающего правила, минимизирующего $\gamma_0(\pi, \psi)$ в Ψ при тех же условиях. Более точно γ_0 определяется (3.17) и

$$\gamma_0^*(\pi) = \inf_{\psi \in \Psi} \gamma_0(\pi, \psi), \tag{3.29}$$

где, как и в п.3.1.3, дополнительно предполагается, что множество Ψ включает лишь решающие правила с монотонно возрастающей по γ функцией мощности. Последнее предположение вполне естественно для задач обнаружения сигнала на фоне аддитивных помех и, по существу, могло быть принято и для всех предыдущих критериев оптимальности.

Эквивалентным вариантом критерия (3.27), соответствующим минимизации наибольших энергетических потерь в децибеллах, является критерий

$$\sup_{\pi \in \Pi} [10 \lg \gamma_0(\pi, \psi) - 10 \lg \gamma_0^*(\pi)] = \inf_{\psi \in \Psi}. \tag{3.30}$$

При необходимости критерии (3.27) и (3.30) можно дополнительно обобщить заменой β_0 на $\beta_0(\pi)$, если по характеру задачи допустимое качество обнаружения зависит от значений мешающих параметров π. Кроме того, критерий (3.27) можно распространить на некоторую область $\mathcal{B}$ значений β_0 и, в частности, на интервал значений $\beta_0 \geqslant \beta^*$ и ограничить произвольной областью $\Pi_1 \subset \Pi$ значений π. В этом случае, учитывая, что $\gamma_0(\pi, \psi) = \gamma_0(\pi, \beta_0, \psi)$, вместо (3.28) можем написать

$$\sup_{\beta_0 \in \mathcal{B}} \sup_{\pi \in \Pi_1} \frac{\gamma_0(\pi, \beta_0, \psi^*)}{\gamma_0^*(\pi, \beta_0)} \leqslant \sup_{\beta_0 \in \mathcal{B}} \sup_{\pi \in \Pi_1} \frac{\gamma_0(\pi, \beta_0, \psi)}{\gamma_0^*(\pi, \beta_0)} \tag{3.31}$$

при $\psi^*, \psi \in \Psi$, $\Pi_1 \subset \Pi$.

Как и ранее, множество Ψ в (3.29) может быть заменено на Ψ_λ. Наконец, в случае, когда $\gamma_0^*(\pi) = \text{const}(\pi)$, критерий (3.28) предусматривает минимизацию $\sup_{\pi \in \Pi} \gamma_0(\pi, \psi)$ и, очевидно, эквивалентен энергетическому критерию (3.16).

3.1.6. Минимаксный и связанные с ним критерии оптимизации многоальтернативного обнаружения

Задача многоальтернативного обнаружения возникает тогда, когда отсутствию сигнала противопоставляется не единственная альтернатива, соответствующая присутствию сигнала, а несколько несовместимых альтернатив, соответствующих различным сигналам, различным сочетаниям сигналов либо различным значениям некоторых параметров сигнала. Характерной чертой многоальтернативной задачи является необходимость принятия решений более чем двух различных видов, так что каждой альтернативе должно соответствовать особое решение.

В общем случае многоальтернативного обнаружения пространство решений содержит $L+1$ элемент. Так, задача обнаружения L видов сигналов будет одноальтернативной, если требуется определить, что присутствует любой из них, и многоальтернативной, если потребуется указать, какой именно из сигналов присутствует.

Многоальтернативное обнаружение часто называется обнаружением с оценкой значения дискретного параметра.

Нерандомизированное решающее правило φ для многоальтернативных задач сводится к разбиению входного выборочного пространства на $L+1$ непересекающихся областей решений $\mathbf{X}_l$, $l=\overline{0, L}$, так, что принадлежность выборки $\mathbf{x}$ к l-й области $\mathbf{X}_l$ соответствует принятию l-го решения. Нулевое решение будем, как обычно, относить к подтверждению гипотезы, т. е. решению об отсутствии сигнала.

Соответствующее рандомизированное решающее правило $\boldsymbol{\psi}$ есть совокупность измеримых по Лебегу критических функций ψ_l, т. е.

$$\boldsymbol{\psi}=(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_L),\ \psi_l(\mathbf{x})\geqslant 0,\ l=\overline{0, L},\ \sum_{l=0}^{L}\psi_l(\mathbf{x})=1.$$

Обозначим условные плотности распределений шума и его смеси с различными видами сигналов через

$$W_0(\mathbf{x}|\boldsymbol{\lambda}) \text{ и } W_l(\mathbf{x}|\boldsymbol{\vartheta}_l),\ \boldsymbol{\vartheta}_l\in\Theta_l,\ l=\overline{1, L};\ \boldsymbol{\lambda}\in\Lambda. \tag{3.32}$$

Здесь под $\boldsymbol{\vartheta}_l$ и $\boldsymbol{\lambda}$ понимаются совокупности неизвестных параметров соответственно для смеси l-го сигнала и помехи и одной помехи.

Предполагается, что априорно заданы лишь области определения неизвестных параметров, характеризующих совместно с (3.22) соответствующие непересекающиеся семейства распределений входной выборки. Априорные вероятности появления различного вида сигналов предполагаются либо неизвестными, либо несуществующими. Требуется построить решающее правило, в некотором смысле наилучшим образом, определяющее по принятой выборке, к какому семейству распределений она принадлежит. В качестве критерия оптимизации многоальтернативного обнаружения рассмотрим следующий максиминный критерий, являющийся одним из возможных вариантов распространения рассмотренного выше максиминного критерия (3.4) при $L=1$ на случай многоальтернативного обнаружения:

$$\beta^*=\min_{l\neq 0}\inf_{\boldsymbol{\vartheta}_l\in\boldsymbol{\Theta}_l}\beta_l(\boldsymbol{\vartheta}_l, \boldsymbol{\psi}^*)\geqslant\min_{l\neq 0}\inf_{\boldsymbol{\vartheta}_l\in\boldsymbol{\Theta}_l}\beta_l(\boldsymbol{\vartheta}_l, \boldsymbol{\psi}),\ \boldsymbol{\psi}^*, \boldsymbol{\psi}\in\boldsymbol{\Psi}. \tag{3.33}$$

Здесь $\beta_l(\boldsymbol{\vartheta}_l, \boldsymbol{\psi})$ — вероятность правильного обнаружения l-го сигнала решающим правилом $\boldsymbol{\psi}$ при $\boldsymbol{\vartheta}_l\in\Theta_l$; $\boldsymbol{\psi}^*$ — оптимальное решающее правило; $\boldsymbol{\Psi}$ — множество решающих правил, удовлетворяющих принятому ограничению на вероятность ложной тревоги; Θ_l — контролируемые при оптимизации альтернативные области значений неизвестных параметров $\boldsymbol{\vartheta}_l$

Ниже, как и раньше, будут рассмотрены два вида ограничений на вероятность ложной тревоги α:

1) независимость α от параметров шума:

$$\alpha(\lambda) = \sum_{l=1}^{L} \alpha_l(\lambda) = \text{const} = \alpha_0; \tag{3.34}$$

2) ограничение α сверху заданным значением:

$$\alpha(\lambda) = \sum_{l=1}^{L} \alpha_l(\lambda) \leqslant \alpha_0, \tag{3.35}$$

где $\alpha_l(\lambda)$ — вероятность ложного обнаружения l-го сигнала.

Как видно из (3.34) и (3.35), под ложной тревогой здесь подразумевается принятие решения о присутствии сигнала независимо от его вида при фактическом отсутствии сигналов, что эквивалентно $\hat{\theta} = \hat{\theta}_0 \in \Theta_0$, где $\hat{\theta} = (l, \hat{\theta}_l)$, $l = \overline{0, L}$.

Таким образом, задача сводится к проверке сложной гипотезы $H_0 : \hat{\theta} \in \Theta_0$ против L сложных альтернатив $H_l : \hat{\theta} = \hat{\theta}_l \in \Theta_l$ при ограничении $\psi \in \Psi$, соответствующем (3.34) или (3.35).

Аналогично задачам двоичного обнаружения, для того чтобы максиминный критерий был работоспособен (не приводил к тривиальным бесполезным решающим правилам), вводятся также ограничения на контролируемые при оптимизации области Θ_l значений неизвестных параметров смеси сигналов и помехи, так что в общем параметрическом пространстве задачи Θ между областью гипотезы Θ_0 и областями альтернатив Θ_l может располагаться зона безразличия $\Theta \setminus \bigcup_{l=0}^{L} \Theta_l$. Выбор областей Θ_l, как и раньше, определяется конкретными условиями задачи и условиями оптимизации, задаваемыми наблюдателем.

В частности, Θ_l могут задаваться условием

$$\beta_{\text{or}\,l}(\hat{\theta}_l) = \sup_{\psi \in \Psi} \beta_l(\hat{\theta}_l, \psi) \geqslant \beta_0^*,$$

где $\beta_{\text{or}\,l}(\hat{\theta}_l)$ — огибающие вероятности правильного обнаружения решающих правил ψ_l, оптимальных при априори известных значениях параметров $\hat{\theta}_l$.

Если для каждой альтернативы выбраны последовательности $\Theta_l(\rho_{0l})$, зависящие от «расстояний» ρ_{0l} (от Θ_l до Θ_0), то по аналогии с (3.13) критерий оптимизации ψ может потребовать при заданной гарантированной в Θ_l вероятности β_0 минимизации наибольшего из $\rho_{0\,\min\,l}$. В этом случае ψ^* является оптимальным решающим правилом обнаружения-различения сигналов по критерию минимума расстояния при

$$\rho^* = \max_l \rho_{0\,\min\,l}(\psi_l^*) \leqslant \max_l \rho_{0\,\min\,l}(\psi_l). \tag{3.36}$$

Здесь $\rho_{0\,\min\,l}(\psi_l)$ определяются аналогично (3.12) при условиях $\beta_l(\hat{\theta}_l, \psi) \geqslant \beta_0$ для парциальных критических функций ψ_l.

Так, пусть последовательности $\Theta_l(\rho_{0l})$ заданы неравенствами

$$\Theta_l = \{\hat{\theta} : k_l \gamma_l(\hat{\theta}) \geqslant \rho_{0l} \text{ или } \gamma_l(\hat{\theta}) \geqslant \gamma_{0l} = \rho_{0l}/k_l, \tag{3.37}$$

где $\gamma_l(\vartheta) = \gamma_l(\vartheta_l)$ — отношение интенсивностей l-го сигнала и аддитивной помехи, а k_l — константы. Тогда критерий требует минимизации наибольшего из взвешенных пороговых отношений сигнал-шум $k_l\gamma_{0\min l}$.

Критерий (3.36) тесно связан с критерием (3.33). Так, если оптимальное решающее правило по (3.36) обеспечивает $\max\limits_l \rho_{0\min l} = \rho^*$, то оно является минимаксным решающим правилом по (3.33) с $\Theta_l = \Theta_l(\rho^*)$. При этом максиминная вероятность правильного обнаружения в Θ_l для (3.33) β^* совпадает с гарантированной в (3.36) вероятностью β_0. Таким образом, оптимальное решающее правило по критерию (3.36) может отыскиваться как минимаксное решающее правило по критерию (3.33) с соответственно подбираемыми Θ_l. Поэтому в дальнейшем можно ориентироваться на критерий (3.33).

В рассматриваемых критериях оптимизации предполагается, что ошибки в определении вида сигнала столь же нежелательны, как и ошибки пропуска (необнаружения) сигналов. В этом случае $\beta_l(\vartheta_l, \psi)$ наряду с $\alpha_l(\lambda, \psi)$ являются достаточной характеристикой качества многоальтернативного обнаружения.

Вместе с тем выбором различных Θ_l или k_l приведенные критерии позволяют учитывать возможную неодинаковую заинтересованность наблюдателя в правильном обнаружении сигналов различного вида или учитывать различную потенциальную возможность их обнаружения. При одинаковой заинтересованности наблюдателя в правильном обнаружении сигналов различного вида множества Θ_l в (3.33) следует выбирать одинаковыми, а в (3.37) можно положить $k_l = 1$ и $\rho_{0l} = \gamma_{0l}$. В этом случае критерии оказываются наиболее простыми и удобными.

Следует отметить, что оптимизации по рассматриваемым критериям дает некоторые гарантии (часто практически достаточно эффективные) и относительно ошибок в определении вида сигнала, так как суммарная вероятность последних для l-го вида сигнала вместе с вероятностью пропуска сигнала равна $1 - \beta_l \ll 1$.

Приведенные выше критерии, а также и более общие критерии оптимизации могли бы быть сформулированы и в терминах условного среднего риска $R_l(\vartheta_l, \psi)$ при фиксированных l и ϑ_l. Действительно, критерий (3.33) может рассматриваться как частный случай минимаксного критерия с ограничением на вероятность ложной тревоги

$$\sup_{\vartheta\in\Theta} R(\vartheta, \psi^*) \leqslant \sup_{\vartheta\in\Theta} R(\vartheta, \psi), \quad \psi^*, \psi \in \Psi. \tag{3.38}$$

Критерий (3.38) переходит в (3.33), если принять, что потери (риски), связанные с ошибками в определении вида сигналов, равны потерям пропуска этих сигналов в смысле принятия их за одну помеху, которые, в свою очередь, считать одинаковыми для всех сигналов, что соответствует простой функции потерь. В этом случае

$$R(\vartheta, \psi) = \begin{cases} r[1-\beta_l(\vartheta, \psi)] & \text{при } \vartheta \in \Theta_l; \\ 0 & \text{при } \vartheta \notin \Theta_l. \end{cases} \tag{3.39}$$

Вследствие наличия общего ограничения на вероятность ложной тревоги (3.34) или (3.35) потери, соответствующие отсутствию сигнала, не учитываются (приняты равными нулю).

Ограничения на контролируемые области неизвестных параметров также выражены с помощью функции потерь (3.39) — она положена равной нулю при всех $\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}_l \notin \Theta_l$.

Нетрудно сформулировать критерии оптимального многоальтернативного обнаружения, являющиеся аналогами других рассмотренных выше критериев двоичного обнаружения, а также минимаксных методов оптимизации радиоэлектронных устройств по совокупности показателей качества [108].

Более общий вариант критерия (3.39) может применяться в случаях, когда необнаружению (пропуску) некоторых видов сигналов желательно придать особый вес при одинаковых Θ_l и k_l, что можно сделать назначением в (3.39) вместо r соответствующих неодинаковых потерь r_l. При этом (3.33) может быть заменен следующим минимаксным критерием:

$$\max_l \sup_{\vartheta_l \in \Theta_l} r_l [1 - \beta_l (\vartheta_l, \psi^*)] \leqslant$$

$$\leqslant \max_l \sup_{\vartheta_l \in \Theta_l} r_l [1 - \beta_l (\vartheta_l, \psi)]; \ \psi^*, \ \psi \in \Psi. \qquad (3.40)$$

Ввиду того что минимаксное решение ψ^* в данном случае приводит к обобщающему (3.9) равенству

$$\sup_{\vartheta_l \in \Theta_l} r_l [1 - \beta_l (\vartheta_l, \vartheta^*)] = \sup_{\vartheta_k \in \Theta_k} r_k [1 - \beta_k (\vartheta_k, \psi^*)] \qquad (3.41)$$

или

$$r_l [1 - \inf_{\vartheta_l \in \Theta_l} \beta_l (\vartheta_l, \psi^*)] = r_k [1 - \inf_{\vartheta_k \in \Theta_k} \beta_k (\vartheta_k, \psi^*)], \qquad (3.42)$$

критерий (3.40) обеспечивает заданные соотношения между максиминными вероятностями ошибок пропуска различных видов сигналов:

$$[1 - \inf_{\vartheta_l \in \Theta_l} \beta_l (\vartheta_l, \psi^*)] / [1 - \inf_{\vartheta_k \in \Theta_k} \beta_k (\vartheta_k, \psi^*)] = r_k / r_l. \qquad (3.43)$$

Соответствующий вариант критерия (3.36) имеет вид

$$\max_l \rho_{0 \min l} (\psi) = \inf_{\psi \in \Psi} \text{ при } \inf_{\vartheta_l \in \Theta_l} \beta_l (\vartheta_l, \psi) \geqslant \beta_{0l}, \qquad (3.44)$$

где $\rho_{0 \min} (\psi)$ определяется аналогично (3.12), а β_{0l} — гарантированные значения β_l в Θ_l для различных видов сигналов.

В частности, при $\Theta_l = \{\vartheta : \gamma_l \geqslant \gamma_{0l}\}$ критерий (3.44) обеспечивает минимум наибольшего взвешенного порогового отношения сигнал-шум при гарантированных β_{0l}.

Заметим, что все сказанное выше о тесной связи между критериями (3.36) и (3.33) остается в силе и для критериев (3.44) и (3.40). При $r_l = \text{const}\ (l) = r$ критерий (3.40), очевидно, становится эквивалентным критерию (3.33).

Дальнейшую детализацию гарантий, предоставляемых рассмотренными критериями, можно было бы получить установлением конкретных непротиворечивых ограничений типа равенств, неравенств или отношений вероятности любых видов ошибок или правильных решений. Однако в большинстве случаев приведенные критерии смогут удовлетворить практическим потребностям.

Отметим, что рассмотренные минимаксные, максиминные и связанные с ними критерии могут применяться и для решения задачи оптимизации различения без обнаружения. В этом случае, например, в (3.33) $\beta_l(\vartheta_l, \psi)$ соответствует вероятности правильного распознавания l-го вида сигнала с параметрами ϑ_l, число возможных решений d_l равно числу видов сигнала L, а ограничения на ψ по вероятности ложной тревоги, разумеется, отсутствуют.

Многоальтернативное обнаружение рассматривалось выше для случая, когда различные виды сигналов альтернативны, т. е. не могут присутствовать одновременно. Однако на практике это условие может не выполняться. При этом обычно требуется указать, имеются ли сигналы, сколько их и какого именно они вида. Такая усложненная задача, как показано в [135], может рассматриваться как обычная многоальтернативная, если в качестве новых альтернативных ви-

дов сигналов рассматривать все возможные априори сочетания (группы) элементарных видов сигналов. Следовательно, и в этом случае приложимы рассмотренные выше критерии оптимизации многоальтернативного обнаружения на фоне помех с неизвестными параметрами.

3.2. Оптимальное обнаружение сигналов на фоне шума с неизвестными параметрами

3.2.1. Синтез минимаксных решающих правил

Применение к рассматриваемому случаю параметрических задач статистического решения с учетом дополнительных условий (3.5), (3.6) и известных результатов Вальда [106] приводит к следующим утверждениям:

1. Оптимальные минимаксные (максиминные) решающие правила, отвечающие критерию (3.4), существуют.

2. Если при заданном ограничении на вероятность ложной тревоги существует наименее благоприятное распределение вероятности $P^*(\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta_1$, то минимаксное решающее правило ψ^*, является байесовским относительно $P^*(\vartheta)$ в классе правил $\psi \in \Psi$. При этом

$$\sup_{\psi\in\Psi}\inf_{\vartheta\in\Theta_1}\beta(\vartheta,\psi)=\sup_{\psi\in\Psi}\inf_{P(\vartheta)}\int_{\Theta_1}\beta(\vartheta,\psi)\,dP(\vartheta)=$$

$$=\inf_{P(\vartheta)}\sup_{\psi\in\Psi}\int_{\Theta_1}\beta(\vartheta,\psi)\,dP(\vartheta)=\beta^*_1; \tag{3.45}$$

$$\sup_{\psi\in\Psi}\int_{\Theta_1}\beta(\vartheta,\psi)\,dP^*(\vartheta)=\inf_{P(\vartheta)}\int_{\Theta_1}\beta(\vartheta,\psi^*)\,dP(\vartheta)=$$

$$=\int_{\Theta_1}\beta(\vartheta,\psi^*)\,dP^*(\vartheta)=\inf_{\vartheta\in\Theta_1}\beta(\vartheta,\psi^*)=\beta^*, \tag{3.46}$$

где β^* — минимаксная вероятность правильного обнаружения сигнала.

Как видно из (3.45) и (3.46), наименее благоприятное распределение минимизирует наибольшую среднюю байесовскую вероятность правильного обнаружения, являющуюся функционалом от $P(\vartheta)$. В связи с этим минимаксная оптимизация в терминах средней вероятности правильного обнаружения в классе всевозможных распределений случайных параметров в области Θ_1 сводится к оптимизации в терминах вероятности правильного обнаружения в соответствии с критериями (3.4) при условиях (3.5) и (3.6).

Приведенные утверждения в общем случае справедливы лишь для рандомизированных решающих правил [87, 88, 106]. Однако в параметрических задачах с абсолютно непрерывными распределениями входной выборки минимаксные правила обычно являются детерминированными. В других случаях рандомизации практически удается избежать при небольшом изменении условий задачи относительно допустимых вероятностей ошибочных решений.

Утверждение 1 и (3.45) вытекают из теорем 3.7 и 3.4 [106], утверждения 2 и (3.46) — теоремы 3.9 той же работы. В общем случае наименее

благоприятного распределения вероятности может не существовать и тогда теорема 3.8 из [106] гарантирует справедливость утверждения 2 в пределе для некоторой последовательности $P_i^*(\vartheta)$ априорных распределений вероятности, а байесовское решающее правило ψ^* понимается в так называемом широком смысле относительно упомянутой последовательности. При этом вместо (3.46) имеем

$$\lim_{i\to\infty}\sup_{\psi}\int_{\Theta_1}\beta(\vartheta,\psi)\,dP_i^*(\vartheta)=\lim_{i\to\infty}\int_{\Theta_1}\beta(\vartheta,\psi^*)\,dP_i^*(\vartheta)=$$

$$=\inf_{P(\vartheta)}\int_{\Theta_1}\beta(\vartheta,\psi^*)\,dP(\vartheta)=\inf_{\vartheta\in\Theta_1}\beta(\vartheta,\psi^*)=\beta^*.$$

К счастью, в этих случаях роль наименее благоприятного распределения обычно выполняет некоторая инвариантная мера на Θ_1, которую с точностью до постоянного множителя можно рассматривать, как предел последовательности $P_i(\vartheta)$. Эту меру нетрудно найти, используя инвариантные свойства задачи (см. ниже). О возможности расширения понятия наименее благоприятного распределения в указанном смысле см. также [87].

Для существования наименее благоприятного распределения вероятности достаточно выполнения некоторых дополнительных условий, налагаемых на условную плотность распределения входной выборки $W_1(\mathbf{x}|\vartheta)$ и множество Θ_1, сформулированных в [106] (теорема 3.14, а также допущения 5.1—5.3). В частности, для этого достаточно, чтобы плотность $W_1(\mathbf{x}|\vartheta)$ была непрерывной по ϑ, а Θ_1 — замкнутым ограниченным подмножеством конечномерного декартового пространства (см. теорему 5.11 из [106]).

Заметим, что условия (3.5) и (3.6) существенно влияют на результат оптимизации, причем получаемые на их основе решающие правила оказываются отличными от оптимальных правил, соответствующих случаю известных параметров помехи. С другой стороны, в ряде важных для практики случаев оптимальные решающие правила при условиях (3.5) и (3.6) оказываются эквивалентными.

Рассмотрим сначала задачу синтеза минимаксных правил при условии постоянства вероятности ложной тревоги (3.5) [119]. Поскольку искомые минимаксные правила, отвечающие критерию (3.4), а следовательно (3.13) и (3.14), совпадают с байесовскими правилами для некоторого наименее благоприятного распределения вероятности $P^*(\vartheta)$ в классе правил с заданным ограничением на вероятность ложной тревоги, задача их отыскания сводится к определению соответствующих байесовских правил для заданных априорных распределений неизвестных параметров $P(\vartheta)$ и отысканию $P^*(\vartheta)$, при котором для ψ^* удовлетворяется критерий минимакса.

Из теории так называемых подобных тестов (критериев) для проверки сложных статистических гипотез [87, 88] следует, что первая часть этой задачи — отыскание байесовского правила при условии (3.5) — имеет решение, легко находимое, по крайней мере, когда семейство $P(\mathbf{t}|\lambda)$ распределений достаточной статистики $\mathbf{t}=\mathbf{t}(\mathbf{x})$ в отсутст-

вие полезного сигнала является полным (ограниченно полным). В этом случае искомое минимаксное правило ψ^* с необходимостью имеет так называемую неймановскую структуру относительно $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ и без учета рандомизации может быть представлено в виде

$$\int_{\Theta_1} W_1(\mathbf{x} \mid \hat{\boldsymbol{\theta}})\, W^*(\hat{\boldsymbol{\theta}}) d\hat{\boldsymbol{\theta}} / W_0(\mathbf{x} \mid \lambda_0) \geqslant C(\mathbf{t}), \tag{3.47}$$

где $C(\mathbf{t})$ — функция статистики $\mathbf{t}$, однозначно определяемая из уравнения $\alpha_t(\lambda) = \text{const} = \alpha_0$ при всех $\mathbf{t}$; $W^*(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ — плотность наименее благоприятного распределения вероятности параметров $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ в области Θ_1 ($\int_\Theta W^*(\hat{\boldsymbol{\theta}})\, d(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = 1$), удовлетворяющая необходимому и достаточному условию $\inf_{\hat{\boldsymbol{\theta}} \in \Theta_1} \beta(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \psi^*) = \beta^*$; $W_0(\mathbf{x}|\lambda) = W_1(\mathbf{x}|\hat{\boldsymbol{\theta}}(\lambda) \in \Theta_0)$ — плотность распределения вероятности помехи; λ_0 — произвольное фиксированное значение совокупности параметров помехи; $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ — векторная статистика, достаточная для параметров λ семейства $W_0(\mathbf{x}|\lambda)$; α_t — условная вероятность ложной тревоги для правила (3.47) при условии фиксированного вектора $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x})$.

Здесь и в дальнейшем для простоты предполагается, что вероятность равенства в (3.47) равна нулю. В противном случае согласно фундаментальной лемме Неймана — Пирсона правило (3.47) дополняется рандомизацией решения в точках равенства случайным принятием решения о присутствии сигнала с некоторой вероятностью, определяемой из того же условия $\alpha_t(\lambda) = \alpha_0$ [87].

Во всех рассматриваемых ниже задачах обнаружения сигналов с непрерывными $W(\mathbf{x})$ указанное предположение соблюдается и минимаксные решающие правила являются детерминированными и единственными (см. доказательство фундаментальной леммы [87]).

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_r)$ — векторы в евклидовых пространствах E_n и E_r соответственно.

Для простого обоснования (3.47) рассмотрим важный для дальнейшего случай, когда на n-мерном евклидовом пространстве выборок $\mathbf{x}$ существует функция $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_{n-r})$, такая, что преобразование $\mathbf{x} \to (\mathbf{t}, \mathbf{u})$ взаимно-однозначно в E_n и что существует совместная плотность $W^{\mathbf{t}, \mathbf{u}}(\mathbf{t}, \mathbf{u})$ величин $\mathbf{t}$, $\mathbf{u}$, причем

$$\int W_1(\mathbf{x} \mid \hat{\boldsymbol{\theta}}) W^*(\hat{\boldsymbol{\theta}}) d\hat{\boldsymbol{\theta}} = W_1^{\mathbf{t}, \mathbf{u}}(\mathbf{t}(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\mathbf{x}))\, J,$$

$$W_0(\mathbf{x} \mid \lambda) = W_0^{\mathbf{t}, \mathbf{u}}(\mathbf{t}(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\mathbf{x}))\, J, \tag{3.48}$$

где $J = J(\mathbf{x})$ — якобиан $(\mathbf{t}, \mathbf{u})$ по отношению к $\mathbf{x}$.

Тогда при фиксированном $\mathbf{t}$ условная плотность $\mathbf{u}$ равна

$$W^{\mathbf{u} \mid \mathbf{t}}(\mathbf{u} \mid \mathbf{t}) = W^{\mathbf{t} \mid \mathbf{u}}(\mathbf{t} \mid \mathbf{u}) / \int W^{\mathbf{t}, \mathbf{u}}(\mathbf{t}, \mathbf{u})\, d\mathbf{u} \tag{3.49}$$

в предположении, что знаменатель отличен от нуля. На каждой поверхности $\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \mathbf{t} = \text{const}$ критическая область условно байесовского относительно $P^*(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ теста неймановской структуры уровня α имеет вид

$$W_1^{\mathbf{u} \mid \mathbf{t}}(\mathbf{u} \mid \mathbf{t}) / W_0^{\mathbf{u} \mid \mathbf{t}}(\mathbf{u} \mid \mathbf{t}) \geqslant C(\mathbf{t}), \tag{3.50}$$

откуда с учетом (3.48) и (3.49) получаем (3.47).

Здесь и в дальнейшем минимаксное решающее правило при условии $\alpha(\lambda) = \text{const} = \alpha_0$ по аналогии с терминологией, принятой в математической статистике, называется подобным минимаксным правилом.

Интегрирование в (3.47) и в последующих вариантах решающих правил производится по области параметров Θ_1, причем допускаются плотности $W^*(\hat{\theta})$, сосредоточенные в подпространстве меньшей размерности, чем Θ_1, и, в частности, в точках $\hat{\theta}_k$, описываемые дельта-функциями.

Случай, когда $P(\mathbf{t} \mid \lambda)$ — полное семейство, практически не является исключительным и, в частности, соответствует широкому классу распределений помех, описываемых экспоненциальными семействами вида

$$W_0(\mathbf{x} \mid \lambda) = k(\lambda) h(\mathbf{x}) \exp\left[\sum_i \lambda_i t_i(\mathbf{x})\right]. \tag{3.51}$$

При этом предполагается соблюдение некоторых условий, налагаемых на параметры λ_i, выполняемых, например, для функционально несвязанных параметров [87, 88]. Здесь $k(\lambda)$ — нормирующий множитель, зависящий от λ, а $h(\mathbf{x})$ — множитель, зависящий от выборки $\mathbf{x}$, но не зависящий от λ.

В случаях, часто встречающихся в задачах обнаружения, когда $W_0(\mathbf{x}|\lambda)$ зависит от $\mathbf{x}$ исключительно через $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x})$, правило (3.47) может быть записано в более простом виде

$$\int_{\Theta_1} W_1(\mathbf{x} \mid \hat{\theta}) W^*(\hat{\theta})\, d\hat{\theta} \geqslant C_1(\mathbf{t}), \tag{3.52}$$

где $C_1(\mathbf{t})$ находится по-прежнему из условия $\alpha_t(\lambda) = \text{const} = \alpha_0$.

В некоторых случаях удобным может оказаться также следующее правило, эквивалентное (3.47):

$$\int_{\Theta_1} W_1(\mathbf{x} \mid \hat{\theta}) W^*(\hat{\theta})\, d\hat{\theta} \Big/ \int_{\Lambda} W_0(\mathbf{x} \mid \lambda) W_0(\lambda)\, d\lambda \geqslant C_2(\mathbf{t}), \tag{3.53}$$

где $W_0(\lambda)$ — произвольное распределение параметров помехи в области Λ. Иногда подбором $W_0(\lambda)$ можно добиться независимости левой части (3.53) от $\mathbf{t}$ и тогда $C_2(\mathbf{t}) = \text{const}(\mathbf{t}) = C_2$.

Часто решающие правила (3.47), (3.52) и (3.53) допускают значительное дополнительное упрощение путем применения к соответствующим неравенствам простейших функциональных и алгебраических преобразований, включая логарифмические преобразования, а также переносы в правую часть и включение в $C(\mathbf{t})$ всех слагаемых и множителей, не зависящих от $\mathbf{x}$ или зависящих от $\mathbf{x}$ только через $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x})$. Кроме того, если $\hat{\theta} = (\gamma, \pi)$ и при каждом фиксированном $\mathbf{t}$ плотность распределения достаточных относительно семейства $W_1(\mathbf{x}|\hat{\theta})$ статистик $W^{\mathbf{u}/\mathbf{t}}(\mathbf{u}, \mathbf{t}|\gamma, \pi)$ имеет монотонное отношение правдоподобия относительно $\mathbf{u}$, то в соответствии со следствием 2 гл. 3 из [87] существует равномерно наиболее мощное подобное решающее правило вида $\mathbf{u} > C(\mathbf{t})$, где $C(\mathbf{t})$ определяется из условия $\alpha_t(\lambda) = \alpha_0$ при всех $\mathbf{t}$, $\lambda = \lambda(\pi)$.

Следует отметить, что если $W(\mathbf{t}|\lambda)$ не является ограниченно полным семейством и выполняется условие $\alpha(\lambda) \leqslant \alpha_0$, оптимальное правило также представимо в виде (3.47), но в этих случаях определение оптимального правила в общем случае уже не связано с условием $\alpha_t(\lambda) =$

$=$ const и наталкивается на значительные трудности математического характера.

Из (3.47) и (3.53) непосредственно вытекает обобщенная структура оптимального максиминного обнаружителя, приведенная на рис. 3.1.

Таким образом, при весьма общих предположениях максиминный обнаружитель можно рассматривать как оптимальный обнаружитель Неймана — Пирсона для некоторого вспомогательного распределения параметров, вычисляющий коэффициент правдоподобия $l(\mathbf{x})$, который сравнивается с порогом, автоматически регулируемым в зависимости от реализации $\mathbf{t}$ достаточной статистики.

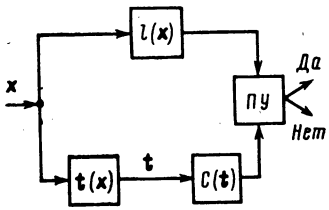


Рис. 3.1. Обобщенная структурная схема максиминного обнаружителя

Перейдем теперь к рассмотрению задачи синтеза минимаксных правил с ограниченной вероятностью ложной тревоги, т. е. при условии $\alpha(\lambda) \leqslant \alpha_0$ [82]. В этом случае искомое правило без учета рандомизации имеет вид

$$\int_{\Theta_1} W_1(\mathbf{x} \mid \vartheta)\, W^*(\vartheta)\, d\vartheta \Big/ \int_{\Lambda} W_0(\mathbf{x} \mid \lambda)\, W_0^*(\lambda)\, d\lambda \geqslant C, \qquad (3.54)$$

где $W^*(\vartheta)$ и $W_0^*(\lambda)$ — пара плотностей наименее благоприятных распределений для неизвестных параметров соответственно смеси сигнала и помехи и одной помехи, а C — фиксированный порог, определяемый заданным уровнем вероятности ложной тревоги.

Справедливость (3.54) непосредственно вытекает из применения к рассматриваемой задаче обнаружения сигналов некоторых результатов теории проверки сложных статистических гипотез — теоремы 7 и следствия 5 гл. 3, а также теоремы 1 и следствия 1 гл. 8 [87]. При этом $W^*(\vartheta)$, $W_0^*(\lambda)$ и C обязаны удовлетворять следующим двум необходимым и достаточным условиям:

$$\inf_{\vartheta \in \Theta_1} \beta(\vartheta) = \beta^* \text{ и } \sup_{\lambda \in \Lambda} \alpha(\lambda) = \alpha_0, \qquad (3.55)$$

где β^* и α_0 — средние вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги для правила (3.54), когда $W^*(\vartheta)$ и $W_0^*(\lambda)$ в действительности являются плотностями распределения случайных параметров ϑ и λ. Другим вытекающим из (3.55) необходимым признаком наименее благоприятного распределения является постоянство β и α и равенство их β^* и α_0 в тех областях изменения ϑ и λ, в которых $W^*(\vartheta)$ и $W_0^*(\lambda)$ отличны от нуля. Необходимость (3.55) следует, в частности, из теоремы 3.10 [106].

Решающее правило (3.54) можно рассматривать так же, как байесовское относительно $W^*(\vartheta)$ в классе правил, удовлетворяющих условию $\alpha \leqslant \alpha_0$.

Во многих практически интересных случаях оказывается, что минимаксные правила при $\alpha = \alpha_0$ и $\alpha \leqslant \alpha_0$ совпадают. Из сопоставле-

ния (3.53) и (3.54) вытекает следующий признак такой эквивалентности: если обнаружитель, оптимизированный при $\alpha = \alpha_0$ в виде (3.53), при некоторой $W_0(\lambda)$ имеет фиксированную, не зависящую от $\mathbf{t}$ правую часть, то он сохраняет свои оптимальные максиминные свойства и при $\alpha \leqslant \alpha_0$. С другой стороны, если минимаксное правило для $\alpha \leqslant \alpha_0$ фактически сохраняет вероятность ложной тревоги неизменной, то оно оптимально и для условия $\alpha = \text{const} = \alpha_0$. Следовательно, подобное минимаксное правило не всегда может быть представлено в виде (3.54), в то время как (3.53) является общим представлением минимаксных правил при любых ограничениях на вероятность ложной тревоги.

В возможности преобразования (3.54), например, к виду (3.53) при произвольной $W_0(\lambda)$ нетрудно убедиться также, если принять во внимание, что отношение

$$a(\mathbf{t}) = \int_{\Lambda} W_0(\mathbf{x} \mid \lambda)\, W_0^*(\lambda)\, d\lambda \Big/ \int_{\Lambda} W_0(\mathbf{x} \mid \lambda)\, W_0(\lambda)\, d\lambda \qquad (3.56)$$

при всюду положительном знаменателе зависит от $\mathbf{x}$ только через $\mathbf{t}$, причем $C_2(\mathbf{t}) = Ca(\mathbf{t})$.

В заключение следует отметить, что в частном случае простой гипотезы, но сложной альтернативы (когда неизвестные параметры имеются лишь у сигнала или смеси сигнала и помехи) оптимальное решающее правило (3.54) приводится к виду

$$\int_{\Theta_1} W_1(\mathbf{x} \mid \vartheta)\, W^*(\vartheta)\, d\vartheta / W_0(\mathbf{x}) \geqslant C, \qquad (3.57)$$

где $W^*(\vartheta)$ — плотность наименее благоприятного распределения неизвестных параметров смеси сигнала и помехи (сигнала).

Наконец, если сигнал не содержит неизвестных параметров или распределение последних известно априори, (3.54) сводится к обычному правилу Неймана — Пирсона.

3.2.2. Методы отыскания наименее благоприятных распределений неизвестных параметров задачи

Общим методом отыскания наименее благоприятного распределения вероятности $P^*(\vartheta)$ для подобных минимаксных решающих правил (или пары распределений $P^*(\vartheta)$ и $P_0^*(\lambda)$ для минимаксных правил при условии ограниченной сверху вероятности ложной тревоги) является согласно (3.45) и (3.46) поиск минимума функции условной байесовской мощности или максимума функции байесовского риска на множестве всех возможных априорных распределений неизвестных параметров [103, 125, 140].

В общем случае такой поиск может быть реализован лишь приближенно численными итеративными методами с аппроксимацией непрерывных распределений вероятности дискретными и оценкой функции мощности соответствующих байесовских решающих правил методом статистических испытаний. В настоящее время этот метод вполне реализуем для Θ_0 и Θ_1, состоящих из конечного (не слишком большого)

числа точек, например в задачах многоальтернативного обнаружения для поиска наименее благоприятной совокупности априорных вероятностей альтернатив (см. п. 3.2.6). В этих случаях функция байесовского риска является унимодальной непрерывной вогнутой функцией и для поиска ее экстремума можно применять хорошо разработанные градиентные, квазиградиентные и другие методы. Следует отметить, что процедура приближенного отыскания наименее благоприятных распределений и соответственно синтеза приближенно минимаксных решающих правил может производиться заранее с использованием ЭВМ.

Среди задач обнаружения сигналов, в которых область Θ_1 не является дискретной, существует важный для практики класс задач, где наименее благоприятное распределение вероятности неизвестных параметров оказывается сосредоточенным в одной или нескольких точках. Эти точки нередко нетрудно предположительно определить исходя из физического смысла соответствующих параметров или в результате анализа характеристик обнаружения соответствующих байесовских решающих правил. В наиболее простых случаях, когда наименее благоприятное распределение сосредоточено в одной точке $\vartheta_1 \in \Theta_1$, последняя обязательно принадлежит области $\Theta_м \subset \Theta_1$, на которой огибающая вероятности правильного обнаружения $\beta_{ог}(\Theta)$ достигает минимального в Θ_1 значения, т. е.

$$\beta_{ог}(\vartheta_0) = \min_{\vartheta \in \Theta_1} \beta_{ог}(\vartheta) = \beta_{ог}(\vartheta \in \Theta_м). \tag{3.58}$$

Здесь $\beta_{ог}(\vartheta)$ есть вероятность правильного обнаружения байесовских решающих правил, оптимизированных для каждого $\vartheta \in \Theta_1$ при данном условии на вероятность ложной тревоги в Θ_0. Следовательно, если $\Theta_м$ состоит из одной точки $\vartheta_м$, то $\vartheta_0 = \vartheta_м$, причем $\vartheta_м$ находится непосредственным анализом огибающей.

В общем случае контроль правильности сделанных предположений и окончательное доказательство минимаксности полученных решающих правил может производиться по отмеченному ранее необходимому и достаточному признаку наименее благоприятных распределений вероятности (3.55), который можно переписать в виде

$$\beta(\vartheta, \psi^*)|_{\vartheta \in \Theta^*} \leqslant \beta(\vartheta, \psi^*)|_{\vartheta \in \Theta_1}. \tag{3.59}$$

Здесь ψ^* — предполагаемое минимаксное решающее правило и Θ^* — подпространство, принадлежащее Θ_1, в котором сосредоточено наименее благоприятное распределение вероятности неизвестных параметров задачи.

3.2.3. Методы синтеза минимаксных обнаружителей для инвариантных задач

Из теории инвариантности для задач проверки статистических гипотез [87] следует, что во многих случаях задачу отыскания максиминных (минимаксных) решающих правил можно упростить использованием свойств симметрии (инвариантности), присущих данной конкретной задаче обнаружения.

Если существует группа $\mathbf{G}$ преобразований g выборочного пространства $\mathbf{X}$, такая, что индуцированная группа $\overline{\mathbf{G}}$ преобразований $\overline{g}$ пространства параметров Θ оставляет инвариантной области Θ_0 и Θ_1, то задача обнаружения является инвариантной относительно группы $\mathbf{G}$ (либо тех неизвестных параметров задачи, значения которых могут быть переведены друг в друга преобразованиями группы $\mathbf{G}$). Другими словами, для инвариантной задачи применение любого преобразования группы $\mathbf{G}$ к входной выборке изменяет любое распределение семейства гипотезы или альтернативы таким образом, что результирующие распределения тоже принадлежат этим семействам. При этом следует иметь в виду, что преобразования $g \in \mathbf{G}$ входного выборочного пространства $\mathbf{X}$ и соответствующие им индуцированные в Θ преобразования $\overline{g} \in \overline{\mathbf{G}}$ параметрического пространства являются взаимно-однозначными отображениями указанных пространств на себя.

В наших обозначениях инвариантность задачи обнаружения относительно $\mathbf{G}$ может быть выражена соотношениями

$$W_1(g^{-1}\mathbf{x}|\vartheta)|g|^{-1} = W_1(\mathbf{x}|\overline{g}\vartheta), \quad \vartheta \in \Theta_1, \tag{3.60}$$

$$W_0(g^{-1}\mathbf{x}|\vartheta')|g|^{-1} = W_0(\mathbf{x}|\overline{g}\vartheta'), \quad \vartheta' \in \Theta_0, \tag{3.61}$$

или эквивалентными им соотношениями

$$W_1(g\mathbf{x}|\overline{g}\vartheta)|g| = W_1(\mathbf{x}|\vartheta), \quad \vartheta \in \Theta_1; \tag{3.62}$$

$$W_0(g\mathbf{x}|\overline{g}\vartheta')|g| = W_0(\mathbf{x}|\vartheta'), \quad \vartheta' \in \Theta_0. \tag{3.63}$$

Здесь $W_1(\mathbf{x}|\vartheta)$ и $W_0(\mathbf{x}|\vartheta')$, как и раньше,— условные плотности вероятности распределения случайного вектора $\mathbf{x}$, причем в левой части соотношений смысл этих функций не изменяется, изменяются лишь значения самого векторного аргумента и параметров; $|g|$ — якобиан преобразования, равный в случае группы $\mathbf{G}$ линейных преобразований в декартовом действительном пространстве модулю детерминанта (определителя) матрицы преобразования.

Согласно теореме Ханта-Стейна (см. [87] теорема 2 и лемма 2 гл.8) достаточным условием того, чтобы минимаксное правило при ограниченной вероятности ложной тревоги содержалось в классе инвариантных относительно $\mathbf{G}$ правил и, следовательно, совпадало с инвариантным минимаксным правилом, является существование асимптотически правоинвариантной последовательности распределений вероятностей ν_n на группе $\mathbf{G}$ (т. е. определенной на σ-поле $\mathcal{B}$ подмножеств B группы $\mathbf{G}$), таких, что для любых $g \in \mathbf{G}$; $B \in \mathcal{B}$.

$$\lim_{n\to\infty} |\nu_n(Bg) - \nu_n(B)| = 0. \tag{3.64}$$

В этом случае любой неинвариантный в общем случае рандомизированный критерий $\psi(\mathbf{x})$ может быть преобразован к инвариантному (почти инвариантному) суперпозицией вида

$$\psi_u(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} \int \psi(g\mathbf{x})\, d\nu_n(g) = \psi_u(g\mathbf{x}), \tag{3.65}$$

Наибольшая вероятность ложной тревоги и наименьшая вероятность правильного обнаружения β при таком преобразовании могут изменяться только так, что

$$\inf_{\vartheta\in\Theta_1}\beta(\vartheta,\psi_и)\geqslant\inf_{\vartheta\in\Theta_1}\beta(\vartheta,\psi);\ \sup_{\lambda\in\Lambda}\beta(\lambda,\psi_и)\leqslant\sup_{\lambda\in\Lambda}\alpha(\lambda,\psi). \qquad (3.66)$$

Следовательно, если бы существовало правило с большей минимальной β, чем у инвариантного минимаксного правила, то нашлось бы и инвариантное правило с этим свойством, что по определению невозможно.

Многие группы преобразований (масштаба и др.) удовлетворяют теореме Ханта — Стейна [87]. Утверждение теоремы Ханта — Стейна остается справедливым и для подобных минимаксных правил, так как преобразование (3.65) сохраняет свойство подобия.

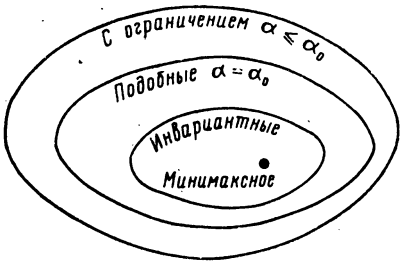


Рис. 3.2. Соотношение множеств решающих правил обнаружения сигналов

В случаях, когда инвариантность влечет подобие (α = const) и выполнены условия теоремы Ханта-Стейна, минимаксные правила ($\alpha\leqslant\alpha_0$) обязаны быть также подобными минимаксными (α = = const $=\alpha_0$) (рис. 3.2).

Нетрудно видеть, что инвариантность влечет подобие, когда любые две точки из Θ_0 эквивалентны относительно индуцированной группы преобразований $\overline{\mathbf{G}}$, т. е. когда единственной траекторией $\overline{\mathbf{G}}$ является вся область гипотез Θ_0 и инвариантные статистики не зависят от неизвестных параметров помехи. При этом говорят, что $\mathbf{G}$ транзитивна в Θ_0.

Таким образом, в этих случаях имеет место эквивалентность минимаксных правил при обоих видах ограничений на α. Соответственно такие задачи могут решаться любым из возможных методов для подобных минимаксных правил в виде (3.53), для минимаксных правил в виде (3.54) с использованием наименее благоприятных распределений, для инвариантных и, наконец, для инвариантных подобных минимаксных правил. Удобство отыскания инвариантных минимаксных правил связано, в частности, с тем, что любое инвариантное решающее правило обнаружения сигналов может основываться на так называемой максимальной инвариантной статистике, т. е. на некоторых функциях выборочных значений $\tau(\mathbf{x})$, не зависящих от тех неизвестных параметров задачи, по отношению к которым она инвариантна.

Подобная редукция сокращает число неизвестных параметров и обычно существенно облегчает отыскание инвариантных минимаксных правил. В частном случае максимальная инвариантная статистика может иметь полностью известное распределение как при наличии, так и при отсутствии полезного сигнала и тогда нетрудно найти наиболее мощное инвариантное правило. В других случаях для редуцированной задачи существует равномерно наиболее мощное правило, которое яв-

ляется, таким образом, равномерно наиболее мощным инвариантным правилом, эквивалентным минимаксному правилу для исходной задачи.

Наибольшего упрощения при отыскании минимаксных правил можно достичь, если отыскивать максимальные инвариантные статистики $\mathbf{Z}(\mathbf{x})$ в редуцированном выборочном пространстве достаточных статистик или, еще лучше, в пространстве минимальных достаточных статистик для исходной задачи. В этом случае имеет место двойное упрощение: и по числу неизвестных параметров, и по размерности результирующей статистики. В частности, в ряде задач (см. § 3.3, случай $\gamma = \gamma_0$) $\mathbf{Z}(\mathbf{x})$ сводится к единственной одномерной функции вектора входных данных $\mathbf{x}$.

Напомним, что функция $\tau(\mathbf{x})$ называется инвариантной относительно $\mathbf{G}$, если она постоянна на каждой траектории $\mathbf{G}$ в $\mathbf{X}$. Функция $\tau(\mathbf{x})$ называется максимальным инвариантом, если она постоянна на каждой траектории и на различных траекториях принимает различные значения [87]. Траекторией называется множество точек, которое пробегает некоторая точка $\mathbf{x}$, когда к ней применяются все преобразования g из $\mathbf{G}$. Обычно максимальные инварианты $\mathbf{Z}(\mathbf{x})$ удается легко находить, конструируя соответствующую статистику из достаточной статистики, опираясь непосредственно на упомянутые выше свойства. В случаях, когда группа $\mathbf{G}$ является произведением нескольких подгрупп, редукцию выборки к максимальному инварианту можно проводить по этапам последовательно для каждой из подгрупп $\mathbf{G}$ в отдельности [87]. Некоторые другие методы отыскания максимальных инвариантов рассмотрены в [65, 70]. Примеры синтеза минимаксных правил для инвариантных задач обнаружения методом максимальных инвариантных статистик содержатся в [82].

Рассмотренный выше метод синтеза минимаксных инвариантных решающих правил предусматривает отыскание максимального инварианта, вычисление плотности распределения максимального инварианта при гипотезе и альтернативе, зависящей от ϑ только через соответствующий максимальный инвариант $\bar{\tau}$ в пространстве параметров Θ, построение минимаксного решающего правила и упрощение его структуры. Однако существуют методы построения минимаксных правил, не требующие отыскания максимального инварианта в $\mathbf{X}$ и вычисления его распределения вероятности. Эти методы предполагают непосредственно вычисление отношения правдоподобия для максимального инварианта и применимы, по крайней мере, в случаях, когда $\mathbf{G}$ транзитивна в Θ_0. Так, метод, называемый в литературе по математической статистике методом Стейна [143, 147, 148], заключается в вычислении отношения правдоподобия максимального инварианта при фиксированных ϑ и τ с применением интегрирования на группе $\mathbf{G}$ по формуле

$$l(\tau) = \int_{\mathbf{G}} W_1^1(g\mathbf{x} \mid \vartheta_1)\, d\mu(g) \Big/ \int_{\mathbf{G}} W_1^1(g\mathbf{x} \mid \vartheta_0)\, d\mu(g), \qquad (3.67)$$

где $W_1^1(\mathbf{x}|\vartheta)$ — условная плотность входной выборки $\mathbf{x}$ по отношению к любой $\mathbf{G}$-инвариантной мере на $\mathbf{X}$; $g\,\mathbf{x}$ — результат воздействия опе-

ратором преобразования g на $\mathbf{X}$; $\vartheta_1 \in \Theta_1$ и $\vartheta_0 \in \Theta_0$ — произвольные фиксированные значения параметров задачи ϑ; $\mu(g)$ — левоинвариантная мера Хаара на группе $\mathbf{G}$.

Отметим, что при весьма слабых ограничениях, которым удовлетворяют все рассмотренные ниже задачи обнаружения, $l(\tau)$ одновременно является и отношением правдоподобия $l(\mathbf{Z})$ максимального инварианта $\mathbf{Z}$ в пространстве достаточной статистики задачи [77, 87].

Окончательно минимаксное решающее правило на основе $l(\tau) = l(\tau \mid \bar{\tau})$ может быть получено в виде

$$\int_{\Theta_{1\tau}} l(\tau \mid \bar{\tau})\, W^*(\bar{\tau})\, d\bar{\tau} \gtrless C, \tag{3.68}$$

где $W^*(\bar{\tau})$ — плотность наименее благоприятного распределения $\bar{\tau}$ в $\Theta_{1\tau}$, т. е. в области альтернатив.

Другой вариант формулы Стейна для вычисления $l(\tau)$, обоснованной, например, в [147], имеет вид

$$l(\tau) = \int_{\mathbf{G}} W(g\mathbf{x} \mid \vartheta_1)\, J(g)\, d\mu(g) \Big/ \int_{\mathbf{G}} W(g\mathbf{x} \mid \vartheta_0)\, J(g)\, d\mu(g). \tag{3.69}$$

Она отличается тем, что в ней используются обычные плотности распределения вероятности входной выборки $W(\mathbf{x} \mid \vartheta)$ относительно меры Лебега, а $J(g)$ — якобиан преобразования $\mathbf{x} \to g\mathbf{x}$ входной выборки с помощью $g \in \mathbf{G}$.

Наконец, третий вариант формулы вычисления $l(\tau)$ может быть получен из (3.69) использованием соотношения инвариантности для плотностей $W(g\mathbf{x} \mid \bar{g}\vartheta)\, J(g) = W(\mathbf{x} \mid \vartheta)$ и равенства $\mu(g) = \nu(g^{-1})$, где ν — правоинвариантная мера Хаара на $\mathbf{G}$, а именно

$$l(\tau) = \int_{\mathbf{G}} W(\mathbf{x} \mid \bar{g}\vartheta_1)\, d\nu(\bar{g}) \Big/ \int_{\mathbf{G}} W(\mathbf{x} \mid \bar{g}\vartheta_0)\, d\nu(g). \tag{3.70}$$

Обе последние формулы также пригодны для построения минимаксного решающего правила непосредственно по (3.68) в случае, когда $\mathbf{G}$ транзитивна в Θ_0. Распространение (3.69) и (3.70) на более общий случай нетранзитивной в Θ_0 группы $\mathbf{G}$ рассмотрен в [148].

Формулу (3.70) можно интерпретировать как отношение правдоподобия типа (3.54), соответствующее наименее благоприятным мерам, индуцируемым в подпространствах параметров Θ_0 и Θ_1 мерой ν. Действительно, пусть $\bar{g} = f(g)$, где f — непрерывное отображение $\mathbf{G}$ на $\mathbf{G}$. В каждом случае, когда f — изоморфное отображение вида $f(g) = \bar{g}$ и $\nu(g)$ — индуцирует в $\bar{\mathbf{G}}$ меру $\bar{\nu}$ так, что $d\bar{\nu}(\bar{g}) = d\nu(g)$, вместо (3.70) получим

$$l(\tau) = \int_{\bar{\mathbf{G}}} W(\mathbf{x} \mid \bar{g}\vartheta_1)\, d\bar{\nu}(\bar{g}) \Big/ \int_{\bar{\mathbf{G}}} W(\mathbf{x} \mid \bar{g}\vartheta_0)\, d\bar{\nu}(\bar{g}), \tag{3.71}$$

где $\bar{g}$ при фиксированных ϑ_1 и ϑ_0 играет роль новых неизвестных параметров помехи, а $\bar{\nu}(\bar{g})$ — наименее благоприятная мера в новом пространстве параметров помехи $\bar{\mathbf{G}}$.

Таким образом, минимаксные решающие правила для инвариантных задач могут быть получены и на основе общего вида минимаксных правил (3.53) и (3.54). Во многих задачах при этом роль наименее благоприятных распределений играют бесконечные инвариантные меры, которые с точностью до константы можно рассматривать как пределы некоторых последовательностей распределений вероятностей на Θ_0 и и Θ_1 [87, 106].

3.2.4. Синтез локально минимаксных решающих правил

По аналогии с решающими правилами (3.54) согласно обобщенной фундаментальной лемме Неймана — Пирсона [87] решающее правило по критерию (3.18) максимина производной функции мощности при $\gamma = 0$ и классе Ψ правил с $\alpha \leqslant \alpha_0$ может быть записано в виде

$$\int_{\Pi} \frac{\partial}{\partial \gamma} W_1(\mathbf{x} \mid \gamma, \pi)|_{\gamma=0} W_1^*(\pi)\, d\pi \Big/ \int_{\Lambda} W_0(\mathbf{x} \mid \lambda)\, W_0^*(\lambda)\, d\lambda \gtrless C, \quad (3.72)$$

где $W_1^*(\pi)$ и $W_0^*(\lambda)$ — плотности наименее благоприятных априорных распределений вероятности мешающих параметров при альтернативе и гипотезе. Здесь предполагается, что $W_1(\mathbf{x}|\gamma, \pi)$ и $W_1^*(\pi)$ позволяют дифференцирование по параметру под знаком интеграла и функция $(d/d\gamma) \int W_1(\mathbf{x}|\gamma, \pi)\, dW_1^*(\pi) d\pi|_{\gamma=0}$ интегрируема относительно Лебеговой меры на евклидовом пространстве.

Соответствующий локальный аналог существует и для подобных минимаксных и других рассмотренных видов минимаксных решающих правил. Так, если задача инвариантна относительно транзитивной в Θ_0 группы $\mathbf{G}$ и γ — скалярный максимальный инвариант в Θ_1, то соответствующим локальным аналогом минимаксного правила (3.68) является правило с критической областью.

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} l(\mathbf{Z} \mid \gamma)|_{\gamma=0} \gtrless C, \quad (3.73)$$

где $l(\mathbf{Z}|\gamma)$ — отношение правдоподобия максимального $\mathbf{G}$-инварианта в пространстве достаточной статистики задачи.

Действительно, будучи единственным решающим правилом фиксированного уровня α, максимизирующим $(d/d\gamma)\, \beta(\gamma, \psi)|_{\gamma=0}$, с учетом соответствующего аналога теоремы Ханта-Стейна [122] это решающее правило является локально наиболее мощным и локально максиминным по критериям оптимальности (3.20) и (3.21). Заметим, что необходимое для применения теоремы Ханта — Стейна существование локально минимаксного правила в классе рандомизованных правил при очень слабых условиях гарантируется соответствующим аналогом теоремы существования минимаксного решающего правила ([87], гл. 6, задачи 1 и 2). При необходимости первые производные по γ могут быть заменены ненулевыми производными наименьшего порядка либо производными по $\rho = \gamma^{1/r}$ (см. п. 3.1.4).

Из (3.73) видно, что локально минимаксные решающие правила легко могут быть найдены по известным статистикам минимаксных решающих правил для $\Theta_1 = \{\vartheta : \gamma \geqslant \gamma_0\}$. В более трудных случаях, когда минимаксное правило в замкнутом виде получить не удается, локально минимаксное правило все же может быть получено по (3.72) либо по соответствующим аналогам формул (3.47), (3.52) и (3.53).

3.2.5. Синтез минимаксных решающих правил по относительным критериям оптимальности

Методы синтеза оптимальных решающих правил по относительным минимаксным критериям типа (3.22), (3.23) в основном аналогичны рассмотренным выше методам синтеза минимаксных правил. Так, из теории строгих критериев [87, 139]) следует, что относительные минимаксные правила существуют и с учетом выбранных ограничений на множество рассматриваемых правил по уровню ложных тревог могут отыскиваться в соответствующем классе байесовских правил, будучи эквивалентными байесовским правилам относительно наименее благоприятных распределений неизвестных параметров задачи [125]. Однако наименее благоприятные распределения в этом случае, вообще говоря, будут отличаться от таковых для обычных минимаксных решающих правил, что влечет за собой отличие и самих правил.

Необходимые и достаточные условия наименьшей благоприятности распределений аналогичны по формулировке рассмотренным выше условиям (3.55) (см. теорему 2.1 в [87]), но относятся не непосредственно к условному среднему риску или к вероятности правильного обнаружения, а к соответствующим относительным условным характеристикам качества решающих правил для различных неизвестных параметров ϑ. Так, для критерия оптимальности (3.22) наименее благоприятные распределения вероятностей $P_1^*(\vartheta)$ и $P_0^*(\lambda)$ должны быть сосредоточены в областях Θ_1^* и Λ^*, где относительная вероятность правильного обнаружения $\beta_{or}(\vartheta) = \beta(\vartheta, \psi^*)$ и вероятность ложной тревоги $\alpha(\lambda)$ для соответствующего байесовского правила ψ^* постоянны и достигают своих нижней и верхней грани. Аналогичная ситуация имеет место и для критериев минимакса энергетических потерь, где роль $\beta_{or}(\vartheta) = \beta(\vartheta, \psi^*)$ играет $\lg \gamma_0(\pi, \beta_0, \psi) = \lg \gamma_0^*(\pi, \beta_0)$.

Для инвариантных задач, удовлетворяющих условиям обобщенной теоремы Ханта-Стейна [139, 146], относительные минимаксные правила могут также отыскиваться среди инвариантных рассмотренными выше методами.

В инвариантных задачах обнаружения с $\vartheta = (\gamma, \pi)$, в которых $\mathbf{G}$ транзитивна в Θ_γ, условная минимаксная вероятность правильного обнаружения $\beta^*(\pi)$ и функции $\gamma_0^*(\pi)$ не зависят от π. Следовательно, в этом случае минимаксные правила по относительным критериям (3.23) и (3.27) эквивалентны соответствующим вариантам минимаксного правила (3.68). Однако в этих же условиях не обязательно стирается различие между относительным критерием оптимальности по отношению к $\beta_{or}^{(2)}(\vartheta) = \beta^*(\gamma)$ (3.25) и относительным критерием (3.22), так как, хотя $\beta_{or}(\vartheta)$, также не зависит от π, разность $\beta_{or}(\vartheta) - \beta^*(\gamma)$ не

обязана быть постоянной. В тех же случаях, когда условное минимаксное правило относительно Θ_γ не зависит от γ, оно при любых γ достигает $\beta^*(\gamma)$ (3.25) и тем самым удовлетворяет относительному критерию (3.22) с $\beta_{\text{ог}}(\vartheta)$, замененной на $\beta_{\text{ог}}^{(2)}(\vartheta) = \beta^*(\gamma)$. Конечно, в задачах, где минимаксное решающее правило не зависит от Θ_1 и является равномерно наиболее мощным правилом уровня α, оно удовлетворяет также и всем рассмотренным здесь относительным минимаксным критериям.

Из изложенного в этом параграфе можно заключить, что минимаксные решающие правила для двоичного обнаружения сигналов на фоне помех с неизвестными параметрами, отвечающие рассмотренным выше относительным критериям, также имеют общее представление вида (3.53)

$$l(\mathbf{x}) \geqslant C(\mathbf{t}), \tag{3.74}$$

где $l(\mathbf{x})$ — коэффициент правдоподобия для некоторого вспомогательного наименее благоприятного распределения вероятности неизвестных параметров смеси сигнала и помехи и произвольного распределения вероятности параметров помехи, а $C(\mathbf{t})$ — пороговый уровень, зависящий от реализации в общем случае векторной достаточной статистики $\mathbf{t}$ для семейства распределения вероятности помехи. Соответствующая обобщенная структурная схема минимаксного обнаружителя [119] приведена ранее на рис. 3.1.

3.2.6. Синтез минимаксных решающих правил для многоальтернативного обнаружения сигналов

Как мы видели, рассмотренные в § 3.1 критерии оптимизации многоальтернативного обнаружения (обнаружения-различения) сигналов сводятся к минимаксному критерию теории статистических решений с соответствующим образом подобранными функциями потерь, ограничением на вероятность ложной тревоги и неизвестные параметры задачи. Поэтому, как и в предыдущем одноальтернативном случае, применение к рассматриваемой задаче результатов [106] с учетом дополнительных условий (3.34) или (3.35) приводит к утверждению, что:

1. Оптимальные минимаксные (максиминные) многоальтернативные решающие правила, отвечающие критериям (3.33) и (3.36), существуют.

2. Если при заданных областях Θ_l, объеме выборки и виде ограничения на вероятность ложной тревоги существует наименее благоприятная совокупность $P_l^*(\vartheta_l)$, $\vartheta_l \in \Theta_l^*$, и P_l^*, $l = \overline{1, L}$, априорных распределений вероятности $P_l(\vartheta_l)$ неизвестных параметров ϑ_l и априорных вероятностей P_l появления различных видов сигнала, то минимаксное решающее правило ψ^* многоальтернативного обнаружения является в общем случае рандомизированным байесовским правилом в классе Ψ относительно этой совокупности.

Байесовским решающим правилом здесь, как обычно, называется решающее правило, минимизирующее средний риск. Однако вследствие общего ограничения $\psi \in \Psi$ на вероятность ложной тревоги рассматриваемое здесь байесовское правило минимизирует средний риск вида

$$R(\psi) = \sum_{l=1}^{L} P_l \int_{\Theta_l} R_l(\hat{\vartheta}_l, \psi)\, W_l(\vartheta_l)\, d\vartheta_l, \quad \psi \in \Psi, \tag{3.75}$$

где $R_l(\hat{\vartheta}_l, \psi)$ — условный средний риск. При одинаковых потерях $r_l = r$ это правило максимизирует среднюю вероятность правильного обнаружения

$$\beta = \sum_{l=1}^{L} P_l \int_{\Theta_l} \beta_l(\hat{\vartheta}_l, \psi)\, W_l(\vartheta_l)\, d\vartheta_l, \quad \psi \in \Psi. \tag{3.76}$$

Таким образом, задача отыскания минимаксного решающего правила может сводиться к отысканию наименее благоприятной совокупности распределений вероятности P_l^* и $W_l^*(\vartheta_l)$ и к выбору среди байесовских правил относительно такой совокупности правила, удовлетворяющего критерию минимакса.

В общем случае некомпактных (неограниченных) Θ_0 и Θ_l, как и при $L = 1$, такие совокупности распределений вероятности могут не существовать, и тогда они заменяются наименее благоприятными последовательностями распределений вероятности неизвестных параметров задачи, а минимаксное решающее правило отыскивается среди байесовских в широком смысле правил относительно этих последовательностей. В частности, такая ситуация имеет место для некоторых инвариантных задач, когда роль наименее благоприятных последовательностей распределений вероятности могут выполнять соответствующие инвариантные меры.

В рассатриваемых в § 3.3 задачах обнаружения — различения минимаксные правила являются детерминированными и рандомизация не требуется.

При фиксированной вероятности ложной тревоги (3.34) решение задачи синтеза байесовских правил, как и при $L = 1$, может основываться на теории подобных тестов (критериев) для проверки сложных статистических гипотез [121]. В случае, когда семейство плотностей $W(\mathbf{t}|\lambda)$ совместных распределений достаточной статистики $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x})$ для семейства плотностей распределений входной выборки в отсутствие полезного сигнала $W_0(\mathbf{x}) = W_0(\mathbf{x}|\lambda)$ является полным или ограниченно полным, при известных P_l^* и $W_l^*(\vartheta_l)$ задача для каждого данного $\mathbf{t}$ сводится к многоальтернативному обнаружению сигналов при простой гипотезе и простых альтернативах с известными априорными вероятностями альтернатив, оптимальному в смысле максимума средней вероятности правильного обнаружения-различения β_t при заданном α_0.

Решение этой задачи (см. например, теорему 5.1 из [106]) без учета рандомизации имеет вид

$$\mathbf{X}_l = \left\{ \mathbf{x} : \begin{matrix} W_l(\mathbf{x})/W_0(\mathbf{x}) \geqslant C(\mathbf{t})/P_l, \\ W_l(\mathbf{x})/W_k(\mathbf{x}) > P_k/P_l, \end{matrix} \quad k \neq l \right\}, \tag{3.77}$$

где $\mathbf{X}_l$ — область решения о присутствии l-го сигнала, а пороговый коэффициент $C(\mathbf{t})$ выбирается в соответствии с заданной условной вероятностью ложной тревоги $\alpha_t = \alpha_0$.

Заменяя в (3.77) $C(\mathbf{t})$ на $f(\mathbf{t})$ и следуя выкладкам, аналогичным случаю $L = 1$ (см. п. 3.2.1), находим, что l-я критическая область $\mathbf{X}_l$ искомого подобного минимаксного решающего правила без учета рандомизации определяется соотношениями

$$\frac{\int\limits_{\Theta_l} W_l(\mathbf{x} \mid \vartheta_l)\, W_l^*(\vartheta_l)\, d\vartheta_l}{W_0(\mathbf{x} \mid \lambda)} \geqslant C_l f(\mathbf{t});$$

$$\frac{\int\limits_{\Theta_l} W_l(\mathbf{x} \mid \vartheta_l)\, W_l^*(\vartheta_l)\, d\vartheta_l}{\int\limits_{\Theta_k} W_k(\mathbf{x} \mid \vartheta_k)\, W_k^*(\vartheta_k)\, d\vartheta_k} > \frac{C_l}{C_k}, \quad k \neq l, \tag{3.78}$$

где $W_l^*(\vartheta_l)$, $l = \overline{1, L}$, — наименее благоприятная совокупность плотностей распределения вероятностей параметров ϑ_l, а $C_l = 1/P_l^*$ и $f(\mathbf{t})$ определяются из условий

$$\inf_{\vartheta_l \in \Theta_l} \beta_l(\vartheta_l, \psi^*) = \inf_{\vartheta_1 \in \Theta_1} \beta_1(\vartheta_1, \psi^*), \quad l = \overline{2, L};$$

$$\alpha_t = \sum_{l=1}^{L} \alpha_{tl} = \alpha_0. \tag{3.79}$$

Для отыскания $P_l^*(\vartheta_l)$ или $W_l^*(\vartheta_l)$ могут быть использованы следующие необходимые и достаточные условия, являющиеся следствием теоремы 3.10 [106]:

$$\beta_l(\vartheta_l, \psi^*) = \text{const} = \beta^* \quad \text{для} \quad \vartheta_l \in \Theta_l^* \text{ с } \Theta_l; \tag{3.80}$$

$$\beta_l(\vartheta_l, \psi^*) \geqslant \beta^* \text{ для всех } \vartheta_l \in \Theta_l,$$

где $\Theta_l^* = \{\vartheta_l : W_l^*(\vartheta_l) \neq 0\}$. Как и при $L = 1$, подобное минимаксное правило может быть представлено в других эквивалентных видах, аналогичных (3.52) и (3.53).

При ограничении вероятности ложной тревоги сверху ($\alpha \leqslant \alpha_0$) байесовское в соответствующем классе Ψ правило при заданных Θ_l, $W_l^*(\vartheta_l)$ и P_l^*, а следовательно, и искомые критические области $\mathbf{X}_l$ минимаксного правила без учета рандомизации определяются соотношениями [121]

$$\frac{\int\limits_{\Theta_l} W_l(\mathbf{x} \mid \vartheta_l)\, W_l^*(\vartheta_l)\, d\vartheta_l}{\int\limits_{\Lambda} W_0(\mathbf{x} \mid \lambda)\, W_0^*(\lambda)\, d\lambda} \geqslant C_l;$$

$$\frac{\int\limits_{\Theta_l} W_l(\mathbf{x} \mid \vartheta_l)\, W_l^*(\vartheta_l)\, d\vartheta_l}{\int\limits_{\Theta_k} W_k(\mathbf{x} \mid \vartheta_k)\, W_k^*(\vartheta_k)\, d\vartheta_k} > \frac{C_l}{C_k}, \quad k \neq l, \tag{3.81}$$

где $W_l^*(\vartheta_l)$ и $W_0^*(\lambda)$ — совокупности плотностей наименее благоприятных распределений ϑ_l и λ, а $C_l = C/P_l^*$ однозначно определяются из условий

$$\inf_{\vartheta_l \in \Theta_l} \beta_l(\vartheta_l \mid \psi^*) = \inf_{\vartheta_1 \in \Theta_1} \beta_1(\vartheta_1, \psi^*), \quad l = \overline{2, L}; \tag{3.82}$$

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \alpha(\lambda) = \sup_{\lambda \in \Lambda} \sum_{l=1}^{L} \alpha_l(\lambda) = \alpha_0.$$

Для отыскания $W_l^*(\vartheta_l)$ и $W_0^*(\lambda)$ можно воспользоваться условиями (3.36) совместно с условиями

$$\alpha(\lambda) = \text{const} = \alpha_0 \text{ при } \lambda \in \Lambda_0^* \subset \Lambda_0; \quad \alpha(\lambda) \leqslant \alpha_0 \text{ для всех } \lambda \in \Lambda_0, \tag{3.83}$$

где $\Lambda_0^* = \{\lambda : W_0^*(\lambda) > 0\}$.

Смысл этих необходимых и достаточных условий состоит в том, что наименее благоприятные распределения должны быть сосредоточены в области, где $\alpha(\lambda)$ и $\beta_l(\vartheta_l, \psi^*)$ постоянные и достигают соответственно максимального и минимального значений, равных α_0 и β^* (либо имеют их своими пределами).

В случаях, когда вероятности одного или нескольких одновременных равенств в первых соотношениях решающих правил (3.78) и (3.81) отличны от нуля, решение об обнаружении и выбор альтернативы должны проводиться случайно (рандомизированно) в соответствии с распределениями вероятностей, определяемыми совместно с пороговыми константами C_l из тех же условий (3.79) и (3.82).

Как и при двоичном обнаружении, если минимаксное правило (3.81) фактически подобно, оно является и минимаксным среди подобных, т.е. эквивалентно правилу (3.78).

Задача многоальтернативного обнаружения называется **G** - инвариантной, если относительно преобразований $g \in \mathbf{G}$ выборочного пространства инвариантны все плотности $W_l(\mathbf{x}|\vartheta_l)$ и $W_0(\mathbf{x}|\lambda)$, а области Θ_l и Θ_0 инвариантны относительно соответствующей индуцированной группы $\overline{\mathbf{G}}$ преобразований $\bar{g}$ параметрического пространства. В этих условиях естественно ожидать, что наименее благоприятные распределения будут инвариантными относительно $\overline{\mathbf{G}}$, а искомое минимаксное правило — инвариантным относительно **G**. Действительно, и в этом случае справедлива теорема, подобная теореме Ханта-Стейна (см. п. 3.2.3), устанавливающая аналогичные достаточные условия для группы **G**, при которых многоальтернативное минимаксное правило (как при $\alpha = \text{const}$, так и при $\alpha_0^* \leqslant \alpha_0$) принадлежит к почти инвариантным правилам. Для отыскания же минимаксных правил в классе **G**-инвариантных можно воспользоваться теми же методами, что и в п.3.2.3, с использованием максимальных инвариантных статистик как для входной выборки, так и в пространстве минимальных достаточных статистик для семейства плотностей $W_l(\mathbf{x}|\vartheta_l)$ и $W_0(\mathbf{x}|\lambda)$ данной задачи.

В случаях, когда задача многоальтернативного обнаружения симметрична относительно альтернатив, для нее $W_l^*(\vartheta_l)$, C_l, α_l и $\beta(\vartheta_l)$ ока-

зываются одинаковыми. Задача обнаружения-различения называется симметричной относительно альтернатив, если существует конечная группа $\mathbf{G}$ изометрических преобразований выборочного пространства, относительно которой задача инвариантна с точностью до перестановки номеров альтернатив и в которой для каждой пары индексов (l,k), $l,\ k > 0,\ k \neq l$, найдется такое преобразование $g = g_{kl} \in \mathbf{G}$, что при любых $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ и $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_l \in \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_k$

$$W_l(g_{kl}\mathbf{x}|\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_l) = W_k(\mathbf{x}|\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_k). \tag{3.84}$$

При этом области решения $\mathbf{X}_l$ оказываются симметричными относительно альтернатив $\psi_l(g_{kl}\mathbf{x}) = \psi_k(\mathbf{x})$, и при $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_l = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_k$ справедливы равенства $\alpha_l = \alpha_k$ и $\beta_l(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_l) = \beta_k(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_k)$. Рассматриваемая симметрия яв-

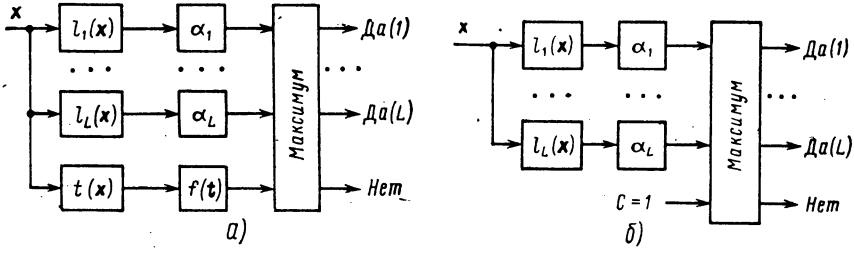


Рис. 3.3. Структурная схема минимаксного многоальтернативного обнаружителя сигналов при фиксированной (*а*) и ограниченной (*б*) вероятности ложной тревоги

ляется частным случаем общего принципа инвариантности статистической процедуры [87], применимого и к задачам со многими решениями. Специфика инвариантности с точностью до номеров альтернатив соответствует известному термину эквивариантности [77], применяемому в статистической теории оценок параметров.

Локально минимаксные $\gamma_{0l} \to 0$ и асимптотически минимаксные $\gamma_{0l} \to \infty$ решающие правила многоальтернативного обнаружения могут строиться теми же способами, что и при $L = 1$.

Структурные схемы рассмотренных оптимальных обнаружителей-различителей сигналов непосредственно определяются соответствующими решающими правилами. Один из возможных эквивалентных вариантов структурной схемы подобного минимаксного правила (3.78) с фиксированной вероятностью ложной тревоги представлен на рис. 3.3, *а*, где $d_l = 1/C_l = P_l^*$. Структурная схема минимаксного правила (3.81) при ограниченной сверху вероятности ложной тревоги приведена на рис. 3.3, *б*. В частном случае, когда парциальные области решения, определяемые верхними неравенствами в правилах (3.78) и (3.81) взаимно не пересекаются, необходимость в проверке нижних неравенств отпадает. При групповом обнаружении с определением номеров присутствующих сигналов каждый канал приведенных структурных схем соответствует определенному числу и сочетанию различных видов сигналов.

3.3. Обнаружение случайного гауссовского сигнала на фоне гауссовского шума с неизвестной интенсивностью

3.3.1. Постановка задачи

В этом параграфе рассматриваются задачи обнаружения видео- и высокочастотных (ВЧ) случайных гауссовских сигналов на фоне в общем случае нестационарных и коррелированных гауссовских шумов с неизвестной интенсивностью.

Пусть подлежащий обнаружению видеосигнал $\mathbf{s}$ представляет собой дискретную выборку, состоящую из n случайных выборочных значений, распределенных по нормальному закону с нулевым средним, т. е. $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)^+$, $M[s_i] = 0$, $i = \overline{1, n}$. Предположим, что корреляционная матрица сигнала

$$\mathbf{B}_c = M[\mathbf{s}\mathbf{s}^+] = ||B_{cij}||, \quad B_{cij} = M[s_i s_j],$$

известна с точностью до некоторого неизвестного энергетического множителя ν, называемого в дальнейшем интенсивностью сигнала, т. е.

$$\mathbf{B}_c = \nu \mathbf{B}_{0c}, \ \mathrm{tr}\, \mathbf{B}_{0c} = 1, \ \nu = M[\mathbf{s}^+ \mathbf{s}] = \mathrm{tr}\, \mathbf{B}_c, \tag{3.85}$$

где $\mathbf{B}_{0c}$ — полностью известная нормированная по энергии корреляционная матрица сигнала.

Пусть далее сигнал принимается на фоне аддитивного шума $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_n)^+$, $M[n_i] = 0$, $i = \overline{1, n}$. Корреляционную матрицу шума

$$\mathbf{B} = M[\mathbf{n}\mathbf{n}^+] = ||B_{ij}||, \ B_{ij} = M[n_i n_j]$$

так же будем считать известной лишь с точностью до множителя интенсивности ε, т. е.

$$\mathbf{B} = \varepsilon \mathbf{B}_0, \ \mathrm{tr}\, \mathbf{B}_0 = 1, \ \varepsilon = M[\mathbf{n}^+ \mathbf{n}] = \mathrm{tr}\, \mathbf{B}, \tag{3.86}$$

где $\mathbf{B}_0$ — полностью известная нормированная корреляционная матрица помехи, а ε — неизвестный параметр, определяющий интенсивность (среднюю энергию) шума.

Как и ранее, задача состоит в отыскании решающего правила над выборочными значениями аддитивной смеси сигнала и шума $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^+$, где $x_i = s_i + n_i$ при наличии сигнала и $x_i = n_i$ при его отсутствии, обеспечивающего гарантированное значение вероятности правильного обнаружения $\beta \geqslant \beta_0$ при минимальном пороговом значении γ_0 отношения интенсивностей сигнала и шума $\gamma = \nu/\varepsilon$, а также при всех $\gamma \geqslant \gamma_0$. При этом имеются в виду оба вида ограничений на вероятность ложной тревоги: $\alpha = \alpha_0$ и $\alpha \leqslant \alpha_0$.

Области гипотез Θ_0 и альтернатив Θ_1 для соответствующего максиминного критерия оптимизации определяются соотношениями $\gamma = 0$ и $\gamma \geqslant \gamma_0$. Область Θ_1 соответствует виду (3.7) $\beta_{0r}(\nu, \varepsilon) > \beta_0$, так как при различных фиксированных ν и ε вероятность правильного обнаружения соответствующих решающих правил Неймана—Пирсона вида $\mathbf{x}^+ \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}^+ (\gamma \mathbf{B}_{0c} + \mathbf{B}_0)^{-1} \mathbf{x} \leqslant C$ [31] зависит от ν и ε только через γ.

Задача обнаружения относительно узкополосных случайных гауссовских высокочастотных сигналов формулируется аналогично. При этом сигнал s представлен совокупностью n случайных комплексных выборочных значений s_i, $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)^+$, $M[s_i] = 0$, $i = \overline{1,n}$, с эрмитовой корреляционной матрицей

$$\mathbf{B}_c = M[\mathbf{ss}^*] = ||B_{cij}||, \quad B_{cij} = \mathbf{M}[s_i s_j^*],$$

причем

$$\mathbf{B}_c = \nu \mathbf{B}_{0c}, \quad \mathrm{tr}\ \mathbf{B}_{0c} = 1, \quad \nu = \mathbf{M}[\mathbf{s}^*\mathbf{s}] = \mathrm{tr}\ \mathbf{B}_c, \tag{3.87}$$

где $\mathbf{B}_{0c}$ — полностью известная нормированная корреляционная эрмитова матрица сигнала.

Эрмитова корреляционная матрица шума в этом случае аналогично (3.86) описывается соотношениями

$$\mathbf{B} = M[\mathbf{nn}^*] = \varepsilon \mathbf{B}_0; \ \mathrm{tr}\ \mathbf{B}_0 = 1; \ \varepsilon = M[\mathbf{n}^*\mathbf{n}] = \mathrm{tr}\ \mathbf{B}.$$

3.3.2. Случайный гауссовский видеосигнал с неизвестной интенсивностью

В рассматриваемом случае условные плотности распределения вероятностей входной выборки при отсутствии и наличии сигнала имеют вид

$$W_1(\mathbf{x}|\gamma, \varepsilon) = (2\pi\varepsilon)^{-n/2} |\gamma \mathbf{B}_{0c} + \mathbf{B}_0|^{-1/2} \exp\left[-0{,}5\ \varepsilon^{-1} \times \right.$$

$$\left. \times \mathbf{x}^+ (\gamma \mathbf{B}_{0c} + \mathbf{B}_0)^{-1} \mathbf{x}\right]; \tag{3.88}$$

$$W_0(\mathbf{x} \mid \varepsilon) = (2\pi\varepsilon)^{-n/2} |\mathbf{B}_0|^{-1/2} \exp\left(-0{,}5\ \varepsilon^{-1}\, \mathbf{x}^+ \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x}\right). \tag{3.89}$$

Как видно из (3.88), (3.89) и (3.60) — (3.63) задача обнаружения инвариантна относительно группы $\mathbf{G}$ преобразований $g \in \mathbf{G}$ масштаба выборочного пространства вида $\mathbf{x} \to g\mathbf{x} = \rho\mathbf{x}$, $\rho > 0$, где $g = \rho \mathbf{I}_n$ — матрица преобразования масштаба в $\mathbf{X}$. Таким образом, согласно теореме и лемме Ханта — Стейна искомое минимаксное решающее правило ψ^* при условии ограничения α сверху находится среди $\mathbf{G}$-инвариантных правил и совпадает с минимаксным инвариантным правилом. Так как $\mathbf{G}$ транзитивна в Θ_0, искомое правило является одновременно и минимаксным среди подобных правил, т. е. минимаксным правилом при условии фиксированной вероятности ложной тревоги.

Для отыскания инвариантного минимаксного правила предположим, что наименее благоприятное распределение вероятности параметра γ сосредоточено в точке $\gamma = \gamma_0$, и найдем наиболее мощное решающее правило уровня α_0 относительно наименее благоприятной априорной меры с элементом $d\varepsilon/\varepsilon$, к которой с точностью до масштаба стремится наименее благоприятная последовательность априорных вероятных мер.

Применяя формулу

$$\int_0^\infty \varepsilon^{-m} \exp\left(-\varepsilon^{-1} Q\right) d\varepsilon/\varepsilon = \Gamma(m) Q^{-m} \quad \text{при } m = n/2,$$

находим, что отношение правдоподобия максимального инварианта при $\gamma = \gamma_0$ равно в соответствии с (3.71)

$$l = \frac{\int W_1(\mathbf{x} \mid \gamma_0, \varepsilon)\, d\varepsilon/\varepsilon}{\int W_0(\mathbf{x} \mid \varepsilon)\, d\varepsilon/\varepsilon} = \frac{|\mathbf{B}_0|^{1/2}}{|\gamma_0 \mathbf{B}_{0c} + \mathbf{B}_0|^{1/2}} \left[\frac{\mathbf{x} + \mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T (\gamma_0 \mathbf{B}_{0c} + \mathbf{B}_0)^{-1} \mathbf{x}} \right]^{n/2}. \quad (3.90)$$

Следовательно, единственное наиболее мощное инвариантное правило обнаружения случайного видеосигнала при $\gamma = \gamma_0$ имеет вид

$$\mathbf{x}^+ \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x} \gtrless C \mathbf{x}^+ (\gamma_0 \mathbf{B}_{0c} + \mathbf{B}_0)^{-1} \mathbf{x}, \quad C > 1, \quad (3.91)$$

где пороговая константа C однозначно определяется заданным значением вероятности ложной тревоги.

В [117] показано, что вероятность правильного обнаружения этого правила монотонно возрастает с увеличением γ. Это, как и (3.58), подтверждает правильность предположения о характере наименее благоприятного распределения γ при альтернативе и окончательно доказывает минимаксность (3.91) в Θ_1 при обоих видах ограничения на вероятность ложной тревоги [82, 119].

Правило (3.91) было получено в [117] как подобное с наименьшим пороговым отношением γ_0, гарантирующим заданное β_0.

Для вычисления отношения правдоподобия максимального инварианта можно было бы воспользоваться также методом Стейна (см. § 3.2) или интегрированием плотности по элементарным G-инвариантным множествам.

Так по методу Стейна выбирается G-инвариантная мера в выборочном пространстве, например $(\mathbf{x}^+\mathbf{x})^{-n/2}\, d\mathbf{x}$, и плотности W_1' и W_0' относительно этой меры:

$$W_1'(\mathbf{x} \mid \gamma_0, \varepsilon) = W_1(\mathbf{x} \mid \gamma_0, \varepsilon)\, (\mathbf{x}^+\mathbf{x})^{n/2} \text{ и } W_0'(\mathbf{x} \mid \varepsilon) = W_0(\mathbf{x} \mid \varepsilon)\, (\mathbf{x}^+\mathbf{x})^{n/2}$$

при любом фиксированном $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$, например при $\varepsilon_0 = 1$, подставляются в формулу (3.67):

$$l(\tau) = \frac{\int_G W_1'(g\mathbf{x} \mid \vartheta)\, d\mu(g)}{\int_G W_0'(g\mathbf{x} \mid \vartheta)\, d\mu(g)} = \frac{\int W_1'(\rho\mathbf{x} \mid \gamma_0, 1)\, d\rho/\rho}{\int W_0'(\rho\mathbf{x} \mid 1)\, d\rho/\rho}. \quad (3.92)$$

Применяя формулу

$$\int_0^\infty \rho^{n-1} \exp(-\rho^2 t)\, d\rho = 0{,}5\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) t^{-n/2},$$

приходим к (3.90).

Интегрирование по G-инвариантным элементарным множествам — — центральным элементарным конусам — соответствует формуле типа (3.69)

$$l(\tau) = \int W_1(\rho\mathbf{x} \mid \gamma_0, \varepsilon)\rho^{n-1}\, d\rho / \int W_0(\rho\mathbf{x} \mid \varepsilon)\, \rho^{n-1}\, d\rho, \quad (3.93)$$

где $\rho^n = |g|$, $d\mu(g) = d\rho/\rho$ и, следовательно, $\rho^{n-1}\, d\rho = |g| d\mu(g)$. Здесь $g = \rho \mathbf{I}_n$ — матрица линейного преобразования подобия (гомотетии) выборочного пространства, а $|g| = |\det g|$.

Минимаксное решающее правило можно получить также и методом отыскания максимального инварианта в пространстве достаточной статистики (при $\gamma = \gamma_0$), которым является статистика $Z = \mathbf{x}^+\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{x}/[\mathbf{x}^+(\gamma_0\mathbf{B}_{0c} + \mathbf{B}_0)^{-1}\mathbf{x}]$. Несмотря на кажущуюся простоту этого метода, переход к решающему правилу $Z \geqslant C$ требует проверки монотонности отношения правдоподобия для Z, что в данном случае непросто.

Следует отметить также, что в этой задаче при неизвестных ε и γ и произвольных $\mathbf{B}_c$ и $\mathbf{B}$ решающее правило максимального правдоподобия не удается найти в явном виде [105]. Однако можно применить принцип условного максимального правдоподобия при фиксированном $\gamma = \gamma_0$, который приводит также к правилу обнаружения (3.91). Решающим правилом максимального правдоподобия для проверки сложной гипотезы $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$ против сложной альтернативы $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$ здесь понимается правило [87]

$$\sup_{\vartheta \in \Theta_1} W(\mathbf{x} \mid \vartheta) / \sup_{\vartheta \in \Theta_0} W(\mathbf{x} \mid \vartheta) \geqslant C, \tag{3.94}$$

где C определяется заданным ограничением на вероятность ложной тревоги $\alpha \leqslant \alpha_0$.

Совпадение минимаксного правила и правила отношения правдоподобия при фиксированном $\gamma = \gamma_0$ не случайно. Такая эквивалентность имеет место, по меньшей мере, во всех задачах обнаружения, связанных с гауссовским распределением вероятности, инвариантных относительно группы $\mathbf{G}$ преобразований сдвига и (или) масштаба, если соответствующая индуцированная в Θ группа транзитивна в пространствах Θ_0 и Θ_1. Для таких задач имеет место соотношение

$$\int_{\Theta_i} W(\mathbf{x} \mid \vartheta)\, W^*(\vartheta)\, d\vartheta = k \max_{\vartheta \in \Theta_i} W(\mathbf{x} \mid \vartheta), \quad i = 0, 1. \tag{3.95}$$

В частности, нетрудно проверить, что равенство (3.95) с $\vartheta = \varepsilon$ и $W^*(\vartheta) = \varepsilon^{-1}$ справедливо для плотности вида

$$W(\mathbf{x} \mid \vartheta) = k_1\, \varepsilon^{-m} \exp[-\varepsilon^{-1} Q(\mathbf{x})]$$

и, следовательно, для плотностей (3.88), (3.89), (3.117) и (3.119), инвариантных относительно преобразований масштаба $\mathbf{x} \to \rho\mathbf{x}$, $\rho \in [0, \infty)$.

В общем случае известно, что правило максимального правдоподобия обладает рядом положительных свойств, таких, например, как асимптотическая состоятельность и инвариантность по отношению ко всем группам преобразований, для которых инвариантна задача обнаружения сигнала [2,87].

В случаях, когда минимаксное (относительное минимаксное) правило не эквивалентно правилу максимального правдоподобия, все же последнее может быть практически достаточно близким к минимаксному. Известно [2], что при определенных условиях регулярности и до-

статочно больших объемах повторной выборки или соотношениях сигнал-шум имеет место приближенное (асимптотическое) равенство

$$\int_{\Theta} W(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta}) W(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \sim f(\hat{\boldsymbol{\theta}}) W(\mathbf{x} \mid \hat{\boldsymbol{\theta}}), \tag{3.96}$$

где $f(\boldsymbol{\theta})$ — весовая функция, включающая как сомножитель априорное распределение вероятностей $W(\boldsymbol{\theta})$, а $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ — оценка максимального правдоподобия для $\boldsymbol{\theta}$. В этих случаях правило

$$[f_1^*(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1) W_1(\mathbf{x} \mid \hat{\boldsymbol{\theta}}_1)]/[f_0(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) W_0(\mathbf{x} \mid \hat{\boldsymbol{\theta}}_0)] \geqslant C, \tag{3.97}$$

где $f_1^*(\boldsymbol{\theta})$ и $f_0^*(\boldsymbol{\theta})$ — наименее благоприятные весовые функции, соответствующие $W_1^*(\boldsymbol{\theta})$ и $W_0^*(\boldsymbol{\theta})$, обладает приближенно минимаксными (ε-минимаксными, асимптотически минимаксными) свойствами по соответствующему абсолютному или относительному критериям.

Минимаксное правило (3.91) можно было бы получить и методами отыскания минимаксного подобного решающего правила или правила, минимизирующего пороговое отношение сигнал-шум γ_0 при фиксированной вероятности ложной тревоги, как это сделано в [117].

Учитывая, что в рассматриваемой задаче модифицированная огибающая функции мощности $\beta_{\text{от}}^{(1)}(\boldsymbol{\theta})$ фиксирована на контурах $\gamma = \text{const}$, на которых мощность минимаксного правила (3.91) постоянна, это правило является также и наиболее строгим в модифицированном смысле (см. п. 3.1.5). Транзитивность $\mathbf{G}$ на Θ_1 приводит также к оптимальности (3.91) и по относительному энергетическому критерию (3.27).

Минимаксное правило, очевидно, может быть представлено в виде

$$\mathbf{x}^+ [\mathbf{B}_0^{-1} - (\gamma_0 \mathbf{B}_{0c} + \mathbf{B}_0)^{-1} \mathbf{x} \geqslant C_1 \mathbf{x}_1^+ \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x}, \tag{3.98}$$

где $C_1 = (C-1)/C > 0$, а также в эквивалентном виде с одной квадратичной формой

$$\mathbf{x}^+ [\mathbf{B}_0^{-1} - C(\gamma_0 \mathbf{B}_{0c} + \mathbf{B}_0)^{-1} \mathbf{x} \geqslant 0. \tag{3.99}$$

В отличие от (3.91), где каждая из двух квадратичных форм положительно определена, квадратичная форма в (3.99) при $C > 1$ не обладает таким свойством.

В случаях обнаружения слабых и сильных сигналов правило (3.98) допускает некоторое упрощение. Для слабых сигналов при $\gamma_0 \to 0$ справедливо матричное соотношение

$$(\gamma_0 \mathbf{B}_{0c} + \mathbf{B}_0)^{-1} = [\mathbf{B}_0 (\gamma_0 \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{B}_{0c} + I)]^{-1} = (I + \gamma_0 \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{B}_{0c})^{-1} \mathbf{B}_0 =$$
$$= (I - \gamma_0 \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{B}_{0c})^{-1} \mathbf{B}_0^{-1} + o(\gamma_0) = \mathbf{B}_0^{-1} - \gamma_0 \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{B}_{0c} \mathbf{B}_0^{-1} + o(\gamma_0), \tag{3.100}$$

с помощью которого (3.91) преобразуется к виду [117]

$$\mathbf{x}^+ \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{B}_{0c} \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x} \geqslant C \mathbf{x}^+ \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x}. \tag{3.101}$$

Решающее правило (3.101) является пределом последовательности минимаксных правил (3.91) при $\gamma_0 \to 0$ и, следовательно, локально минимаксным по критерию (3.21) и одновременно локально оптималь-

ным по критерию (3.18). Оно может быть получено также методом (3.72). Методом комбинирования достаточных статистик оно было получено в [144].

В случае обнаружения заведомо сильных сигналов при $\gamma_0 \to \infty$ в силу асимптотического представления

$$(\gamma_0 \mathbf{B} + \mathbf{B}_0)^{-1} \sim \gamma_0^{-1} \mathbf{B}_{0c}^{-1} + o(\gamma_0^{-1}), \qquad (3.102)$$

пределом последовательности правил (3.91) является правило [117]

$$\mathbf{x}^+ \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x} \gtrless C \mathbf{x}^+ \mathbf{B}_{0c}^{-1} \mathbf{x}. \qquad (3.103)$$

Оба предельных решающих правил, очевидно, не зависят от γ_0, т. е. обладают свойством равномерно-наибольшей мощности соответственно в областях малых и больших γ.

Как видно из (3.102) и (3.103), в условиях, когда матрица $\mathbf{B}_{0c}$ является особенной и не имеет обратной, правило (3.103) неприменимо. В этом случае матрица $\mathbf{B}_{0c}$ может быть представлена в виде $\mathbf{B}_{0c} = AA^+$, где A — $n \times r$-матрица ранга $r < n$, составленная из r векторов-столбцов, определяющих в $\mathbf{X}$ подпространство сигнала размерности r. С помощью матричного равенства [133]

$$(\mathbf{B}_0 + \gamma_0 AA^+)^{-1} = \mathbf{B}_0^{-1} - \mathbf{B}_0^{-1} A (A^+ \mathbf{B}_0^{-1} A + \gamma_0^{-1} I_r)^{-1} A^+ \mathbf{B}_0^{-1} \qquad (3.104)$$

находим, что

$$\lim_{\gamma \to \infty} (\mathbf{B}_0 + \gamma \mathbf{B}_{0c})^{-1} = \mathbf{B}_0^{-1} - \mathbf{B}_0^{-1} A (A^+ \mathbf{B}_0^{-1} A)^{-1} A^+ \mathbf{B}_0^{-1}, \qquad (3.105)$$

и, следовательно, асимптотическая ($\gamma \to \infty$) форма минимаксного правила (3.98) может быть представлена в виде

$$\mathbf{x}^+ \mathbf{B}_0^{-1} A (A^+ \mathbf{B}_0^{-1} A)^{-1} A^+ \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x} \gtrless C \mathbf{x}^+ \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x}. \qquad (3.106)$$

В частном случае $r = 1$, когда матрица A заменяется на n-вектор a, из (3.104) имеем равенство

$$\mathbf{x}^+ (\mathbf{B}_0 + \gamma_0 \mathbf{B}_{0c})^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{x}^+ \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x} - \delta (\mathbf{x}^+ \mathbf{B}_0^{-1} a)^2, \quad \delta = \gamma_0 / (1 + \gamma_0 a^+ \mathbf{B}_0^{-1} a), \qquad (3.107)$$

откуда получаем минимаксное правило обнаружения квазидетерминированного сигнала Ua со случайной амплитудой U, распределенной по нормальному закону на фоне гауссовской помехи с неизвестной интенсивностью:

$$(\mathbf{x}^+ \mathbf{B}_0^{-1} a)^2 \gtrless C \mathbf{x}^+ \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x}. \qquad (3.108)$$

Это правило эквивалентно минимаксному правилу для обнаружения детерминированного сигнала с неизвестными амплитудой и полярностью [118, 119], являющемуся РНМ инвариантным относительно группы изменений масштаба и знака всех составляющих $\mathbf{x}$, которое, следовательно, является минимаксным и при случайной амплитуде, распределенной по произвольному симметричному закону.

Применение равенства (3.104) к случаю невырожденной $\mathbf{B}_{0c}$ приводит к еще одному эквивалентному варианту минимаксного правила (3.91)

$$\mathbf{x}^+(\mathbf{B}_0 + \gamma_0^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{B}_{0c}^{-1}\mathbf{B}_0)^{-1}\mathbf{x} \geqslant C\mathbf{x}^+\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{x}, \qquad (3.109)$$

предельной формой которого при $\gamma_0 \to 0$ является правило (3.101).

Рассмотрим в качестве примера обнаружение нестационарных некоррелированных сигналов на фоне нестационарного некоррелированного шума с неизвестной интенсивностью. В этом случае известные нормированные корреляционные матрицы имеют диагональный вид

$$\mathbf{B}_{0c} = [B_{0ci}] \text{ и } \mathbf{B}_0 = [B_{0i}], \qquad (3.110)$$

где $B_{0ci} = \sigma_{ci}^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ci}^2$ и $B_{0i} = \sigma_{\text{ш}i}^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \sigma_{\text{ш}i}^2$,

а σ_{ci}^2 и $\sigma_{\text{ш}i}^2$ — дисперсии выборочных значений сигнала и шума.

При выбранных обозначениях

$$\nu = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ci}^2; \quad \varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{\text{ш}i}^2; \quad \operatorname{tr}\mathbf{B}_{0c} = \sum_{i=1}^{n} B_{0ci} = 1;$$

$$\operatorname{tr}\mathbf{B}_0 = \sum_{i=1}^{n} B_{0i} = 1; \quad \mathbf{B}_0^{-1} = [1/B_{0i}];$$

$$(\gamma_0\mathbf{B}_{0c} + \mathbf{B}_0)^{-1} = [1/(\gamma_0 B_{0ci} + B_{0i})]. \qquad (3.111)$$

Комплексный аналог минимаксного правила (3.108) рассмотрен в [82, 118].

Подставив (3.109) и (3.110) в (3.91), нетрудно получить следующее минимаксное правило для рассматриваамого случая:

$$\sum_{i=1}^{n} B_{0i}^{-1} x_i^2 \geqslant C \sum_{i=1}^{n} (\gamma_0 B_{0ci} + B_{0i})^{-1} x_i^2. \qquad (3.112)$$

Обозначив

$$\mu_i = B_{0ci}/B_{0i}, \qquad (3.113)$$

с учетом $1/(\gamma_0\mu_i + 1) = 1 - \gamma_0\mu_i/(\gamma_0\mu_i + 1)$ приходим к правилу

$$\sum_{i=1}^{n} B_{0i}^{-1} \frac{\gamma_0\mu_i}{\gamma_0\mu_i + 1} x_i^2 \geqslant C_1 \sum_{i=1}^{n} B_{0i}^{-1} x_i^2. \qquad (3.114)$$

Как видно из (3.114), в качестве порога сравнения в рассматриваемом оптимальном решающем правиле фигурирует по существу оценка интенсивности шума, получаемая суммированием квадратов входных выборочных значений после весовой обработки, выравнивающей их дисперсии. Очевидно, такая операция обеспечивает наиболее эффективное использование всей выборки шума.

В левой части суммирование аналогично преобразованных квадратов выборочных значений производится с дополнительными весовыми коэффициентами $\gamma_0\mu_i/(\gamma_0\mu_i + 1)$, монотонно зависящими от отноше-

ния дисперсий сигнала и шума μ_i и тем самым обеспечивающими наибольший вклад от тех выборочных значений, для которых это отношение максимально. В целом же, как мы видели, решающее правило (3.114) обеспечивает независимость вероятности ложной тревоги от интенсивности шума ε и в соответствии с выбранными критериями наилучшим образом использует отличия в законах изменения дисперсий сигнала и шума в целях обнаружения.

Нетрудно убедиться в том, что подстановка $\mathbf{B}_{0c}$ и $\mathbf{B}_0$ рассматриваемого здесь примера (3.110) в (3.98) непосредственно приводит к (3.114).

Особенность вида конусной критической области оптимальных решающих правил иллюстрирует рис. 3.4 *а*, где изображена оптимальная область обнаружения для простейшего случая $n = 2$, $B_{01}=B_{02}$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 0$, когда (3.114) имеет вид

$$|x_1| \geqslant C|x_2|. \quad (3.115)$$

Для сравнения отметим, что правило Неймана — Пирсона для этого же случая при известной интенсивности шума соответствует

$$|x_1| \geqslant C, \quad (3.116)$$

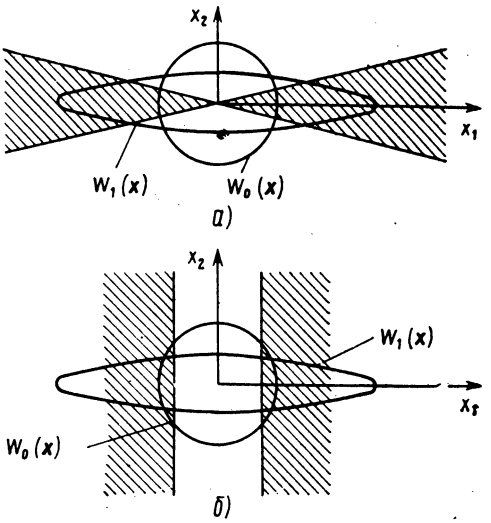


Рис. 3.4. Вид критической области оптимального решающего правила (*а*) и правила Неймана — Пирсона при известной интенсивности шума (*б*) (для $n=2$)

а критическая область для него представлена на рис. 3.4, *б*. На рисунках изображены также окружности и эллипсы постоянных значений плотностей $W_1(\mathbf{x})$ и $W_0(\mathbf{x})$.

3.3.3. Случайный высокочастотный сигнал с неизвестной интенсивностью

Этот случай рассматривается аналогично предыдущему. Условные плотности распределения входной выборки равны

$$W_1(\mathbf{x}|\gamma, \varepsilon) = (\pi\varepsilon)^{-n}|\gamma\mathbf{B}_{0c} + \mathbf{B}_0|^{-1} \exp\left[-\varepsilon^{-1}\mathbf{x}^*(\gamma\mathbf{B}_{0c} + \mathbf{B}_0)^{-1}\mathbf{x}\right], \quad (3.117)$$

$$W_1'(\mathbf{x}|\gamma_0, 1) = \pi^{-n}|\gamma_0\mathbf{B}_{0c} + \mathbf{B}_0|^{-1}(\mathbf{x}^*\mathbf{x})^n \exp\left[-\mathbf{x}^*(\gamma_0\mathbf{B}_{0c} + \mathbf{B}_0)^{-1}\mathbf{x}\right]; \quad (3.118)$$

$$W_0(\mathbf{x}|\varepsilon) = (\pi\varepsilon)^{-n}|\mathbf{B}_0|^{-1}\exp\left[-\varepsilon^{-1}\mathbf{x}^*\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{x}\right], \quad (3.119)$$

а единственное минимаксное (подобное минимаксное) решающее правило (3.98) принимает вид

$$\mathbf{x}^* [\mathbf{B}_0^{-1} - (\gamma_0 \mathbf{B}_{0c} + \mathbf{B}_0)^{-1}] \mathbf{x} \geqslant C\mathbf{x}^* \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x}. \quad (3.120)$$

Очевидным аналогом правила (3.103) является правило

$$\mathbf{x}^* \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x} \geqslant C\mathbf{x}^* (\gamma_0 \mathbf{B}_{0c} + \mathbf{B}_0)^{-1} \mathbf{x}. \quad (3.121)$$

Соответствующие комплексные аналоги легко записываются и для других правил из § 3.3.

Например, для случаев слабых и сильных высокочастотных сигналов аналогами решающих правил (3.101) и (3.103) являются правила

$$\mathbf{x}^* \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{B}_{0c} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x} \geqslant C\mathbf{x}^* \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x}; \quad (3.122)$$

$$\mathbf{x}^* \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x} \geqslant C\mathbf{x}^* \mathbf{B}_{0c}^{-1} \mathbf{x}. \quad (3.123)$$

Все приведенные выше решающие правила обладают теми же оптимальными свойствами, что и соответствующие правила для обнаружения видеосигналов.

Следует отметить, что, как показано в [82], минимаксные решающие правила (3.98) и (3.120) остаются оптимальными минимаксными при обоих видах ограничений на вероятность ложной тревоги и в случае, когда интенсивность сигнала априори известна.

3.3.4. Структурные схемы обнаружителей

Структурная схема обнаружителя случайных видеосигналов, реализующая минимаксное решающее правило (3.98), представлена на рис. 3.5. Эта схема, как и схема рис. 3.2, состоит из двух каналов обработки. Основной канал состоит из блока вычисления соответствующей квадратичной формы входных выборочных значений и схемы сравнения с переменным порогом. Порог автоматически регулируется по результатам вычисления квадратичной формы, совпадающей с достаточной статистикой для помехи.

Аналогичный вид имеет и схема обнаружения случайных ВЧ сигналов.

Применением линейного преобразования оптимальные решающие правила (3.91), (3.98), (3.99), (3.101), (3.103) и соответствующие им структурные схемы могут быть дополнительно развернуты.

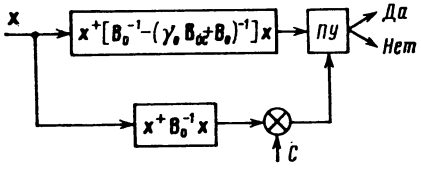


Рис. 3.5. Структурная схема минимаксного обнаружителя случайного видеосигнала

Применим к вектору исходных выборочных значений $\mathbf{x}$ невырожденное линейное преобразование $\mathbf{P}$

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}\mathbf{x}, \quad (3.124)$$

одновременно приводящее нормированную корреляционную матрицу шума $\mathbf{B}_0$ к единичной матрице

I, а соответствующую матрицу сигнала $\mathbf{B}_{0c}$ к диагональной матрице $[B_{0ci}] = [\mu_i]$. При этом, корреляционная матрица сигнала и шума, равная при взаимной независимости шума и сигнала $\mathbf{R}=\mathbf{B}_c+\mathbf{B}$, также будет приведена к диагональной форме

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{PRP}^+ = \varepsilon\,[\gamma\mu_i + 1]. \tag{3.125}$$

Преобразование $\mathbf{P}$, удовлетворяющее уравнениям

$$\mathbf{PB}_0\mathbf{P}^+ = I;\ \mathbf{PB}_{0c}\,\mathbf{P}^+ = [\mu_i], \tag{3.126}$$

так же как и коэффициенты μ_i, определяются матрицами $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{B}_{0c}$.

Подставляя вместо $\mathbf{x}$, $\mathbf{B}_{0c}$ и $\mathbf{B}_0$ соответственно $\mathbf{v}$, $[\mu_i]$ и I, нетрудно получить следующие упрощенные представления статистик решающих правил в терминах преобразованной выборки:

$$\mathbf{x}^+(\gamma_0\mathbf{B}_{0c}+\mathbf{B}_0)^{-1}\mathbf{x} = \sum_i (\gamma_0\mu_i+1)^{-1}v_i^2;$$

$$\mathbf{x}^+\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{x} = \sum_i v_i^2;$$

$$\mathbf{x}^+[C\mathbf{B}_0^{-1} - (\gamma_0\mathbf{B}_{0c}+\mathbf{B}_0)^{-1}]\mathbf{x} = \sum_i [C-(\gamma_0\mu_i+1)^{-1}]v_i^2;$$

$$\mathbf{x}^+\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{B}_{0c}\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{x} = \sum_i \mu_i v_i^2;$$

$$\mathbf{x}^+\mathbf{B}_{0c}^{-1}\mathbf{x} = \sum_i \mu_i^{-1}v_i^2;$$

$$\mathbf{x}^+\mathbf{B}_0^{-1}[I-(\gamma_0\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{B}_{0c}+I)^{-1}]\mathbf{x} = \sum_i \gamma_0\mu_i(\gamma_0\mu_i+1)^{-1}v_i^2. \tag{3.127}$$

В результате вместо решающих правил (3.91), (3.99), (3.101), (3.103) и (3.98) получаем следующие соответственно эквивалентные им правила:

$$\sum_i v_i^2 \geqslant C\sum_i (\gamma_0\mu_i+1)^{-1}v_i^2; \tag{3.128}$$

$$\sum_i [(\gamma_0\mu_i+1)^{-1}]v_i^2 \geqslant 0; \tag{3.129}$$

$$\sum_i \mu_i v_i^2 \geqslant C\sum_i v_i^2; \tag{3.130}$$

$$\sum_i v_i^2 \geqslant C\sum_i \mu_i^{-1}v_i^2; \tag{3.131}$$

$$\sum_i \gamma_0\mu_i(\gamma_0\mu_i+1)^{-1}v_i^2 \geqslant C\sum_i v_i^2. \tag{3.132}$$

В частности, при диагональных $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{B}_{0c}$, когда $x_i^2 = B_{0i}v_i^2$, правило (3.128) эквивалентно правилам (3.111) и (3.114).

Напомним, что решающие правила (3.128), (3.129), (3.132) оптимальны в общем случае, правило (3.130) — в случае слабых сигналов и

правило (3.131) — в случае обнаружения сильных сигналов. Для правила (3.131) предполагается, что $\mu_i \neq 0$ (т. е. матрица $\mathbf{B}_{0c}$ — не особенная). Однако в случае, когда некоторые из $\mu_i = 0$, как видно из более общего правила (3.132), при $\gamma_0 \to \infty$ вместо (3.131) можно применять решающее правило

$$\sum_i{}' v_i^2 \geqslant C \sum_i v_i^2 \tag{3.133}$$

или эквивалентные ему правила

$$\sum_i{}' v_i^2 \geqslant C_2 \sum_i{}'' v_i^2; \; C_2 = (1-C)/C \tag{3.134}$$

и

$$\sum_i v_i^2 \geqslant C_3 \sum_i{}'' v_i^2; \; C_3 = 1/(1-C), \tag{3.135}$$

где штрихи в Σ' и Σ'' означают исключение из суммы членов, соответствующих $\mu_i = 0$ и $\mu_i \neq 0$.

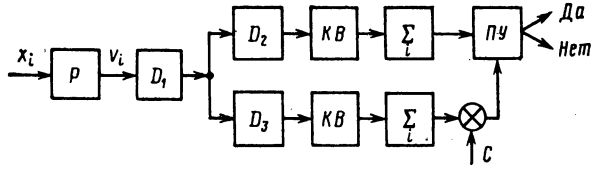


Рис. 3.6. Структурная схема минимаксного обнаружителя случайного сигнала с линейным преобразованием

Отметим, что приведенные предельные варианты решающих правил относительно **v** нетрудно было бы получить и исходя из правил относительно **x**, справедливых для общего случая. Так, правила (3.129), (3.131) при $\gamma_0 \to \infty$ и (3.132) легко находятся из (3.128), а правило (3.130) при $\gamma_0 \to 0$ — из (3.132).

Решающее правило (3.133) можно получить и непосредственно из правила (3.106), воспользовавшись тем, что

$$\sum_i{}' v_i^2 = \mathbf{x}^+ A\,(A^+ A)^{-1} A^+ \mathbf{x}\,, \tag{3.136}$$

где A — прямоугольная $n \times r$-матрица с ненулевыми элементами $A_{ii} = \mu_i^{1/2}$.

Коэффициенты C, определяемые вероятностью ложной тревоги, в общем случае различны для различных правил и связаны между собой простыми соотношениями.

Структура приемников, реализующих оптимальные решающие правила, непосредственно вытекает из самих выражений для решающих правил.

На рис. 3.6 приведена развернутая структурная схема минимаксных обнаружителей [117]. На нем Р — линейная система (дискретный

линейный фильтр) с матрицей преобразования $\mathbf{P}$; КВ — квадраторы; Σ — сумматоры n входных значений; $\otimes$ — умножитель на постоянное число C; ПУ—устройство порогового сравнения; D_1, D_2 и D_3 — линейные системы с диагональными матрицами преобразований, осуществляющие умножение выходных величин на определенные весовые коэффициенты. Так, для правила (3.132) D могут иметь следующие значения:

$$D_1 = I;\ D_2 = [(\gamma_0\mu_i)^{1/2}\,(\gamma_0\mu_i + 1)^{-1/2}] \quad \text{и} \quad D_3 = I$$

или

$$D_1 = [(\gamma_0\mu_i)^{1/2}\,(\gamma_0\mu_i + 1)^{-1/2}];\quad D_2 = I \quad \text{и} \quad D_3 = [(1 + 1/(\gamma_0\mu_i)^{1/2}].$$

В результате простейших эквивалентных преобразований правил или самих схем можно получить ряд эквивалентных структурных схем оптимальных обнаружителей. В различных конкретных задачах могут оказаться удобными те или иные эквивалентные варианты таких схем. В частности, весовая обработка может производиться частично или полностью и после квадратора (см. рис. 3.7, где $D_k' = D_k^2$).

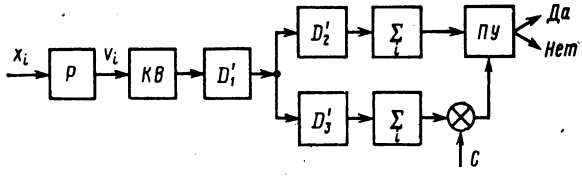


Рис. 3.7. Вариант структурной схемы с весовой обработкой после квадратичного детектора

Конкретную структуру оптимальных решающих правил в целом можно находить и непосредственным развертыванием квадратичных форм, входящих в решающие правила (3.91), (3.98) и др., обратив соответствующие матрицы. Получаемая при этом структура обнаружителей, вообще говоря, может и отличаться от рассмотренных выше. Так, правило (3.99), очевидно, представимо в виде

$$\sum_{i,\,j} a_{ij}\,x_i\,x_j \gtrless 0, \tag{3.137}$$

где a_{ij} — элементы квадратной корреляционной матрицы $A = C\mathbf{B}_0^{-1}$ — $(\gamma_0\mathbf{B}_{0c} + \mathbf{B}_0)^{-1}$.

В таких частных случаях, как рассмотренный в п. 3.3.2 случай обнаружения нестационарного некоррелированного сигнала на фоне нестационарного некоррелированного шума, оба подхода приводят к одинаковым решающим правилам и схемам.

Действительно, правило (3.114) совпадает с правилом (3.132), где $v_i = \mu_i^{-1/2}x_i$. В этом случае $\mathbf{P} = [\mu_i^{-1/2}]$. Во многих интересных задачах преобразование также нетрудно найти непосредственно.

В общем случае задача определения $\mathbf{P}$ совпадает с известной задачей вычисления главной матрицы $\mathbf{W}$ для регулярного пучка пары квад-

ратичных форм с матрицами $\mathbf{B}_{0c}$ и $\mathbf{B}_0$. Она решается известными методами одновременного приведения двух квадратичных форм соответственно к каноническому и нормальному видам. Из соотношений (3.126) и $\mathbf{W}^+\mathbf{B}_0\,\mathbf{W}=I$ и $\mathbf{W}^+\mathbf{B}_{0c}\mathbf{W} = [\lambda_i]$ следует, что если $\lambda_i = \mu_i$, то $\mathbf{P} = \mathbf{W}^+$, т. е. матрица искомого преобразования $\mathbf{P}$ совпадает с транспонированной главной матрицей $\mathbf{W}$ пучка. Здесь λ_i — характеристические числа регулярного пучка форм

$$\mathbf{x}^+\mathbf{B}_{0c}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x}^+\mathbf{B}_0\,\mathbf{x}, \tag{3.138}$$

равные собственным числам матриц $\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{B}_{0c}$ и $\mathbf{B}_{0c}\mathbf{B}_0^{-1}$.

В заключение рассмотрим случай, когда параметры преобразованного сигнала имеют лишь два возможных значения. Пусть для определенности

$$\mu_i = \begin{cases} \mu_a \text{ при } i = \overline{1, m}\,; \\ \mu_b < \mu_a \text{ при } i = \overline{m+1, n}. \end{cases} \tag{3.139}$$

В этом случае оптимальные решающие правила приводятся к виду

$$\sum_{i=1}^{m} v_i^2 \gtrless C \sum_{i=m+1}^{n} v_i^2 \tag{3.140}$$

или к эквивалентному виду

$$\sum_{i=1}^{m} v_i^2 \gtrless C \sum_{i=1}^{n} v_i^2, \tag{3.141}$$

т. е. оказываются равномерно наиболее мощными среди $\psi \in \Psi$.

Структурные схемы правил (3.140) и (3.141) очевидны. Они отличаются тем, что в первой схеме в формировании автоматически регулируемого порогового уровня участвуют лишь те преобразованные выборочные значения, которые соответствуют меньшим μ_i (в частности, не содержащие сигнала), а во второй — все выборочные значения.

Как видно из предыдущего, оба способа формирования порогового уровня с точки зрения характеристик обнаружения эквивалентны.

Все приведенные в этом параграфе соотношения, решающие правила и структурные схемы непосредственно применимы и для обнаружения ВЧ случайных сигналов, в том числе определяемых правилами (3.120) — (3.123), если под $\mathbf{x}$ понимать действительную выборку двух квадратурных составляющих входного сигнала. Аналогичные соотношения, схемы и правила нетрудно записать и через входную выборку в комплексной форме. При этом транспонирование заменяется на сопряжение по Эрмиту, а v_i^2 — на $|v_i^2|$, что соответствует замене в структурных схемах квадраторов на квадратичные детекторы.

3.3.5. Характеристики обнаружения случайного гауссовского сигнала

Рассмотрим вначале эффективность полученных минимаксных решающих правил для общего случая обнаружения ВЧ случайного сиг-

нала на фоне случайного гауссовского шума. Минимаксное правило для этого случая (3.121) запишем в виде

$$C\mathbf{x}^*\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{x}^*(\gamma_0\mathbf{B}_{0c}+\mathbf{B}_0)^{-1}\mathbf{x} \geqslant 0, \qquad (3.142)$$

где $0 < C < 1$.

Для определения эффективности алгоритма (3.142) необходимо знание плотности вероятности распределения квадратичной формы $u = \mathbf{x}^*A\mathbf{x}$, где $A = C\mathbf{B}_0^{-1} - (\gamma_0\mathbf{B}_{0c} + \mathbf{B}_0)^{-1}$ при произвольных фактических значениях параметров ε и γ.

Известно (см., например, [31]), что при $u > 0$ плотность распределения величины u имеет следующий вид:

$$W(u) = \sum_{i=1}^{n_+} \lambda_i^{-1} \exp(-u/\lambda_i) \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} (1-\lambda_k/\lambda_i). \qquad (3.143)$$

Здесь λ_k — собственные значения матрицы $\varepsilon(\gamma\mathbf{B}_{0c} + \mathbf{B}_0)A$ (зависящие от собственных значений матрицы $\mathbf{B}_{0c}\mathbf{B}_0^{-1}$), т. е. корни уравнения $|\varepsilon(\gamma\mathbf{B}_{0c} + \mathbf{B}_0)A - \lambda I| = 0$; n — объем входной комплексной выборки; n_+ — число положительных значений λ_k, предполагаемых различными, для которых производится суммирование.

Нетрудно видеть, что в (3.143) при равных положительных значениях λ_k имеют место особые точки, которые, как можно показать, являются устранимыми [3, 31].

На основании (3.143) выражение для вероятности правильного обнаружения β (а при $\gamma = 0$ и вероятности ложной тревоги α) имеет следующий вид [113]:

$$\beta = \beta(\gamma) = \sum_{i=1}^{n_+} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq 1}}^{n} (1-\lambda_{kc}/\lambda_{ic})^{-1}, \qquad (3.144)$$

где индекс «с» указывает на значение λ при наличии сигнала.

В частном случае некоррелированных нестационарных сигнала и шума вместо (3.144) имеем

$$\beta(\gamma) = \sum_{i=1}^{n_+} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \left[1 - \frac{C-(\gamma_0 q_k+1)^{-1}}{C-(\gamma_0 q_i+1)^{-1}} \frac{1+\gamma q_k}{1+\gamma q_i}\right]^{-1}, \qquad (3.145)$$

где q_i — отношения i-х диагональных элементов корреляционных матриц сигнала $\mathbf{B}_{0c}$ и шума $\mathbf{B}_0$, расположенных в убывающей последовательности

В случае малых заданных значений вероятности ложных тревог, таких, что $C \leqslant (\gamma_0 q_2 + 1)^{-1}$, имеем $n_+ = 1$ и в (3.145) остается один член суммы:

$$\beta = \prod_{k=2}^{n} \left[1 - \frac{C-(\gamma_0 q_k+1)^{-1}}{C-(\gamma_0 q_1+1)^{-1}} \frac{1+\gamma q_k}{1+\gamma q_1}\right]^{-1}. \qquad (3.146)$$

В качестве примера расчета по формуле (3.146) на рис. 3.8 приведены характеристики обнаружения при $n = 3$, $q_1 = 2$, $q_2 = 1$,

$q_3 = 0$ и $\alpha = 10^{-2}$. Кривые $\gamma_0 \to 0$ и $\gamma_0 \to \infty$ соответствуют обнаружению слабых (локально-оптимальный обнаружитель) и сильных сигналов. Штриховая кривая, определяющая для каждого γ предельные возможности обнаружения сигнала по указанному выше критерию (огибающая вероятности правильного обнаружения), соответствует случаю $\gamma_0 = \gamma$.

Приведенные графики иллюстрируют равномерно наиболее мощные свойства обнаружителей в окрестности γ_0, а также относительные потери при $\gamma \neq \gamma_0$. Они показывают, в частности, что энергетические по-

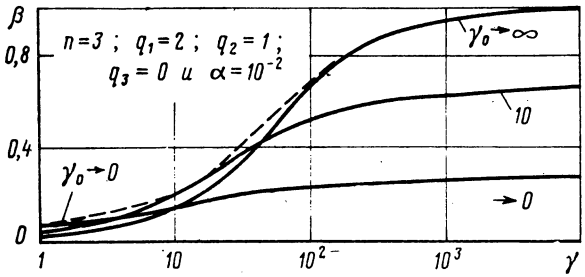


Рис. 3.8. Характеристики обнаружения некоррелированных нестационарных сигналов

тери локально-оптимального обнаружителя при малых n и больших β могут быть весьма значительными. Вместе с тем обнаружитель для сильных сигналов при средних β мало уступает по эффективности минимаксному обнаружителю для соответствующих γ_0. Следует отметить, что в общем случае при $\gamma \to \infty$ значение β может не стремиться к единице, причем максимальное значение увеличивается до определенного предела при $\gamma_0 \to \infty$. Этот предел равен единице, если хотя бы одно из значений q_i равно нулю. В этих случаях решающее правило является состоятельным.

Выражение для характеристики обнаружения становится удобным для расчета и при больших значениях n в тех случаях, когда квадратичные формы в (3.142) нормализуются. Тогда вместо (3.144) имеем формулу для β через интеграл вероятностей:

$$\beta = \Phi\left(\operatorname{tr}\left[(\gamma \mathbf{B}_{0c} + \mathbf{B}_0) A\right] / \sqrt{\operatorname{tr}\left[(\gamma \mathbf{B}_{0c} + \mathbf{B}_0) A\right]^2}\right), \qquad (3.147)$$

$$\text{где } \Phi(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{x} \exp(-t^2/2)\, dt.$$

Формула (3.147) при $\gamma_0 \ll 1$ и $\gamma \ll 1$ приводится к виду, соответствующему случаю обнаружения слабых сигналов.

Формулы (3.144)—(3.147) могут быть применены и для оценки характеристики обнаружения случайных видеосигналов в тех случаях,

когда выборочные значения могут быть сгруппированы по парам некоррелированных значений с одинаковыми дисперсиями, так что их статистические свойства допускают описание с помощью комплексных эрмитовых корреляционных матриц. При этом аргумент функции $\Phi(x)$ в (3.147) следует умножить на коэффициент $1/\sqrt{2}$.

При обнаружении стационарных некоррелированных сигналов на фоне стационарного шума (и в случаях, сводящихся к этому) имеется возможность дальнейшего упрощения формул для характеристик обнаружения.

Рассмотрим по-прежнему обнаружение ВЧ сигналов. В этом случае минимаксное правило, аналогичное (3.107), имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 \geqslant C \sum_{i=m+1}^{n} |x_i|^2 . \qquad (3.148)$$

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 = \sigma_{\text{сш}}^2 \chi_{2m}^2, \quad \sum_{i=m+1}^{n} |x_i|^2 = \sigma_{\text{ш}}^2 \chi_{2p}^2,$$

где χ_{2m}^2 и χ_{2p}^2 — независимые случайные величины, распределенные по закону χ^2 соответственно с $2m$ и $2p = 2(n - m)$ степенями свободы; $\sigma_{\text{сш}}^2 = \sigma_{\text{ш}}^2 (1 + q)$ и $\sigma_{\text{ш}}^2$ — дисперсии выборочных значений при наличии и отсутствии сигнала; q — энергетическое отношение сигнал-шум в выборочных значениях.

Поэтому характеристики обнаружения для (3.148) определяются из неравенства

$$F_{2m,\,2p} = p\chi_{2m}^2/(m\chi_{2p}^2) > Cp/[m(1+q)], \qquad (3.149)$$

где $F_{2m,\,2p}$ — случайная величина, имеющая F-распределение Фишера-Снедекора с параметрами $2m$, $2p$ [74]. На основании (3.149) α и β могут быть получены по формулам

$$\alpha = 1 - G(Cp/m;\ 2m,\ 2p); \quad \beta = 1 - G(Cp/[m(1+q)];\ 2m,\ 2p), \qquad (3.150)$$

где $G(x, 2m, 2p)$ — интегральная функция F-распределения, протабулированная в [74, 137] и др.

Поскольку имеющиеся таблицы для F-распределения недостаточно подробны, представляют интерес также следующие формулы для α и β, пригодные для непосредственных вычислений [110]:

$$\alpha(C, m, p) = (1+C)^{-p} \sum_{s=0}^{m-1} C_{p-1+s}^{s} \left(\frac{C}{1+C}\right);$$

$$\beta(q, C, m, p) = \mu^p (1+\mu)^{-p} \sum_{s=0}^{m-1} C_{p-1+s}^{s} (1+\mu)^{-s}, \qquad (3.151)$$

где $\mu = (q+1)/C$; $p = n - m$.

Рассмотрим потери в пороговом сигнале, определяемые выражением

$$\eta = q/q_\infty, \tag{3.152}$$

где q_∞ и q — пороговые отношения сигнал-шум при оптимальном обнаружении на фоне шума с известной и неизвестной дисперсиями соответственно.

Результаты расчета по формулам (3.151) потерь η (в децибеллах) при $\beta = 0{,}95$ в зависимости от отношения $(p/m) = (n - m))/m$ для неко-

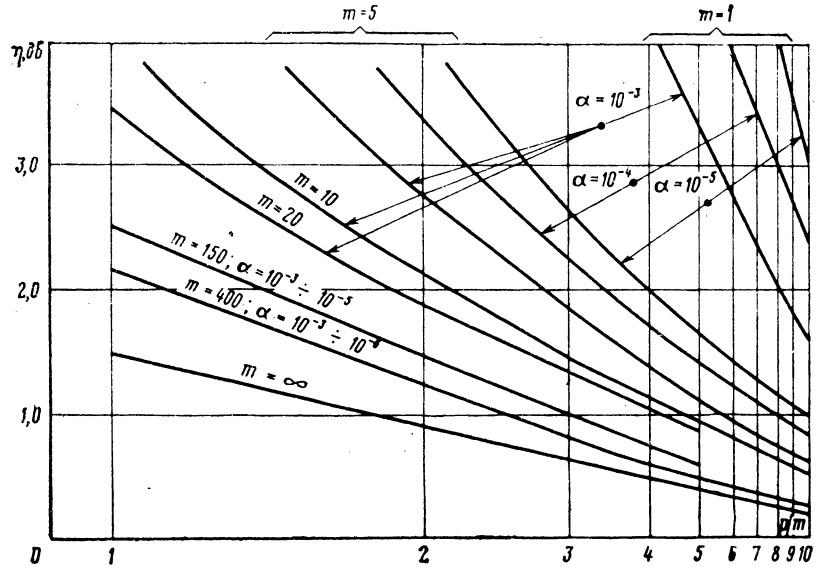


Рис. 3.9. Зависимость потерь η от m и p при обнаружении случайного сигнала

торых значений m представлены на рис. 3.9. Для $m = 150$ и 400 расчет производился по приближенным выражениям, справедливым при больших m и n ($m/n = \text{const}$):

$$\beta(q, C, m, p) \asymp \Phi\left(\sqrt{m}\,\frac{\mu - p/m}{(\mu^2 + p/m)^{1/2}}\right). \tag{3.153}$$

При этом $\alpha = \alpha(C, m, p)$ определяется (3.153) при $q = 0$ и $\mu = 1/C$.

Для $m \to \infty$ кривые потерь построены по асимптотической формуле

$$\eta_{m\to\infty} \simeq \sqrt{1 + m/p} = \sqrt{n/(n-m)}, \tag{3.154}$$

которую нетрудно получить из (3.153). Как видно из рис. 3.9, энергетические потери, которыми приходится платить за новое качество — независимость вероятности ложной тревоги от интенсивности шума, — — для $n > 5$ не превышает 1 дБ при $m/p > 10$ и для $n > 20$ при $m/p > 5$.

Характеристики обнаружения видеосигналов анализируются аналогично. В частности, для правила (3.107) вместо (3.150) справедливы формулы

$$\alpha = 1 - G(Cp/m;\ m,\ p);\ \beta = 1 - G(Cp/m\,(1+q);\ m,\ p), \quad (3.155)$$

а асимптотическая формула для энергетических потерь (3.154) остается без изменений и в этом случае.

Используя тесную связь между F-распределением и β (бета)-распределением [74], для расчета характеристик оптимального обнаружения стационарных некоррелированных случайных сигналов на фоне аналогичных помех с неизвестной интенсивностью можно воспользоваться также таблицами в [142] и др. Значения q_∞, необходимые для расчета пороговых отношений q по известным потерям η, могут быть взяты из известных источников [14, 116] либо рассчитаны с помощью таблиц типа [131, 141] и др.

3.3.6. Минимаксное многоальтернативное обнаружение случайного сигнала на фоне гауссовского шума с неизвестной интенсивностью

В § 3.1 и 3.2 была рассмотрена теория оптимального многоальтернативного обнаружения сигналов на фоне помех с неизвестными параметрами по минимаксному критерию. В настоящем пункте эта теория будет применена к синтезу минимаксных правил многоальтернативного обнаружения случайных сигналов.

Пусть в дискретной выборке $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^+$ объема n подлежащие обнаружению и различению L видов случайных гауссовских видео- или ВЧ сигналов описываются аналогично тому, как это сделано в начале § 3.3 с нулевыми средними значениями и действительными или эрмитовыми корреляционными матрицами

$$\mathbf{B}_{cl} = \nu_l \mathbf{B}_{0cl};\ \operatorname{tr} \mathbf{B}_{0cl} = 1,\ l = \overline{1, L}. \quad (3.156)$$

В обоих случаях гауссовский шум $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_n)$ представляет собой совокупность n действительных или комплексных выборочных значений n_i с нулевыми средними и невырожденной корреляционной матрицей (соответственно действительной или эрмитовой), известной с точностью до множителя интенсивности ε:

$$\mathbf{B} = \varepsilon \mathbf{B}_0;\ \operatorname{tr} \mathbf{B}_0 = 1. \quad (3.157)$$

Предполагается, что интенсивности сигналов ν_l, как и шума ε, неизвестны априорно и могут принимать произвольные положительные значения. Одновременно может присутствовать лишь один из L альтернативных сигналов. Задача заключается в синтезе оптимального правила для принятия решения о наличии в $\mathbf{x}$ сигнала с одновременным указанием его вида. В качестве критерия оптимизации используется рассмотренный в § 3.1 максиминный критерий (3.33), предполагающий максимизацию минимальной вероятности правильного обнаружения, где минимум берется по всем возможным l-м видам сигнала и по неиз-

вестным параметрам ϑ_l смеси сигнала и шума в пределах контролируемых областей $\Theta_l = \{\vartheta_l : \gamma_l \geqslant \gamma_{0l}\}$ с $\gamma_l = \nu_l/\varepsilon$ [121, 123].

Воспользуемся общим видом минимаксных решающих правил многоальтернативного обнаружения (3.81) при условии ограничения вероятности правильного обнаружения сверху. В соответствии с выражениями для плотностей вероятности смеси сигнала и шума (3.88) и (3.110) задачи многоальтернативного обнаружения случайного сигнала являются инвариантными относительно группы $\mathbf{G}$ преобразований масштаба выборочного пространства $\mathbf{X}$.

Рассмотрим сначала ВЧ сигналы. Как и ранее, наименее благоприятное распределение параметров γ_l предполагается сосредоточенным в точках $\gamma_l = \gamma_{0l}$ и при этом наименее благоприятные меры на пространствах Θ_0 и Θ_l пропорциональны $d\varepsilon/\varepsilon$. В результате для многоальтернативного обнаружения сигналов получаем решающие правила с областями решений о присутствии l-х сигналов

$$\mathbf{X}_l = \{\mathbf{x} : d_l l_l \geqslant 1,\ d_l l_l \geqslant d_k l_k,\ k \neq l\}, \tag{3.158}$$

где $l_l \equiv l_l(\tau|\gamma_{0l})$ — отношение правдоподобия максимального $\mathbf{G}$-инварианта τ при $\gamma_l = \gamma_{0l}$, а d_l — коэффициенты, определяемые условиями минимакса вероятностей правильного обнаружения β_l и заданным значением вероятности ложной тревоги α (3.79):

$$\beta_l(\gamma_{0l}) = \beta_1(\gamma_{01}),\quad l = \overline{2, L}, \tag{3.159}$$

и $\alpha = \sum_{l=1}^{L} \alpha_l = \alpha_0$. В рассматриваемом случае обнаружения-различения случайных ВЧ сигналов [30]

$$l_l(\tau|\gamma_{0l}) = |\mathbf{B}_0|\,|\gamma_{0l}\mathbf{B}_{0c\,l} + \mathbf{B}_0|^{-1} Z_l^n,$$

где $Z_l = \mathbf{x}^* \mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{x}/[\mathbf{x}^*(\gamma_{0l}\mathbf{B}_{0c\,l} + \mathbf{B}_0)^{-1}\mathbf{x}]$ — инвариантно-достаточная статистика для l-й альтернативы. Это приводит к минимаксным правилам обнаружения-различения

$$d_l Z_l \geqslant 1;\ d_l Z_l \geqslant d_k Z_k,\ k \neq l, \tag{3.160}$$

где Z_l имеют вид:

в общем случае

$$Z_{l1} = \mathbf{x}^* \mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{x}/[\mathbf{x}^*(\gamma_{0l}\mathbf{B}_{0cl} + \mathbf{B}_0)^{-1}\mathbf{x}]; \tag{3.161}$$

в случае слабых сигналов ($\gamma_{0l} \ll 1$)

$$Z_{l2} = [1 - \gamma_{0l}\mathbf{x}^*\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{B}_{0cl}\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{x}/(\mathbf{x}^*\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{x})]^{-1}; \tag{3.162}$$

в случае сильных сигналов ($\mathbf{B}_{0c\,l}$ — невырожденная)

$$Z_{l3} = \mathbf{x}^*\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{x}/(\mathbf{x}^*\mathbf{B}_{0c\,l}^{-1}\mathbf{x}); \tag{3.163}$$

в случае сильных сигналов ($\mathbf{B}_{0c\,l}$ — вырожденная)

$$Z_{l4} = [1 - \mathbf{x}^*\mathbf{B}_0^{-1}A_l(A_l^*\mathbf{B}_0^{-1}A_l)^{-1}A_l^*\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{x}/(\mathbf{x}^*\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{x})]^{-1}. \tag{3.164}$$

Локально минимаксное правило $\gamma_{0l} = \rho q_l$, $\rho \to 0$, может быть дополнительно упрощено с помощью логарифмирования обеих частей в

(3.160) с заменой $d_l Z_l$ на $d_l' + q_l \mathbf{x}^* \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{B}_{0cl} \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x}/(\mathbf{x}^* \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x})$ и единичного порога на нулевой.

В приведенных выше решающих правилах константы d_l, так же как и C_l в (3.81), будучи в общем случае различными для различных правил, однозначно определяются условиями (3.159) либо их аналогами, соответствующими выбранному варианту относительного критерия оптимизации, например $\beta_{l\,\text{or}}(\gamma_l) - \beta_l(\gamma_l) = \beta_{l\text{or}}(\gamma_1) - \beta_1(\gamma)$.

Параметры q_l определяют форму последовательности альтернативных областей Θ_l при $\gamma_{0l} = \rho_0 q_l$ и $\rho_0 \to 0$.

В случае, когда вероятность правильного обнаружения l-го сигнала монотонно растет с ростом γ_l, приведенные инвариантные правила являются и минимаксными инвариантными. В соответствии с аналогом теоремы Ханта — Стейна для задач проверки многоальтернативных гипотез эти правила являются просто минимаксными для обоих видов ограничения на вероятность ложной тревоги (3.34) и (3.35).

Решающие правила для случаев обнаружения слабых и сильных сигналов являются предельными формами минимаксных решающих правил соответственно для $\rho_0 \to 0$ и $\rho_0 \to \infty$. В этом смысле они могут рассматриваться как локально и асимптотически минимаксные правила.

В случае обнаружения случайных гауссовских видеосигналов минимаксные правила аналогичны (3.88)—(3.91) с соответствующим изменением смысла входящих в них величин.

Для сравнения приведем решающие правила обнаружения-различения сигналов максимального правдоподобия. В общем случае эти правила имеют вид [33]

$$\mathbf{X}_l = \left\{ \mathbf{x} : \max_l l_l(\mathbf{x}) = l_{\widehat{l}}(\mathbf{x}) \geqslant C \right\}, \tag{3.165}$$

где $l_l(\mathbf{x})$ — аналогичное (3.94) отношение максимальных значений функций правдоподобия параметров в Θ_l и Θ_0 при данных l и $\mathbf{x}$, а $\widehat{l}$ — оценка максимального правдоподобия для номера вида сигнала l.

Как и при $L = 1$, в общем случае обнаружения случайных сигналов с неизвестными γ_l правило (3.165) требует численного поиска оценки $\widehat{\gamma_l}$ в реальном времени. Однако для задачи обнаружения-различения при H_l: $\gamma_l = \gamma_{l0}$, $\gamma_k = 0$, $k \neq l$, правило максимального правдоподобия, как нетрудно убедиться, имеет следующую структуру:

$$d_l Z_{l1} \geqslant C,\ d_l Z_{l1} \geqslant d_k Z_{k1},\ k \neq l, \tag{3.166}$$

где $d_l = |\gamma_{0l} \mathbf{B}_{0cl} + \mathbf{B}_0|^{-1/n}$. Как видно, правило (3.166) отличается от минимаксного правила (3.161) лишь конкретными коэффициентами d_l, что, естественно, сужает область его применения.

При симметричных задачах обнаружения-различения, когда, в частности, $d_l = d_1$, $q_l = 1$, $\gamma_{0l} = \gamma_0$, приведенные минимаксные решающие правила существенно упрощаются и оказываются эквивалентными правилу (3.166).

В заключение рассмотрим вариант многоальтернативного обнаружения случайных сигналов, когда одновременно может присутствовать группа из нескольких видов сигналов из общего их числа L. Число N видов сигналов в группе априорно неизвестно и может изменяться от одного до $L < n$ (см. § 3.2, 3.3), где n — объем комплексной выборки $\mathbf{x}$. В этом случае задача сводится к S-альтернативному обнаруже-

нию случайных сигналов на фоне помехи с неизвестной интенсивностью, где $S = \sum_{N=1}^{L} C_L^N$, а C_L^N — число сочетаний из L по N.

Обозначим через J_r множество значений индекса l, соответствующих N_r первичным сигналам, входящим в r-ю группу. Тогда минимаксное правило обнаружения-различения групп случайных сигналов будет иметь вид

$$d_r Z_r \geqslant 1, \; d_r Z_r \geqslant d_f Z_f, \quad f \neq r, \tag{3.167}$$

где

$$Z_r = \mathbf{x}^* \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x} / [\mathbf{x}^* (\mathbf{B}_{0cr} + \mathbf{B}_0)^{-1} \mathbf{x}];$$

$$\mathbf{B}_{0cr} = \sum_{l \in J_r} \gamma_{0rl} \mathbf{B}_{0cl}.$$

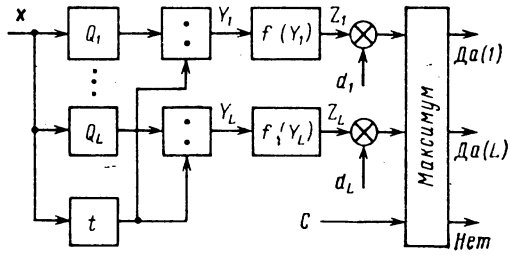


Рис. 3.10. Структурная схема многоальтернативного обнаружителя случайных сигналов

Ясно, что в этом случае альтернативы, соответствующие различным N_r, не могут быть симметричными и роль относительных критериев оптимизации коэффициентов d_r повышается.

Упрощенный вариант группового многоальтернативного обнаружения, так называемого квазиполного обнаружения-разрешения [135] отличается тем, что используется L двоичных обнаружителей $Z_l \geqslant C_l$, где

$$Z_l = \mathbf{x}^* \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x} / [\mathbf{x}^* (\gamma_{0l} \mathbf{B}_{0cl} + \mathbf{B}_l)^{-1} \mathbf{x}];$$

$$\mathbf{B}_l = \mathbf{B}_0 + \sum_{k \neq l} \gamma_{0kl} \mathbf{B}_{0ck},$$

а C_l определяются заданным максимальным значением вероятности ложной тревоги совокупности обнаружителей и минимаксом β_l по неизвестным параметрам шума и числу и параметрам возможных сигналов.

Один из возможных вариантов структурной схемы приведенных выше минимаксных обнаружителей-различителей представлен на рис. 3.10. На рисунке через $f(Y_l) = (1 - Y_l)^{-1} = Z_l$ обозначены монотонно возрастающие функции от **G**-инвариантных статистик $Y_l = Q_l/t$, где Q_l — «сигнальные» статистики для каждой из альтернатив; $t = \mathbf{x}^* \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x}$ — «шумовая» статистика, достаточная для параметра ε по-

мехи. Статистики Q_l для решающих правил (3.160) с (3.161) — (3.164) равны соответственно:

$$Q_{l1} = \mathbf{x}^* [\mathbf{B}_0^{-1} - (\gamma_{0l} \mathbf{B}_{0cl} + \mathbf{B}_0)^{-1}] \mathbf{x}; \tag{3.168}$$

$$Q_{l2} = \gamma_{0l} \mathbf{x}^* \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{B}_{0cl} \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x}, \ \gamma_{0l} \ll 1; \tag{3.169}$$

$$Q_{l3} = \mathbf{x}^* (\mathbf{B}_0^{-1} - \mathbf{B}_{0cl}^{-1}) \mathbf{x}; \tag{3.170}$$

$$Q_{l4} = \mathbf{x}^* \mathbf{B}_0^{-1} A_l (A_l^* \mathbf{B}_0^{-1} A_l)^{-1} A_l^* \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x}. \tag{3.171}$$

В общем случае найти точное аналитическое выражение для характеристик многоальтернативного обнаружения различных видов сигналов при конечной выборке затруднительно. Лишь в случае, когда парциальные области решения, определяемые верхними неравенствами приведенных выше решающих правил, не пересекаются, например для некоторых задач при «удаленных» альтернативах и достаточно малых допустимых значениях α_0, характеристики многоальтернативного обнаружения легко определяются через характеристики соответствующих парциальных двоичных обнаружителей. В общем случае при том же заданном значении α_0 вероятности правильного обнаружения $\beta_l(\gamma_l)$ оптимальных обнаружителей будут, очевидно, меньше вероятностей правильного обнаружения соответствующих парциальных двоичных обнаружителей:

$$\beta_l(\gamma_l) \leqslant \tilde{\beta}_l(\gamma_l). \tag{3.172}$$

Вместе с тем в общем случае из очевидного неравенства $\sum_{k=1}^{L} \beta_k(\gamma_l) > \tilde{\beta}_l(\gamma_l)$ следует оценка снизу $\beta_l(\gamma_l) > \tilde{\beta}_l(\gamma_l) - \sum_{k \neq l} \beta_k(\gamma_l)$ или с учетом неравенства $\beta_k(\gamma_l) \leqslant \tilde{\beta}_k(\gamma_l)$

$$\beta_l(\gamma_l) > \tilde{\beta}_l(\gamma_l) - \sum_{k \neq l} \tilde{\beta}_k(\gamma_l). \tag{3.173}$$

Здесь $\beta_k(\gamma_l)$ есть вероятность обнаружения k-го сигнала многоальтернативным обнаружителем при фактическом наличии l-го сигнала с отношением сигнал-шум γ_l; $\tilde{\beta}_k(\gamma_l)$ — то же парциальным обнаружителем l-го сигнала, а сумма $\sum_{k \neq l} \beta_k(\gamma_l)$ равна вероятности перепутывания l-го сигнала многоальтернативным обнаружителем, т. е. вероятности принятия решения о наличии любого из сигналов с $k \neq l$ при фактическом присутствии l-го сигнала.

Оценки (3.172) и (3.173) могут оказаться полезными, когда вероятность ошибки перепутывания достаточно мала. Из неравенства $\tilde{\alpha}_l = \tilde{\beta}_l(0) \geqslant \alpha_l$ следует оценка сверху для вероятности ложной тревоги многоальтернативного обнаружителя

$$\alpha \leqslant \sum_{l=1}^{L} \tilde{\alpha}_l. \tag{3.174}$$

Дальнейшее уточнение оценок возможно в случаях, когда $\widetilde{\beta}_k(\gamma_l) \leqslant \leqslant \widetilde{\alpha}_k$ при $k \neq l$, что имеет место, в частности, когда альтернативные сигналы находятся в ортогональных подпространствах выборочного пространства, а шумы в этих подпространствах взаимно независимы. В этом случае

$$\sum_{k \neq l} \widetilde{\beta}_k(\gamma_l) \leqslant \sum_{k \neq l} \widetilde{\alpha}_k$$

и

$$\beta_l(\gamma_l) > \widetilde{\beta}_l(\gamma_l) - \sum_{k \neq l} \widetilde{\alpha}_k > \widetilde{\beta}_l(\gamma_l) - (L-1)\,\alpha. \qquad (3.175)$$

Неравенства (3.172) — (3.175) позволяют оценить характеристики многоальтернативного обнаружения, используя полученные ранее соотношения для характеристик двоичных обнаружителей. При этом мерой погрешности при оценке вероятности правильного обнаружения являются величины $\sum_{l=1}^{L} \widetilde{\alpha}_l$ или $(L-1)\,\alpha$. Приведенные соотношения позволяют также сделать вывод о том, что энергетические потери многоальтернативных обнаружителей при небольших L, связанные с неизвестными значениями интенсивности шума, столь же невелики, как и соответствующие потери парциальных двоичных обнаружителей. В случае необходимости сколь угодно точная оценка характеристик конкретных многоальтернативных обнаружителей может быть получена методом статистических испытаний. При малых энергетических потерях практически остаются справедливыми оценки характеристик обнаружителей-различителей, оптимальных при известных параметрах шума [20] и др.

3.3.7. Применение относительных минимаксных критериев в задаче обнаружения случайного сигнала

Выбранная выше область альтернатив (п. 3.3.1) обеспечивает наибольшее значение гарантированной вероятности правильного обнаружения для $\gamma \geqslant \gamma_0$. При этом возможность улучшения характеристик обнаружения с ростом γ не находится под контролем критерия оптимальности и может оказаться нереализованной. Правила обнаружения, реализующие такую возможность, отвечающие относительным минимаксным критериям оптимальности и, в частности, критерию (3.22) с (3.25), в соответствии с § 3.2 имеют для рассматриваемой задачи двоичного обнаружения случайного сигнала следующий общий вид:

$$\int_{\Gamma} l(\tau \mid \gamma)\, W^*(\gamma)\, d\gamma \geqslant C, \qquad (3.176)$$

где $l(\tau|\gamma)$ — отношение правдоподобия максимального инварианта относительно группы преобразований масштаба; $W^*(\gamma)$ — наименее благоприятное распределение параметра γ в Γ : $\gamma_м \geqslant \gamma \geqslant \gamma_0$. При этом при критерии (3.22) с (3.25) $W^*(\gamma)$ должно удовлетворять условию $\beta^*(\gamma) - \beta(\gamma) = \text{const}(\gamma)$ в той части Γ, где $W^*(\gamma) > 0$.

Приближенно, разбивая Γ на конечную последовательность подобластей, аппроксимируем решающее правило (3.176) с помощью правила

$$\sum_{j=1}^{k} P_j^* \, l(\tau \mid \gamma_{0j}) \geqslant C, \quad \sum_{j=1}^{k} P_j^* = 1, \tag{3.177}$$

где P_j^* выбираются из условия $\max\limits_{\gamma \in \Gamma} [\beta^*(\gamma) - \beta(\gamma)] = \min$ либо из условия $\beta^*(\gamma_{0j}) - \beta(\gamma_{0j}) = \text{const}$ для всех j, которые соответствуют $P_j^* > 0$.

Правило (3.177), соответствующее второму условию, обеспечивает в Ψ минимум наибольшей в Θ_1 нехватки мощности по отношению к $\beta_{0\Gamma}(\gamma) = \beta^*(\gamma_{0j})$, $\gamma_{0j} \leqslant \gamma < \gamma_{0j+1}$.

Для задачи обнаружения ВЧ сигнала на фоне шума с неизвестной интенсивностью правило (3.177) имеет вид

$$\sum_{j=1}^{k} d_j \left[\frac{\mathbf{x}^* \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* (\gamma_{0i} \mathbf{B}_{0c} + \mathbf{B}_0)^{-1} \mathbf{x}} \right]^n \geqslant C, \tag{3.178}$$

где d_j выбираются из тех же условий, что и P_j^*.

При заданном k, очевидно, существует оптимальное разбиение Θ_1 (т. е. совокупность γ_{0j}), при котором упомянутые минимумы оказываются наименьшими. Границы области Θ_1 могут быть расширены до $\gamma_0 \to 0$ и $\gamma_м \to \infty$.

Соответствующие варианты правил по критериям (3.31), (3.26) либо (3.27) и их аппроксимации имеют ту же структуру и отличаются лишь выбором $W^*(\gamma)$ или γ_{0j} и d_j.

При больших n правило (3.178) может быть упрощено до

$$\max_j d_j \frac{\mathbf{x}^* \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* (\gamma_{0j} \mathbf{B}_{0c} + \mathbf{B}_0)^{-1} \mathbf{x}} \geqslant C, \tag{3.179}$$

где d_j выбираются из прежних условий.

Такую же структуру (3.179) с $d_j = \prod\limits_{i=1}^{n} (q_i \gamma_{0j} + 1)^{-1/n}$ имеет и правило условного максимального правдоподобия (3.94) для заданных дискретных значений параметра γ, являющееся аппроксимацией соответствующего правила для непрерывного неизвестного γ.

Аналогичным методом, заменяя $l_l(\tau|\gamma_{0l})$ на суммы взвешенных $l_l(\tau|\gamma_{jl})$, нетрудно получить и многоальтернативные решающие правила, соответствующие рассматриваемым относительным критериям оптимальности.

Как показывает сравнительная оценка эффективности приведенных выше аппроксимаций решающих правил обнаружения случайного сигнала по относительным минимаксным критериям, практически удовлетворительной оказывается одно — трехточечная аппроксимация. При качестве обнаружения $0{,}99 \geqslant \beta \geqslant 0{,}5$ в зависимости от объема выборки (среднего, малого или большого) приближенно минимаксными по относительным критериям являются одноточечные минимаксные правила (для соответствующего γ_0) типа (3.120), (3.132) или их

предельные формы (3.131), (3.133) и (3.123), (3.130) для сильных или слабых сигналов (см., например, рис. 3.8). Дополнительные примеры применения минимаксного подхода к задачи обнаружения сигналов в условиях априорной неопределенности даны в [82, 83, 104, 111, 112, 118, 119, 121—124, 126—129, 132].

Глава 4
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ

4.1. Основные положения

Рассмотренные выше решающие правила основаны на предположении, что задача проверки статистических гипотез решается однократно после получения выборки объема n. Представляет интерес другой подход к решению той же задачи, при котором возможность принятия решения в пользу гипотезы H_0 или альтернативы H_1 проверяется многократно по мере получения каждого нового элемента выборки или некоторой группы элементов. Такие многошаговые процедуры называются последовательными, в отличие от рассмотренных выше одношаговых непоследовательных процедур. Ниже рассматриваются особенности и характеристики таких процедур и возможности их использования в параметрических задачах обнаружения сигналов.

При последовательном анализе статистических гипотез для каждого k-го шага, на котором производится попытка вынести решение, должны быть определены три области значений решающей статистики: допустимая $\mathcal{Z}_0$, критическая $\mathcal{Z}_1$ и область неопределенности $\mathcal{Z}_н$. При попадании решающей статистики в область $\mathcal{Z}_0$ принимается решение о справедливости гипотезы H_0; если решающая статистика оказывается в области $\mathcal{Z}_1$, принимается альтернатива H_1. В случае, если значение решающей статистики попадает в область неопределенности $\mathcal{Z}_н$, считается, что информации, имеющейся на k-м шаге, недостаточно и необходимо получение следующего элемента выборки.

В отличие от непоследовательных методов, где при известных распределениях $W(\mathbf{x}|H_0)$ и $W(\mathbf{x}|H_1)$ выборочных значений объем выборки n определяется заранее исходя из необходимости получения заданных вероятностей ошибок первого и второго рода α_1 и β_1, в случае последовательного анализа этот объем является случайной величиной, зависящей от выборочных данных.

Особенность последовательного анализа заключается в возможности учета при выборе правил прекращения наблюдения и вынесения решения не только стоимости тех или иных ошибочных решений, но и стоимости проведения эксперимента по получению элементов выборки. В соответствии с этим на различных шагах процедуры могут выбираться разные способы разбиения множества значений решающей статистики на подмножества $\mathcal{Z}_0$, $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_н$. Так же, как и способы выбора решающего порога при выборке фиксированного объема, эти способы могут оптимизироваться в соответствии с заданным критерием качества. Несколько примеров выбора областей $\mathcal{Z}_0$, $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_н$ представлено на рис. 4.1.

Другой важной особенностью последовательного анализа является возможность целенаправленно влиять на ход эксперимента на последующих шагах с учетом результатов, полученных на предшествующих шагах, в том числе при меняющихся независимо от экспериментатора условиях наблюдения.

Один из наиболее эффективных последовательных критериев был предложен и исследован А. Вальдом [149]. Последовательный критерий Вальда состоит в сравнении на каждом k-м шаге отношения правдоподобия $\Lambda(x_1, \ldots, x_k)$ выборки $x_1, x_2, \ldots, x_k$ с двумя фиксированными

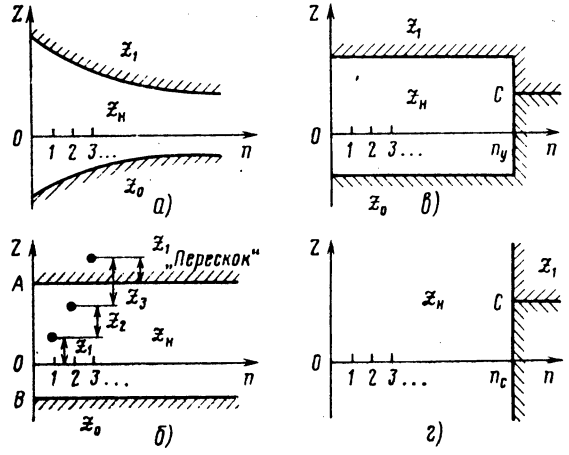


Рис. 4.1. Примеры разбиения области значений решающей статистики порогами: *а* — переменные пороги при последовательном анализе; *б* — постоянные пороги (при $z = \ln\lambda$ — последовательный анализ Вальда); *в* — усеченный последовательный анализ; *г* — решающее правило Неймана — Пирсона с порогом C

порогами A_1 и B_1 ($A_1 > B_1$). При $\Lambda \leqslant B_1$ считается справедливой гипотеза H_0, при $\Lambda \geqslant A_1$ принимается альтернатива H_1. При условии $B_1 < \Lambda < A_1$ эксперимент продолжается.

Решающие пороги вальдовского критерия A_1 и B_1 могут быть найдены по заданным вероятностям ошибок α_1 и β_1 на основе следующих рассуждений [87, 149].

Обозначим множество всех выборок $\{x_i\}$ и соответственно всех векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ через $\mathbf{X}$, а подмножества выборок, приводящих к решениям в пользу H_1 и H_0, через $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_0$, соответственно.

Условием принятия решения о справедливости альтернативы H_1 является

$$\Lambda = W(\mathbf{x}|H_1)/W(\mathbf{x}|H_0) \geqslant A_1 \text{ или } W(\mathbf{x}|H_1) \geqslant A_1 W(\mathbf{x}|H_0).$$

Это условие справедливо для любой выборки, попадающей в область $\mathbf{X}_1$. Поэтому можно проинтегрировать обе части последнего неравенства по этой области. Тогда получим

$$\int_{\mathbf{X}_1} W(\mathbf{x}\,|\,H_1)\,d\mathbf{x} \geqslant A_1 \int_{\mathbf{X}_1} W(\mathbf{x}\,|\,H_0)\,d\mathbf{x}.$$

Но интеграл в правой части выражает вероятность ошибки первого рода (ложной тревоги), а интеграл в левой части — мощность критерия (вероятность правильного обнаружения). Поэтому

$$1 - \beta_1 \geqslant A_1\alpha_1 \text{ или } A_1 \leqslant (1 - \beta_1)/\alpha_1 = D_1/F_1. \qquad (4.1)$$

Последнее неравенство является оценкой сверху для A_1.

Рассматривая аналогично случай вынесения решения в пользу гипотезы H_0, получаем

$$\Lambda = W(\mathbf{x}|H_1)/W(\mathbf{x}|H_0) \leqslant B_1 \text{ или } W(\mathbf{x}|H_1) \leqslant B_1 W(\mathbf{x}|H_0),$$

что после интегрирования по области $\mathbf{X}_0$ дает неравенство

$$\beta_1 \leqslant B_1(1 - \alpha_1) \text{ или } B_1 \geqslant \beta_1/(1 - \alpha_1) = (1 - D_1)/(1 - F_1), \quad (4.2)$$

определяющее оценку снизу для порога B_1. Отметим, что оценки решающих порогов A_1 и B_1 определяются только вероятностями ошибок α_1 и β_1 и не зависят от вида различаемых распределений. Эти оценки весьма близки к их истинным значениям в случаях, когда распределения $W(\mathbf{x}|H_1)$ и $W(\mathbf{x}|H_0)$ мало отличаются (случай близких гипотез). В этих случаях приращения решающей статистики Λ за один шаг последовательной процедуры в среднем малы, и можно пренебречь «перескоком» решающей статистики за пороги в момент принятия решения. В задачах обнаружения сигналов это соответствует случаю малого отношения сигнал-шум, при котором распределения шума и смеси сигнала с шумом отличаются незначительно.

На практике для независимых выборок удобно пользоваться не отношением правдоподобия, а его логарифмом. При этом

$$Z_k = \sum_{i=1}^{k} z_i = Z_{k-1} + z_k = \ln\{\lambda(x_1)\lambda(x_2)\ldots\lambda(x_k)\}.$$

Накопленное значение решающей статистики Z_k на каждом шаге сравнивается с решающими порогами

$$A = \ln A_1 = \ln(D_1/F_1) \text{ и } B = \ln B_1 = \ln[(1 - D_1)/(1 - F_1)]. \quad (4.3)$$

В случаях $Z_k \leqslant B$, $Z_k \geqslant A$ и $B < Z_k < A$ принимается соответственно решение о справедливости H_0, H_1 или необходимости продолжения эксперимента. Показано, что для независимой однородной выборки с вероятностью единица число шагов последовательной процедуры конечно [87, 149].

Таким образом, проведение последовательной процедуры Вальда слагается из операций вычисления решающей статистики z_k для каждого элемента выборки, вычисления накопленного значения решающей статистики $Z_k = Z_{k-1} + z_k$ и сравнения его на каждом шаге процедуры с решающими порогами A и B. Соответствующая структурная схема последовательного обнаружителя приведена на рис. 4.2, где ВРС — вычислитель решающей статистики; Н — накопитель решающей статистики; ПУ — пороговое устройство.

Вальдом совместно с Вольфовитцем доказана теорема об оптимальности последовательного критерия отношения вероятностей [150].

Эта теорема утверждает, что среди всех критериев, обеспечивающих решение задачи различения статистических гипотез с вероятностями ошибок первого и второго рода, не превышающими заданных значений α_1 и β_1, процедура последовательного анализа отношения правдоподобия с фиксированными порогами требует минимального в среднем объема выборки. Таким образом, теорема Вальда — Вольфовитца доказывает оптимальность последовательного критерия Вальда для временной меры стоимости наблюдений. При доказательстве теоремы предполагается, что различаемые гипотезы являются простыми, выборка — независимой и однородной, наблюдаемое распределение точно совпадает с ожидаемым для гипотезы или альтернативы, перескоком решающей статистики за пороги (рис. 4.1, *б*) можно пренебречь.

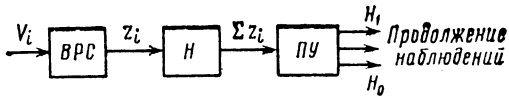


Рис. 4.2. Структурная схема последовательного обнаружителя

При нарушении одного или нескольких предположений, сделанных при доказательстве теоремы Вальда—Вольфовитца, проблема поиска оптимального последовательного критерия усложняется. Решить ее, как правило, удается только при допущениях, сильно ограничивающих область возможных приложений полученных алгоритмов.

Однако результаты работ советских [2, 3, 152—154, 200, 202] и зарубежных [151, 156] авторов показывают, что для многих практически важных задач, не удовлетворяющих условиям теоремы Вальда—Вольфовитца, могут быть предложены эффективные модификации критерия Вальда, мало уступающие строго оптимальному критерию (если таковой известен).

Так, применительно к задаче обнаружения коррелированных (марковских) сигналов на фоне коррелированных помех оптимальный обнаружитель должен строиться на основе векторной достаточной статистики $\mathbf{Z}(t)$, координатами которой кроме логарифма отношения правдоподобия $z(t)$ являются значения входного процесса $x(t)$ и выходного эффекта блока оптимальной фильтрации сигнала $m(t)$ [201]. Поиск оптимальных решающих границ, представляющих в этом случае некоторые гиперповерхности, встречает серьезные математические трудности. В то же время последовательный критерий, основанный на сравнении скалярной статистики $z(t)$ с постоянными порогами, является в этой задаче асимптотически оптимальным [3]. В задаче обнаружения коррелированных сигналов на фоне белого шума [157] этот же обнаружитель является оптимальным для информационной меры стоимости наблюдения. Для временной меры стоимости он снова оказывается асимптотически оптимальным, а при больших отношениях сигнал-шум лишь незначительно [158] уступает более сложному оптимальному обнаружителю, использующему достаточную статистику $\mathbf{Z}\{z(t); m(t)\}$ и переменные во времени пороги.

Предположение об однородности решающей выборки используется в [149] при доказательстве того факта, что с вероятностью, равной единице, последовательная процедура завершится за конечное время. Нетрудно показать, однако (см. § 4.3), что для независимой выборки это фундаментальное свойство критерия отношения правдоподобия остается в силе при замене указанного условия более общим требованием отличия от нуля дисперсии решающей статистики **Z**, которое на практике всегда выполняется и для неоднородных выборок.

Наличие существенного перескока через пороги в момент принятия решения приводит к тому, что вероятности ошибок оказываются существенно меньше значений, определяемых вальдовскими формулами (4.1) и (4.2). Расчет оптимальных порогов при этом усложняется, однако он всегда возможен с применением тех или иных численных методов (см. § 4.2). Полученные таким способом алгоритмы сохраняют свою эффективность во всем диапазоне отношений сигнал-шум, вплоть до момента вырождения последовательной процедуры в одношаговую.

Непосредственное применение критерия Вальда к задачам различения сложных гипотез часто оказывается малоэффективным [87, 152, 153]. Однако к настоящему времени разработан ряд методов, позволяющих сохранить преимущества последовательного анализа и при решении задач со сложными гипотезами (см. § 4.3, 4.4).

Таким образом, последовательный критерий отношения правдоподобия может служить основой для синтеза эффективных алгоритмов, применимых для решения широкого круга задач, условия которых не полностью совпадают с условиями теоремы Вальда—Вольфовитца. Получаемые на этой основе процедуры требуют меньшего в среднем объема выборки по сравнению с другими известными критериями, хотя строгое доказательство их оптимальности в настоящее время отсутствует.

4.2. Методы расчета характеристик последовательных процедур различения простых гипотез

4.2.1. Средняя длительность последовательного анализа Вальда для гипотезы и альтернативы

Одной из важнейших характеристик последовательной процедуры Вальда является ее средняя длительность (математическое ожидание числа шагов процедуры) в случаях H_0 и H_1. Сокращение среднего объема выборки при последовательном анализе по сравнению с выборкой, необходимой для обнаружения по критерию Неймана—Пирсона, является одним из побуждающих мотивов к внедрению этого решающего правила в различные устройства автоматического обнаружения сигналов.

Для независимой однородной выборки x накопленное значение решающей статистики Z_n в момент принятия решения представляет сумму случайного числа одинаково распределенных слагаемых. Поэтому справедливы следующие соотношения для математических ожиданий [159]:

$$\mathrm{M}[n|H_{0,1}] = \mathrm{M}[Z_n|H_{0,1}]/\mathrm{M}[z_i|H_{0,1}]. \qquad (4.4)$$

Для близких гипотез (слабого сигнала), когда перескок порогов решающей статистикой является пренебрежимо малой величиной, можно считать, что в момент окончания процедуры величина Z_n равна A или B с вероятностями соответственно α_1, $1-\alpha_1$ в случае H_0 и $1-\beta_1$, β_1 в случае H_1. Поэтому $M[Z_n|H_0] \approx \alpha_1 A + (1-\alpha_1)B$, $M[Z_n|H_1] \approx (1-\beta_1)A + \beta_1 B$.

Величины $M[z_i|H_{0,1}]$ определяются выражениями

$$M[z_i|H_{0,1}] = \bar{z}_{0,1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\ln \frac{W(x_i|H_1)}{W(x_i|H_0)}\right] W(x_i|H_{0,1})\, dx_i .$$

Таким образом,

$$\bar{n}_0 = M[n|H_0] = \frac{\alpha_1 A + (1-\alpha_1) B}{\bar{z}_0};$$

$$\bar{n}_1 = M[n|H_1] = \frac{(1-\beta_1) A + \beta_1 B}{\bar{z}_1}. \qquad (4.5)$$

В [160, 161] показано, что в тех практически важных случаях, когда перескоком решающей статистики за пороги пренебречь нельзя (случаи средних и сильных сигналов), выражения (4.5) остаются справедливыми, если в их числитель ввести дополнительное слагаемое, равное математическому ожиданию превышения порогов решающей статистикой в момент окончания процедуры.

В случае равных вероятностей α_1 и β_1, когда расположение решающих порогов A и B оказывается симметричным относительно нуля, выигрыш в среднем объеме выборки, обеспечиваемый последовательным критерием Вальда по сравнению с эквивалентным по вероятностям ошибок критерием Неймана—Пирсона, составляет около 2 раз [149].

В прикладных задачах требования к вероятностям α_1 и β_1 часто сильно различаются, вследствие чего расположение порогов A и B оказывается несимметричным. Так, при обнаружении радиолокационных сигналов вероятность ложной тревоги $F_1 = \alpha_1$ задается много меньшей ($10^{-4} - 10^{-12}$) вероятности пропуска сигнала $1 - D_1 = \beta_1$ (0,1—0,5). В этом случае $A \gg B$ и для $\bar{z}_0 \approx \bar{z}_1$ $\bar{n}_1/\bar{n}_0 \approx A/B$, причем средняя длительность процедуры при наличии расчетного сигнала $\bar{n}_1$ приближенно равна длительности эквивалентной по вероятностям ошибок процедуры Неймана — Пирсона, а средняя длительность процедуры при отсутствии цели $\bar{n}_0$ оказывается много меньшей. Поскольку при радиолокационном наблюдении в подавляющем большинстве элементов разрешения цели отсутствуют, выигрыш от применения последовательного анализа может достигать 5—20 раз. Приближенно он оценивается выражением $\eta \approx \ln \alpha_1 / \ln \beta_1$.

4.2.2. Методы расчета характеристик последовательного обнаружения

Рассмотрим параметрическую задачу различения статистических гипотез, в которой распределения $W(x|H_0)$ и $W(x|H_1)$ отличаются только значением некоторого параметра a. При обнаружении сигнала

в качестве такого параметра, как правило, может быть выбрано отношение сигнал-шум. Тогда гипотезе H_0 об отсутствии сигнала соответствует распределение $W(x|H_0) = W(x|a = a_0 = 0)$, а альтернативе H_1 — случаю наличия сигнала с расчетным превышением a_1 над шумом — распределение $W(x|H_1) = W(x|a = a_1)$.

Всюду ниже в задачах обнаружения сигнала на фоне гауссовского шума под величиной a понимается отношение сигнал-шум по напряжению:

$$a = V_c/(\sigma\sqrt{2}), \tag{4.6}$$

где V_c — амплитуда сигнала; σ — стандартное отклонение помехи.

Фактически при наличии сигнала значение параметра a может отличаться от расчетных значений 0 и a_1. Поэтому представляет интерес зависимость мощности последовательного критерия $1 - \beta = D$ от фактического значения параметра a или отношения a/a_1, т. е. зависимость $D = D(a, a_1)$, называемая характеристикой обнаружения. Одновременно с мощностью D при изменении параметра a меняется и средняя длительность последовательной процедуры, т. е. $\bar{n} = \bar{n}(a, a_1)$.

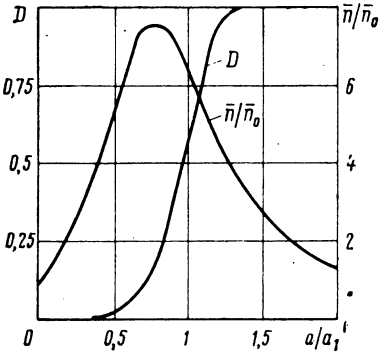


Рис. 4.3. Характеристика обнаружения и средняя длительность последовательной процедуры

Типичный вид характеристик $D(a, a_1)$ и $\bar{n}(a, a_1)$ представлен на рис. 4.3. Отметим характерный максимум зависимости $\bar{n}(a, a_1)$, называемый резонансом длительности, возникающий в некоторой точке a^* $(0 < a^* < a_1)$. В случае симметричных порогов резонанс длительности наступает при $\bar{z} = 0$, когда решающая статистика совершает случайные блуждания между порогами, не имея регулярного «сноса» к одному из них. При несимметричных порогах резонансу длительности соответствует значение a^*, при котором имеется некоторый «снос» к более удаленному порогу.

Обратим внимание, что, хотя известны примеры, когда средняя длительность последовательной процедуры в точке резонанса оказывается больше, чем для эквивалентной по надежности непоследовательной процедуры, в большинстве представляющих практический интерес задач обнаружения критерий Вальда во всем диапазоне значений $0 < a < a_1$, по крайней мере, не уступает по эффективности однопороговым критериям [87].

Характеристика обнаружения последовательного критерия для проверки гипотезы H_0 $(a = a_0)$ против альтернативы H_1 $(a = a_1)$ может быть построена с помощью исследованной Вальдом [149] оперативной характеристики этого критерия $L(a, a_1) = 1 - D(a, a_1)$. Методы точ-

ного расчета оперативной характеристики и зависимости $\bar{n}(a, a_1)$ разработаны Вальдом для следующих случаев:

1. При возможности пренебрежения эффектом перескока решающих порогов в момент принятия решения, реализующейся в случае различения близких гипотез ($a_1 \approx a_0$).

2. В случае, когда $z = \ln[W(x|a_1)/W(x|a_0)]$ может принимать только конечное число значений, кратных постоянному положительному числу d.

В общем случае Вальдом указаны лишь верхняя и нижняя оценки для $L(a, a_1)$ и $\bar{n}(a, a_1)$.

В задачах обнаружения средних и сильных сигналов, где эффектом перескока решающих порогов пренебречь нельзя, а аналитические методы расчета зависимостей $L(a, a_1)$ и $\bar{n}(a, a_1)$ недостаточно разработаны, с успехом могут применяться приближенные и численные методы, среди которых следует отметить метод пошагового вычисления вероятностей выхода решающей статистики за пороги и метод статистического моделирования (метод Монте-Карло). Объем вычислений при использовании того и другого методов быстро убывает с ростом уровня расчетного сигнала a_1.

В ряде задач расчета и проектирования последовательных обнаружителей могут представлять интерес также такие их характеристики, как функция распределения вероятностей числа шагов последовательной процедуры при наличии и отсутствии сигнала $F(n|H_{1,0})$, распределение накопленного значения решающей статистики и др. Аналитические методы расчета этих характеристик разработаны для отдельных частных случаев (см., например, [161]). В общем случае эти характеристики также определяются путем приближенных вычислений.

Перечисленные аналитические и численные методы расчета рассматриваются ниже подробнее.

Случай близких гипотез. Вальдом [149] показано, что при возможности пренебречь перескоком решающих порогов

$$L(a, a_1) = (A_1^h - 1)/(A_1^h - B_1^h), \quad h \neq 0, \tag{4.7}$$

и, следовательно,

$$D(a, a_1) = (1 - B_1^h)/(A_1^h - B_1^h), \quad h \neq 0. \tag{4.8}$$

Здесь $h = h(a, a_1)$ — ненулевой корень уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{W(x|a_1)}{W(x|a_0)}\right)^h W(x|a)\,dx = 1. \tag{4.9}$$

(При достаточно слабых ограничениях на вид функции $W(x|a)$ такой корень является единственным [149].)

При $a = a_0 = 0$ и $a = a_1$, когда по определению A_1 и B_1 $D(a = 0) = \alpha_1$ и $D(a = a_1) = 1 - \beta_1$, из (4.8) и (4.9) можно найти $h(0) = 1$; $h(a_1) = -1$. Для некоторого значения параметра a^* $(0 < a^* < a_1)$,

при котором существует только нулевое решение (4.9) $h(a^*) = 0$, раскрывая неопределенность в (4.7) и (4.8), легко получить

$$L(a^*) = A/(A - B);\ D(a^*) = -B/(A - B), \qquad (4.10)$$

где $A = \ln A_1$ и $B = \ln B_1$.

Для слабых сигналов в качестве приближенного решения (4.9) может быть принята величина [152]

$$h(a, a_1) \approx 1 - 2(a/a_1)^2,\ a, a_1 \ll 1, \qquad (4.11)$$

где a определяется выражением (4.6).

Средняя длительность последовательного анализа

$$\bar{n}(a, a_1) = \frac{AD(a, a_1) + B[1 - D(a, a_1)]}{\bar{z}(a, a_1)}. \qquad (4.12)$$

Для слабых сигналов справедливо приближение [162]

$$\bar{z}(a, a_1) \approx a_1^2 a^2 - a_1^4/2,\ a, a_1 \ll 1.$$

В точке $a = a^*$, где $h(a^*) = 0$, согласно (4.11) $a^* \approx a_1/\sqrt{2}$ и $\bar{z}(a^*, a_1) \approx 0$. При этом [149, 162]

$$\bar{n}(a^*, a_1) = -AB/[\bar{z}^2(a^*, a_1)]. \qquad (4.13)$$

В случае $A = B$ эта точка соответствует «резонансу длительности».

При сильно различающихся требованиях к вероятностям ошибок первого и второго рода α_1 и β_1 пороги последовательной процедуры несимметричны: при $\alpha_1 \ll \beta_1$ ($\alpha_1 \to 0(\beta_1)$)

$$A = \ln\frac{1-\beta_1}{\alpha_1} \to \infty;\ B = \ln\frac{\beta_1}{1-\alpha_1} \to \ln\beta_1;$$

при $\beta_1 \ll \alpha_1$ ($\beta_1 \to 0(\alpha_1)$)

$$A = \ln\frac{1-\beta_1}{\alpha_1} \to \ln\frac{1}{\alpha_1};\ B = \ln\frac{\beta_1}{1-\alpha_1} \to -\infty.$$

Для этого случая Вальдом [149] исследована характеристическая функция числа шагов последовательной процедуры n, из которой при нормальном распределении накапливаемых значений решающей статистики z получена аппроксимация распределения длительности последовательного анализа, имеющая следующую форму:

$$p(n) \approx W_c(y)/\bar{n},$$

где $y = n/\bar{n}$,

$$W_c(y) = \sqrt{c/(2\pi)}\, y^{-3/2} \exp[-(c/2)(y + y^{-1} - 2)] \qquad (4.14)$$

— плотность распределения Вальда, табулированного в [163]. Параметр c этого распределения определяется величиной конечного порога процедуры:

$$c = K\bar{z}/M_2[z] = (\bar{n})^2/M_2[n],$$

где

$$K=\begin{cases}\ln\beta_1,\ \alpha_1=O(\beta_1),\\ \ln 1/\alpha_1,\ \beta_1=O(\alpha_1),\end{cases}\quad \bar{n}=\frac{K}{\bar{z}},\quad M_2[n]=K\frac{M_2[z]}{(\bar{z})^3}; \qquad (4.15)$$

$M_2(x)$ — дисперсия.

В случае слабых сигналов, когда n и $\bar{n}$ велики, распределение Вальда хорошо аппроксимирует $p(n)$ и при произвольном распределении z, что придает ему более универсальный характер. Практически в задачах обнаружения сигнала распределение Вальда дает удовлетворительную точность при $\bar{n}\geqslant 5\div 10$ и решающих порогах, различающихся по абсолютному значению в несколько раз.

В асимптотике (с ростом c) величина $n/\bar{n}$ становится нормальной $(1,\ 1/c)$. При $c\to\infty$ имеем $W_c(y)\to\delta(y-1)$. При фиксированном c и увеличении y плотность $W_c(y)\approx\exp(-cy/2)$, при $c\to 0$ плотность $W_c(y)\to\delta(y)$.

Приведенные выражения дают возможность определить основные характеристики вальдовской процедуры последовательного анализа при обнаружении слабых сигналов.

Случай дискретных приращений решающей статистики, кратных постоянному числу. Расчетные соотношения, полученные Вальдом для случая приращений решающей статистики, кратных постоянному положительному числу, могут быть непосредственно применены к задачам последовательного обнаружения сигналов, когда накопление решающей статистики производится в цифровой форме. Цифровое накопление решающей статистики предполагает ее предварительное квантование. Методы квантования могут быть различны, и, в частности, при большом динамическом диапазоне сигналов и помех может использоваться сетка из многих неравномерно размещенных порогов квантования. Однако во всех случаях накапливаемые в цифровой форме значения решающей статистики оказываются кратными младшему разряду ее цифрового представления.

Будем предполагать, что единица младшего разряда соответствует приращению решающей статистики z на величину d. При этом все значения решающей статистики, накапливаемые в памяти, кратны d. Ниже, оперируя квантованными значениями z, будем полагать $d=1$.

Пусть весь диапазон значений z разбит на интервалы квантования δ_i, причем попаданию z в интервал δ_i соответствует квантованная величина $z_{\delta i}=id=i$, где i — целое число. Обозначим вероятность события $z\in\delta_i$ через p_i. Тогда распределение $z_{\delta i}$ задается совокупностью p_i, имеющей место при рассматриваемом отношении сигнал-шум a: $P(z_{\delta i}=i|a)=p_i(a)$. Будем полагать, что все возможные i удовлетворяют условию $-g_1\leqslant i\leqslant g_2$, где g_1 и g_2 — положительные целые числа. Через Z_n обозначим накопленные значения квантованной решающей статистики в момент принятия решения на n-м шаге последовательной процедуры.

Величина Z_n удовлетворяет следующему тождеству Вальда [149]:

$$M\{e^{Z_n t}[\varphi(t)]^{-n}\}=1, \qquad (4.16)$$

где $\varphi(t) = M[e^{zt}]$ — производящая функция моментов величины z. При весьма слабых ограничениях на свойства распределения z, налагаемых условиями леммы Вальда [149], существует единственное действительное значение $t = h$, при котором $\varphi(h) = 1$. При этом (4.16) принимает вид

$$M[\exp(Z_n h)] = 1. \tag{4.17}$$

Условия (4.17) и $\varphi(h) = 1$ позволяют найти распределение Z_n и $\overline{n} = M[n]$. Суммируя затем вероятности Z_n, соответствующие превышению верхнего порога, легко получить значение характеристики обнаружения $D(a, a_1)$ для рассматриваемого значения a. Ниже описывается методика расчета этих величин.

Обозначим через c_j, где j — натуральные числа, возможные значения Z_n, расположенные в порядке возрастания, через ξ — вероятности c_j. Множество c_j состоит из целых чисел

$$[B] - g_1 + 1,\ [B] - g_1 + 2, \ldots, [B] - 1,\ [B],\ [A],\ [A] + 1,\ \ldots,\ [A] + g_2 - 2,\ [A] + g_2 - 1,$$

а множество соответствующих вероятностей есть

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{g_1-1}, \xi_{g_1}, \xi_{g_1+1}, \xi_{g_1+2}, \ldots, \xi_{g_1+g_2-1}, \xi_{g_1+g_2}.$$

Здесь $[A]$ — наименьшее целое число, не меньшее, чем A, а $[B]$ — наибольшее целое число, не большее, чем B (A и B — решающие пороги для квантованной статистики). Общее число возможных значений c_j составляет $g = g_1 + g_2$.

Условие $\varphi(h) = 1$ можно записать в виде

$$\varphi(h) = \sum_i p_i e^{ih} = 1 \text{ или } \sum_{i=-g_1}^{g_2} p_i s^i = 1, \tag{4.18}$$

где $s = e^h$. Обозначая g корней этого уравнения через s_i ($i = -g_1, \ldots, g_2$), условие (4.17) можно развернуть в систему g линейных уравнений относительно неизвестных ξ_j:

$$\sum_{j=1}^{g} \xi_j s_i^{c_j} = 1,\ i = -g_1, \ldots, g_2. \tag{4.19}$$

Таким образом, отыскание распределения Z_n сводится к нахождению корней уравнения (4.18) и решению системы (4.19). Затем легко определяются характеристика обнаружения

$$D(a, a_1) = \sum_{j=g_1+1}^{g} \xi_j(a, a_1) \tag{4.20}$$

и математическое ожидание числа шагов процедуры

$$\overline{n}(a, a_1) = M[Z_n(a, a_1)]/M[z(a, a_1)] = \sum_{j=1}^{g} \xi_j c_j / M[z(a, a_1)]. \tag{4.21}$$

Чтобы избежать трудностей, связанных с отысканием корней уравнения (4.18), целесообразно пользоваться методом Гиршика [149, 164]. При этом, умножая $\sum_i p_i s^i - 1$ на s^{g_1}, а $\sum_j \xi_j s^{c_j} - 1$ на $s^{g_1-[B]-1}$, получаем соответственно полиномы $f(s)$ и $F(s)$ степеней g и $g+[A]-[B]-2$. Поскольку в соответствии с (4.18) и (4.19) любой корень $f(s)$ является одновременно и корнем $F(s)$, справедливо представление

$$F(s) = f(s) f_1(s), \tag{4.22}$$

где $f_1(s) = k_0 + k_1 s + \ldots + k_{[A]-[B]-2} s^{[A]-[B]-2}$ — вспомогательный полином степени $[A]-[B]-2$. Условие равенства коэффициентов при всех степенях s в правой и левой частях (4.22) приводит к системе $g+[A]-[B]-1$ линейных уравнений с таким же числом неизвестных $\xi_1, \ldots, \xi_g, k_0, k_1, \ldots, k_{[A]-[B]-2}$, из которой могут быть определены вероятности ξ_j. Таким образом, ценой увеличения числа уравнений системы (4.19) на $[A]-[B]-1$ удается избежать решения уравнения (4.18) степени g.

Отметим некоторые особенности полученной системы $g+[A]-[B]-1$ уравнений, облегчающие ее решение.

Структура соотношения (4.22) такова, что из системы могут быть выделены $[A]-[B]-1$ уравнений относительно неизвестных $k_0, k_1, \ldots, k_{[A]-[B]-2}$, не содержащих других неизвестных. Решением этой последней системы определяются коэффициенты k_l. Остальные g уравнений исходной системы таковы, что все ξ_j непосредственно выражаются через p_i и k_l. Следовательно, точное решение задачи требует решения системы лишь $[A]-[B]-1$ линейных алгебраических уравнений, матрица коэффициентов которой имеет вид

$$\begin{bmatrix} p_0-1 & p_{-1} & p_{-2} & \ldots \\ p_1 & p_0-1 & p_{-1} & \ldots \\ p_2 & p_1 & p_0-1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix},$$

т. е. $a_{ij} = p_0 - 1$ $(i=j)$; $a_{ij} = p_{i-j}$ $(i \neq j)$. Переменной последовательности уравнений матрица преобразуется в симметрическую. Правая часть системы представляет столбец нулей с единственной строкой, содержащей -1.

Возможность практического использования рассмотренного метода ограничена лишь объемом вычислений, связанных с решением системы уравнений высокого порядка, который на единицу меньше числа единиц младшего разряда, размещающихся между решающими порогами.

Приводимые примеры поясняют рассмотренную методику.

Пример 1. Набор возможных значений и вероятности z_δ заданы таблицей

$z_\delta = i =$	-1,	0,	1,	2,	4,
$p_i = p_{-1}$,	p_0,	p_1,	p_2,	p_4.	

Заданы также $A = 3$, $B = -0{,}5$, следовательно $[A] = 3$, $[B] = -1$.

Из таблицы видно, что $g_1 = 1$, $g_2 = 4$. Возможные значения Z_n:

$$Z_n = c_j = -1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,$$
$$\xi_j = \underbrace{\xi_1}_{H_0},\ \underbrace{\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5}_{H_1}.$$

Условие (4.18): $p_{-1}s^{-1} + p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + p_4 s^4 = 1$. Условие (4.19):

$$\xi_1 s_i^{-1} + \xi_2 s_i^3 + \xi_3 s_i^4 + \xi_4 s_i^5 + \xi_5 s_i^6 = 1,\ i = 1, \ldots, 5;$$

$$f(s) = p_{-1} + (p_0 - 1)s + p_1 s^2 + p_2 s^3 + p_4 s^5;$$

$$F(s) = \xi_1 - s + \xi_2 s^4 + \xi_3 s^5 + \xi_4 s^6 + \xi_5 s^7;$$

$$f_1(s) = k_0 + k_1 s + k_2 s^2.$$

Условие (4.22):

1. $\xi_1 = k_0 p_{-1}$;
2. $-1 = k_0 (p_0 - 1) + k_1 p_{-1}$;
3. $0 = k_1 (p_0 - 1) + k_1 p_0 + k_2 p_{-1}$;
4. $0 = k_2 (p_0 - 1) + k_1 p_1 + k_0 p_2$;
5. $\xi_2 = k_1 p_2 + k_2 p_1$;
6. $\xi_3 = k_0 p_4 + k_2 p_2$;
7. $\xi_4 = k_1 p_4$;
8. $\xi_5 = k_2 p_4$.

Система уравнений 2—4 позволяет определить k_0, k_1, k_2:

$$\begin{bmatrix} p_0 - 1 & p_{-1} & 0 \\ p_1 & p_0 - 1 & p_{-1} \\ p_2 & p_1 & p_0 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда $k_0 = \Delta_1/\Delta$; $k_1 = \Delta_2/\Delta$; $k_2 = \Delta_3/\Delta$, где определители

$$\Delta = (p_0 - 1)^3 - 2p_1 p_{-1}(p_0 - 1) + p_{-1}^2 p_2;\ \Delta_1 = p_1 p_{-1} - (p_0 - 1)^2;$$
$$\Delta_2 = p_1 (p_0 - 1) - p_2 p_{-1};\ \Delta_3 = p_2 (p_0 - 1) - p_1^2.$$

Из уравнений 1, 5—8

$$\xi_1 = p_{-1}\frac{\Delta_1}{\Delta};\ \xi_2 = p_2\frac{\Delta_2}{\Delta} + p_1\frac{\Delta_3}{\Delta};\ \xi_3 = p_4\frac{\Delta_1}{\Delta} + p_2\frac{\Delta_3}{\Delta};$$

$$\xi_4 = p_4\frac{\Delta_2}{\Delta};\ \xi_5 = p_4\frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Легко проверить, что если удовлетворяется условие нормировки $\sum_j p_j = 1$, то выполняется и условие $\sum_j \xi_j = 1$. При этом

$$D(a, a_1) = \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5;\ \overline{n}(a, a_1) = \frac{-\xi_1 + 3\xi_2 + 4\xi_3 + 5\xi_4 + 6\xi_5}{-p_{-1} + p_1 + 2p_2 + 4p_4}.$$

Здесь предполагается, что от a и a_1 зависят исходные вероятности p_i, а следовательно и ξ_j.

Пример 2. Распределение z_δ задано таблицей (вариант интервалов квантования, целесообразный для построения последовательного обнаружителя, работающего в диапазоне значений a_1, меняющихся от 0,5 до 5):

$z_\delta = i = -64,\ -32,\ -16,\ -8,\ -4,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,$

$p_i = p_{-64},\ p_{-32},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ p_{128};$

$B = -37$ соответствует требованию $D_1 \approx 0{,}9$; $A = 104$ соответствует требованию $\alpha_1 = F_1 = 10^{-6}$; $[B] = -37$; $[A] = 104$; $g_1 = 64$; $g_2 = 128$; $g = 192$;

$$c_j = -100, -99, \ldots, -37, 104, 105, \ldots, 230, 231;$$

$$\xi = \underbrace{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{64},}_{\text{принимается } H_0} \underbrace{\xi_{65}, \xi_{66}, \ldots, \xi_{191}, \xi_{192};}_{\text{принимается } H_1}$$

$$F(s) = \xi_1 + \xi_2 s + \ldots + \xi_{64} s^{63} - s^{100} + \xi_{65} s^{204} + \ldots + \xi_{192} s^{331};$$

$$f(s) = p_{-64} + p_{-32} s^{32} + p_{-16} s^{48} + p_{-8} s^{56} + p_{-4} s^{60} + p_{-2} s^{62} + p_{-1} s^{63} + (p_0 - 1) s^{64} + p_1 s^{65} + p_2 s^{66} + p_4 s^{68} + p_8 s^{72} + p_{16} s^{80} + p_{32} s^{96} + p_{64} s^{128} + p_{128} s^{192};$$

$$f_1(s) = k_0 + k_1 s + k_2 s^2 + \ldots + k_{139} s^{139}.$$

Система 140 уравнений для определения $k_0 - k_{139}$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} a_{ij} = p_0 - 1 \ (i = j) \\ a_{ij} = p_{i-j} \ (i \neq j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \vdots \\ k_{139} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решение системы требует порядка 10^6 операций умножения и деления.

Метод пошагового расчета характеристик последовательной процедуры обнаружения сигнала. Для решения многих задач, связанных с расчетом параметров последовательных обнаружителей и последовательных процедур, представляют интерес не только характеристики обнаружения и зависимости средней длительности последовательного анализа от отношения сигнал-шум, но и распределения накопленных значений решающей статистики и длительности процедуры. Эти распределения необходимы, например, при расчете характеристик многоканальных процедур, при оценке амплитуды сигнала, обнаруженного по последовательному правилу [203], при исследовании свойств усеченных последовательных процедур и пр.

В случае, когда отношение сигнал-шум не является малым, приращение логарифма отношения правдоподобия за один шаг процедуры сравнимо с решающими порогами A и B и средняя длительность последовательной процедуры мала. При этом нормализации накопленного значения решающей статистики не происходит, а ее превышение над решающим порогом в момент принятия решения не может исключаться из рассмотрения как пренебрежимо малая величина. Отыскание характеристик последовательной процедуры в этом случае может производиться прямым расчетом вероятностей выхода на n-м шаге накопленного значения решающей статистики Z_n за решающие пороги A и B. Такой расчет при заданных параметрах распределений помехи и смеси помехи с сигналом всегда может быть выполнен численно или мето-

дом статистического моделирования (методом Монте-Карло). В случае удачной аппроксимации распределения Z_n для некоторых практически важных задач расчет может быть проведен аналитически [160, 161].

В общем виде вероятности выхода накопленного значения решающей статистики Z_n за пороги и распределение длительности процедуры определяются следующими соотношениями.

Пусть $W(z)$ — плотность вероятности логарифма отношения правдоподобия z на каждом шаге. Тогда вероятности пересечения порогов на первом шаге

$$p_1(B) = \int_{-\infty}^{B} W(z)\,dz; \tag{4.23}$$

$$p_1(A) = \int_{A}^{\infty} W(z)\,dz. \tag{4.24}$$

Вероятность того, что процедура не окончится на первом шаге,

$$\bar{p}_1 = 1 - p_1(B) - p_1(A). \tag{4.25}$$

При переходе ко второму шагу процедуры плотность накопленного за первый шаг логарифма отношения правдоподобия

$$W_1(Z_1) = w(Z_1)/\bar{p}_1, \quad B < Z_1 < A. \tag{4.26}$$

Здесь $w(Z_1)$ — ненормированная плотность распределения Z_1, совпадающая с $W(z)$ на интервале (B, A).

Плотность величины $y = Z_1 + z$, получающейся в результате двух шагов накопления, для однородной выборки определяется сверткой

$$W_2(y) = \int_{B}^{A} W_1(x)\,W(y-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(y-x)\,W(x)\,dx. \tag{4.27}$$

Вероятности выхода величины y за пороги

$$p_2(B) = \int_{-\infty}^{B} W_2(y)\,dy; \quad p_2(A) = \int_{A}^{\infty} W_2(y)\,dy,$$

а вероятность остаться между порогами, т. е. вероятность перехода к следующему шагу процедуры,

$$\bar{p}_2 = 1 - p_2(B) - p_2(A).$$

Плотность накопленной за два шага решающей статистики

$$W_2(Z_2) = w_2(Z_2)/\bar{p}_2, \quad B < Z_2 < A,$$

где $w_2(Z_2)$ совпадает с $W_2(y)$ на (B, A).

На n-м шаге процедуры

$$y = Z_{n-1} + z; \tag{4.28}$$

$$W_n(y) = \int_{B}^{A} W_{n-1}(x)\,W(y-x)\,dx; \tag{4.29}$$

$$p_n(B) = \int_{-\infty}^{B} W_n(y)\,dy; \tag{4.30}$$

$$p_n(A) = \int_{A}^{\infty} W_n(y)\,dy; \tag{4.31}$$

$$\overline{p_n} = 1 - p_n(B) - p_n(A); \tag{4.32}$$

$$W_n(Z_n) = w_n(Z_n)/\overline{p_n},\ B < Z_n < A, \tag{4.33}$$

где $w_n(Z_n)$ совпадает с $W_n(y)$ на (B, A).

Итоговые вероятности пересечения порогов

$$P(B) = p_1(B) + \overline{p}_1 p_2(B) + \overline{p}_1\overline{p}_2\, p_3(B) + \ldots; \tag{4.34}$$

$$P(A) = p_1(A) + \overline{p}_1 p_2(A) + \overline{p}_1\overline{p}_2 p_3(A) + \ldots. \tag{4.35}$$

Вероятность окончания процедуры на n-м шаге

$$P(n) = \overline{p}_1\overline{p}_2 \ldots \overline{p}_{n-1}\,[p_n(B) + p_n(A)]. \tag{4.36}$$

На каждом шаге накопления окончание процедуры и переход к следующему шагу образуют полную группу событий. Поэтому функция распределения длительности последовательной процедуры

$$F(n) = P(\nu \leqslant n) = 1 - \overline{P}(n), \tag{4.37}$$

где $\overline{P}(n) = \overline{p}_1\overline{p}_2 \ldots \overline{p}_n$. Математическое ожидание и дисперсия длительности процедуры

$$\overline{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n\,[F(n) - F(n-1)] = \sum_{n=0}^{\infty} [1 - F(n)]; \tag{4.38}$$

$$M_2[n] = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \overline{n})^2\,[F(n) - F(n-1)]. \tag{4.39}$$

Прямой расчет по (4.28)—(4.39) позволяет определить все параметры последовательной процедуры для однородной выборки. Поскольку при большом отношении сигнал-шум последовательная процедура с большой вероятностью оканчивается за малое число шагов, такой расчет оказывается не слишком трудоемким.

Ниже рассматриваются примеры применения общей методики к задачам последовательного обнаружения двух часто встречающихся на практике типов сигнала на фоне гауссовских шумов: сигнала со случайной начальной фазой и фиксированной амплитудой V_c (нефлуктуирующего сигнала) и сигнала со случайной начальной фазой и независимо флуктуирующей от отсчета к отсчету амплитудой, имеющей рэлеевское распределение:

$$W(V_c) = \frac{V_c}{\sigma_c^2} \exp\left(-\frac{V_c^2}{2\sigma_c^2}\right)$$

(шумоподобного сигнала).

В первом случае гипотезе H_0 соответствует рэлеевское, а альтернативе H_1— райсовское распределение огибающей наблюдаемого сигнала V. Решающая ста-

тистика — логарифм отношения правдоподобия — определяется известным выражением [152]

$$z = -a_1^2 + \ln I_0(2a_1 u), \tag{4.40}$$

где $u = V/\sigma\sqrt{2}$ — нормированная огибающая сигнала.

В случае шумоподобного сигнала и для гипотезы, и для альтернативы распределение нормированной огибающей является рэлеевским, а логарифм отношения правдоподобия определяется выражением

$$z = -\ln(1+q_1^2) + q_1^2 u^2/(1+q_1^2), \tag{4.41}$$

где $q_1^2 = \sigma_c^2/\sigma^2$ — отношение средней мощности сигнала к мощности шума.

Пример 1. Обнаружение шумоподобного сигнала.

В общем случае, когда параметр q^2 наблюдаемого сигнала отличается от расчетного значения q_1^2, нормированная огибающая имеет плотность распределения

$$W(u) = \frac{2u}{1+q^2}\exp\left(-\frac{u^2}{1+q^2}\right),$$

а решающая статистика, вычисляемая в соответствии с алгоритмом (4.41), имеет плотность распределения

$$W(z) = \frac{1}{d}\exp\left(-\frac{z+b}{d}\right),\ z \geqslant -b, \tag{4.42}$$

где

$$b = \ln(1+q_1^2),\ d = q_1^2(1+q^2)/(1+q_1^2). \tag{4.43}$$

Будем предполагать, что значения порогов A и B и параметра b удовлетворяют соотношениям $B < 0$, $A > 0$ и $-n^* b \leqslant B < -(n^*-1)b$, $(k-1)b < A - B \leqslant kb$, $k \geqslant n^*$, где k и n^* — некоторые целые положительные числа. Поскольку $-b$ является минимальным значением логарифма отношения правдоподобия z для одного отсчета сигнала, n^* обозначает минимальное число шагов, за которое накопленная статистика может достигнуть нижнего порога B. Число k характеризует расстояние между порогами.

Рассмотрим случай больших сигналов, который характеризуется выполнением условия $B > -b = -\ln(1+q_1^2)$. Это условие справедливо при $q_1^2 > e^{-B} - 1$ и означает, что существует вероятность пересечения нижнего порога B на первом же шаге процедуры ($n^* = 1$).

Применяя свертку (4.27) к распределению (4.42) и учитывая в пределах интегрирования область, где подынтегральное выражение отлично от нуля, найдем плотность $w_2(y)$ для двух шагов накопления:

$$w_2(y) = \int_B^{\min(y+b,\ A)} w_1(x)\,W(y-x)\,dx = v_2(y)\times\begin{cases}(y+b-B), & B-b \leqslant y \leqslant A-b;\\ (A-B), & y \geqslant A-b.\end{cases} \tag{4.44}$$

Здесь

$$v_2(y) = \frac{1}{d^2}\exp\left(-\frac{2b+y}{d}\right). \tag{4.45}$$

Полученное распределение в точке $A - b$ имеет разрыв первой производной и является ненормированным. Для получения плотности вероятности, удовлетворяющей условию нормировки, выражение (4.44) необходимо разделить на вероятность перехода ко второму шагу накопления:

$$\bar{p}_1 = 1 - p_1(A) - p_1(B) = 1 - \int_A^{\infty} W(z)\,dz - \int_{-b}^{B} W(z)\,dz = e^{-b/d}\left(e^{-B/d} - e^{-A/d}\right). \tag{4.46}$$

Ненормированную плотность для трех шагов накопления можно получить, применяя свертку к выражениям (4.42) и (4.44). Функция $w_2(y)$ имеет разрыв первой производной в точке $A-b$ и второй производной — в точке $A-2b$. Повторяя операцию свертки, для результата i шагов накопления ($i \leqslant k+1$) находим:

$$w_i(y) = v_i(y) f_i(y), \tag{4.47}$$

где

$$f_i(y) = \begin{cases} \dfrac{(y-B+ib)^{i-1}}{(i-1)!} - \dfrac{b(y-B+ib)^{i-2}}{(i-2)!}, & B-b \leqslant y \leqslant A-(i-1)b, \\ \displaystyle\sum_{m=t}^{i-1} a_{tm} \dfrac{[y-A+(i-t)b]^{i-m-1}}{(i-m-1)!}, & A-(i-t)b \leqslant y \leqslant A- \\ & -(i-t-1)b;\ 1 \leqslant t \leqslant i-2; \\ a_{i-1,\,i-1}, & y \geqslant A-b; \end{cases} \quad i \geqslant 2 \tag{4.48}$$

$$a_{1m} = \frac{(A-B+b)^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{A-B+b}{m} - b\right);$$

$$a_{tm} = \sum_{r=0}^{m-t+1} a_{t-1,\,m-r} \frac{b^r}{r!} \text{ при } t \leqslant m,\ a_{tm} = 0 \text{ при } t > m;$$

$$v_i(y) = \frac{1}{d^i} \exp\left(-\frac{ib+y}{d}\right).$$

Функция $w_i(y)$ отлична от нуля при $y > B - b$ и имеет разрыв j-х производных в точках $A - jb$. Функция плотности вероятности $W_i(Z)$, удовлетворяющая нормировке, имеет вид

$$W_i(Z) = w_i(Z)/(\bar{p}_1 \bar{p}_2 \ldots \bar{p}_{i-1}), \tag{4.49}$$

где $\bar{p}_j$ определяется равенством (4.32). Используя (4.47)—(4.49), можно найти рекуррентное соотношение

$$\bar{p}_j = 1 - \frac{a_{j-1,\,j-1}}{d^{j-1}} \frac{\exp\left(-\dfrac{A+jb}{d}\right)}{\bar{p}_1 \bar{p}_2 \ldots \bar{p}_{j-1}} - \frac{\exp\left(-\dfrac{B+jb}{d}\right)}{\bar{p}_1 \bar{p}_2 \ldots \bar{p}_{j-1}} \times$$

$$\times \left\{\left[\frac{((j-1)b/d)^{j-1}}{(j-1)!} + \left(1 + \frac{b}{d}\right) S_1\right] \exp\frac{b}{d} - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{(jb/d)^{j-1}}{(j-1)!} + \left(1 - \frac{b}{d}\right) S_2\right]\right\}, \tag{4.50}$$

где

$$S_1 = \sum_{l=2}^{j} \frac{((j-1)b/d)^{j-l}}{(j-l)!};\quad S_2 = \sum_{l=2}^{j} \frac{(jb/d)^{j-l}}{(j-l)!}.$$

Начиная с шага $k+1$, при условии $A - kb \leqslant B$ распределение накопленного значения Z перестает менять свой характер. Действительно, если при $i \leqslant k$ степень полиномов $f_i(y)$ за счет интегрирования повышается от шага к шагу, то при $i \geqslant k+1$ интервал $(B-b,\ A-kb)$, на котором полином $f_{k+1}(y)$ имеет наивысшую степень k, лежит за пределами интегрирования при выполнении операции свертки и степень полинома $f_i(y)$ не увеличивается.

Таким образом, при $i \geqslant k+1$ плотность величины Z имеет вид

$$W_i(Z) = C_i \exp\left(-\frac{Z}{d}\right) f_i(Z), \tag{4.51}$$

где

$$f_i(Z) = \begin{cases} \alpha_{11} Z^k + \alpha_{12} Z^{k-1} + \ldots + \alpha_{1k} Z + \alpha_{1,\,k+1}, & B - b \leqslant Z \leqslant A - kb \leqslant B; \\ \alpha_{21} Z^{k-1} + \alpha_{22} Z^{k-2} + \ldots + \alpha_{2,\,k-1} Z + \alpha_{2k}, & A - kb \leqslant Z \leqslant A - (k-1)\, b; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \alpha_{k-1,1} Z^2 + \alpha_{k-1,2} Z + \alpha_{k-1,3}, & A - 3b \leqslant Z \leqslant A - 2b; \\ \alpha_{k1} Z + \alpha_{k2}, & A - 2b \leqslant Z \leqslant A - b; \\ \alpha_{k+1,1}, & Z \geqslant A - b, \end{cases} \tag{4.52}$$

т. е. $W_i(Z)$ выражается линейной комбинацией Г-распределений порядка не выше $(k+1)$-го. Коэффициенты $\alpha_{lm} = \alpha_{lm}(i)$, однако, не остаются неизменными и зависят от номера шага i. Константа C_i может быть определена из условия нормировки. Коэффициенты $\alpha_{lm}(k+1)$ определяются из (4.48). При $i \geqslant k+1$ коэффициенты $\alpha_{lm}(i+1)$ с точностью до множителя λ, исключаемого при нормировке, могут быть рекуррентно выражены через коэффициенты i-го шага с помощью уравнения

$$f_{i+1}(Z) = \lambda \int\limits_{B}^{\min(Z+b,\, A)} f_i(y)\, dy. \tag{4.53}$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях Z в правой и левой частях уравнения, получаем

при $l + m < k + 2$

$$\alpha_{lm}(i+1) = \lambda \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\alpha_{l+1,\,j+1}(i)}{k-l+1-j} C_{k-l+1-j}^{m-1-j} b^{m-1-j};$$

при $l + m = k + 2$

$$\alpha_{1m}(i+1) = \lambda \sum_{j=0}^{m-2} \frac{\alpha_{2,\,j+1}(i)}{m-1-j} \left(b^{m-1-j} - B^{m-1-j}\right); \tag{4.54}$$

$$\alpha_{l1}(i+1) = \lambda f_{i+1}(A-b);$$

$$\alpha_{lm}(i+1) = \lambda \sum_{j=0}^{m-2} \frac{\alpha_{l+1,\,j+1}(i)}{m-1-j} \left\{b^{m-1-j} - [A-(m-1)\,b]^{m-1-j}\right\} + \lambda f_{i+1}(A-mb),\quad l > 1,\ m > 1,$$

где

$$f_{i+1}(A-kb) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha_{2,\,j+1}(i)}{k-j} \left\{[A-(k-1)\,b]^{k-j} - B^{k-j}\right\};$$

$$\underset{1 \leq m < k}{f_{i+1}}(A-mb) = \sum_{t=1}^{k-m} \sum_{j=0}^{k-t-1} \frac{\alpha_{2+t,\,j+1}(i)}{k-j-t} \left\{[A-(k-1-t)\,b]^{k-j-t} - [A-(k-t)\,b]^{k-j-t}\right\} + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha_{2,\,j+1}(i)}{k-j} \left\{[A-(k-1)\,b]^{k-j} - B^{k-j}\right\}. \tag{4.55}$$

Здесь $C_s^r = \dfrac{s!}{r!\,(s-r)!}$ обозначает число сочетаний из s по r.

Функция (4.52) при $i \to \infty$ сходится к предельной функции $f(Z)$. Одновременно $\lim\limits_{i\to\infty} C_i = C$, $\lim\limits_{i\to\infty} \alpha_{lm}(i) = \alpha_{lm}$. Предельная функция $f(Z)$ определяется интегральным уравнением

$$f(Z) = \lambda \int_B^{\min(Z+b,\ A)} f(y)\,dy\,. \tag{4.56}$$

Уравнение (4.56) с помощью равенств (4.54) сводится к системе однородных линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_{lm}; эта система имеет нетривиальные решения, если существует действительное положительное собственное значение λ. Собственные значения определяются из условия равенства нулю определителя системы, что приводит к уравнению степени $k(k+1)/2$ относительно λ. Аналитически решение его удается получить лишь при $k \leqslant 2$. Последнее условие выполняется при $b \geqslant (A-B)/2$ или при $q_1^2 \geqslant \geqslant \exp[(A-B)/2] - 1$.

При $k = 1$ установившееся распределение имеет вид

$$W_s(Z) = \frac{\exp(-Z/d)}{d\exp\left(\dfrac{b-B}{d}\right) - (A-b)\exp\left(\dfrac{b-A}{d}\right)} \times \begin{cases} (Z+b-B), & B-b \leqslant Z \leqslant A-b; \\ 1, & Z \geqslant A-b. \end{cases} \tag{4.57}$$

При $k = 2$ собственные значения

$$\lambda_{1,2} = (A - B \pm \sqrt{(A-B)^2 - 2(A-b-B)^2})/(A-b-B)^2,$$

а собственные решения

$$\alpha_{31} = \alpha_{21}/\lambda_{1,2},\ \alpha_{22} = (b - A + 1/\lambda_{1,2})\,\alpha_{21}.$$

Отсюда с помощью (4.54) вычисляются коэффициенты α_{11}, α_{12}, α_{13}:

$$\alpha_{11} = \frac{\lambda_{1,2}}{2}\,\alpha_{21};\ \alpha_{12} = \lambda_{1,2}(\alpha_{21}\,b + \alpha_{22}) = \alpha_{21}(2\lambda_{1,2}\,b - \lambda_{1,2}\,A + 1);$$

$$\alpha_{13} = \lambda_{1,2}\left[\frac{\alpha_{21}}{2}(b^2 - B^2) + \alpha_{22}(b-B)\right] = \lambda_{1,2}\,\alpha_{21}\,\frac{b-B}{2}\left(3b + B - 2A + \frac{2}{\lambda_{1,2}}\right).$$

Таким образом, все коэффициенты предельной функции $f(Z)$ определяются через α_{21}. Последний может быть отнесен в множитель C и определен из условия нормировки. При этом, поскольку по смыслу уравнения (4.56) собственное значение λ представляет установившееся значение вероятности незавершения процедуры на i-м шаге, искомой предельной функции плотности вероятности $W_s(Z)$ отвечает лишь то значение λ, которое лежит в интервале (0, 1) и приводит к неотрицательной при $Z > B - b$ функции $f(Z)$.

Следующий числовой пример дает представление о скорости сходимости решения к установившемуся: $A = 4$, $B = -1$, $b = 3$ ($d = 19,1$, $k = 2$):

$$W(Z) = \frac{0{,}855}{19{,}1}\exp\left(-\frac{z}{19{,}1}\right),\ \bar{p}_1 = 0{,}208;$$

$$W_2(Z) = 0{,}961\cdot 10^{-2}\exp\left(-\frac{Z}{19{,}1}\right) \times \begin{cases} (Z+4), & [-4, 1]; \\ 5, & [1, \infty), \end{cases} \bar{p}_2 = 0{,}206;$$

$$W_3(Z) = 1{,}038\cdot 10^{-2}\exp\left(-\frac{Z}{19{,}1}\right) \times \begin{cases} (0{,}1Z^2 + 1{,}4Z + 4), & [-4, -2]; \\ (Z+3{,}6), & [-2, 1]; \\ 4{,}6, & [1, \infty), \end{cases} \bar{p}_3 = 0{,}215;$$

$$W_4(Z)=0{,}01\exp\left(-\frac{Z}{19{,}1}\right)\times\begin{cases}(0{,}1088Z^2+1{,}435Z+4), & [-4,\ -2];\\ (Z+3{,}57), & [-2,\ 1];\\ 4{,}565, & [1,\ \infty);\end{cases}$$

$$\lambda=\bar{p}_\infty=0{,}2195;$$

$$W_\infty(Z)=0{,}01\exp\left(-\frac{Z}{19{,}1}\right)\times\begin{cases}0{,}1098Z^2+1{,}439Z+4, & [-4,\ -2];\\ Z+3.56, & [-2,\ 1];\\ 4{,}56, & [1,\ \infty).\end{cases}$$

Легко видеть, что, начиная с третьего шага, устанавливается структура распределения, а коэффициенты распределения четвертого шага отличаются от установившихся лишь в третьем знаке.

При сигналах меньшего уровня, для которых условие $B>-b=-\ln(1+q_1^2)$ не выполняется, $n^*>1$ и характер изменения распределения накопленного значения решающей статистики от шага к шагу несколько отличается от рассмотренного выше, поскольку на первых n^* шагах нижний порог B не формирует распределение Z. При этом до n^*-го шага включительно, в отличие от (4.47),

$w_i(y)=v_i(y)\,\varphi_i(y)$, где

$$\varphi_i(y)=\begin{cases}\dfrac{(y-ib)^{i-1}}{(i-1)!}, & -ib\leqslant y\leqslant A-(i-1)\,b;\\ \displaystyle\sum_{m=t}^{i-1}c_{tm}\frac{[y-A+(i-t)\,b]^{i-1-m}}{(i-1-m)!}, & A-(i-t)\,b\leqslant y\leqslant A-\\ -(i-t-1)\,b,\ 1\leqslant t\leqslant i-2; & \\ c_{i-1,\,i-1}, & y\geqslant A-b;\end{cases}$$

$$c_{1m}=\frac{(A-b)^m}{m!},\quad c_{tm}=\sum_{r=0}^{m-t-1}c_{t-1,\,m-r}\frac{b^r}{r!}\ \text{при}\ t\leqslant m;$$

$c_{t,m}=0$ при $t>m$, $v_i(y)$ определяется (4.48).

Нормированная плотность определяется соотношением (4.49), причем вместо (4.46) и (4.50) при $j<n^*$ справедливы выражения

$$\bar{p}_1=1-\exp\left(-\frac{A+b}{d}\right);$$

$$\bar{p}_j=1-\frac{1}{\bar{p}_1\bar{p}_2\ldots\bar{p}_{j-1}}\,\frac{c_{j-1,\,j-1}}{d^{j-1}}\exp\left(-\frac{A+jb}{d}\right).$$

Начиная с n^*-го шага накопления становится возможным пересечение нижнего порога B. При этом на всех последующих шагах минимально возможное значение Z равно $B-b$. Поскольку при последовательном анализе переход к следующему шагу осуществляется лишь в случае, когда Z остается между порогами, интеграл свертки в дальнейшем берется от B до $\min(y+b,\ A)$.

Для (n^*+1)-го шага накопления

$$w_{n^*+1}(y)=v_{n^*+1}(y)\,[\varphi_{n^*+1}(y)-\psi_1(y)],\ y>B-b,$$

где $\psi_1(y)=(B+n^*\,b)^{n^*}/n^*!$.

Повторяя операцию свертки, для дальнейших шагов получаем

$$w_{n^*+l}(y)=v_{n^*+l}(y)\,[\varphi_{n^*+l}(y)-\psi_l(y)],\ y>B-b.$$

Здесь

$$\psi_l(y) = \sum_{j=1}^{l} g_{n^*+l-j} f_j(y), \quad g_l = \frac{(B+tb)^l}{l!}, \quad f_1(y) = 1,$$

а $f_j(y)$ при $j \geqslant 2$ определяется выражением (4.48). Для $v_{n^*+l}(y)$ и $\varphi_{n^*+l}(y)$ справедливы прежние выражения, причем $\varphi_{n^*+l}(y)$ равна нулю при $y < B - b$.

Степень полинома $\varphi_l(y)$ увеличивается от шага к шагу при $l \leqslant k+1$, после чего интервал, на котором $\varphi_l(y)$ имеет высшую степень, выходит за пределы интегрирования при выполнении операции свертки и степень $\varphi_l(y)$ перестает повышаться. Степень полинома ψ_l возрастает до шага $n^* + k + 1$ включительно, после чего ее дальнейшее возрастание также прекращается. Таким образом, как и в случае сильных сигналов, $W_l(Z)$ выражается линейной комбинацией Г-распределений порядка не выше $(k+1)$-го. Остаются справедливыми приведенные выше выражения (4.51)—(4.56) и способ отыскания предельного распределения.

Заметим, что наличие предельных распределений накопленного значения решающей статистики и установившихся значений вероятности незавершения процедуры $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \bar{p}_n$ означает, что для больших n функция $\bar{p}(n)$ ведет себя как убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $\lambda < 1$, т. е. $\bar{p}(n) = \lambda \times \bar{p}(n-1)$ и, следовательно, в соответствии с (4.37)

$$F(n) = 1 - \lambda(1 - F(n-1)). \tag{4.58}$$

Необходимость расчета значений $F(n)$, близких к единице, возникает, в частности, в связи с расчетом длительности многоканальных последовательных процедур, где выражение (4.58) может успешно использоваться.

В случае, когда решается задача необнаружения ($q = 0$), для значений n, которым соответствует вероятность незавершения процедуры $\bar{p}(n)$, существенно большая, чем вероятность ложной тревоги, можно пренебречь наличием верхнего порога, если $\alpha_1 \ll \beta_1$. Это приводит к упрощению рассмотренной выше методики расчета. Как показано в [160], при $B > -b$

$$W_n(y) = \frac{(y-B+nb)^{n-2}(y-B+b)}{d^n(n-1)!}\exp\left(-\frac{y+nb}{d}\right);$$

$$F(n) = 1 - \left[\Gamma\left(n, \frac{nb}{d}\right) - \frac{b}{d}\Gamma\left(n-1, \frac{nb}{d}\right)\right]\exp\left(-\frac{B}{d}\right) =$$

$$= 1 - \left[\frac{(nb/d)^{n-1}}{(n-1)!} - \left(\frac{b}{d} - 1\right)\sum_{m=0}^{n-2}\frac{(nb/d)^m}{m!}\right]\exp\left(-\frac{B+nb}{d}\right), \tag{4.59}$$

где $\Gamma(n, x)$ — табулированная неполная Г-функция. При $n > 10$, используя формулу Стирлинга для приближенного вычисления факториалов и учитывая относительный вес слагаемых в скобке перед экспонентой, последнее выражение можно привести к простому виду

$$F(n) \simeq 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left[1 + \left(\frac{b}{d}\right)^{n-1} - \left(\frac{b}{d}\right)^{n-2}\right]\exp\left(n - \frac{B+nb}{d}\right).$$

Для случая наличия сигнала на основании выражений (4.51), (4.52) можно получить формулы математического ожидания и дисперсии длительности n_A последовательной процедуры, заканчивающейся пересечением верхнего порога A [160].

Действительно, из (4.51), (4.52) следует, что нормированная плотность распределения значений решающей статистики Z, превысивших верхний порог, независимо от номера шага имеет вид

$$W(Z_A)=\frac{1}{d}\exp\left(-\frac{Z_A-A}{d}\right),\ Z_A\geqslant A,$$

с параметрами

$$\bar{Z}_A=A+d;\ \mathrm{M}_2[Z_A]=d^2=\mathrm{M}_2[z_1]. \tag{4.60}$$

Подставляя выражение $\bar{Z}_A$ в (4.4) с учетом (4.42), (4.43), получаем $\bar{n}_A = \bar{Z}_A/\bar{z}_1 = (A+d)/(d-b)$.

Для вычисления дисперсии $\mathrm{M}_2[n_A]$ найдем дисперсию вспомогательной переменной $\varphi(n_A;\ Z_A) = n_A\bar{z}_1 - Z_A$. Поскольку величины n_A и Z_A независимы,

$$\mathrm{M}_2[\varphi(n_A;\ Z_A)] = \bar{z}_1^2\,\mathrm{M}_2[n_A]+\mathrm{M}_2[Z_A]. \tag{4.61}$$

С другой стороны, как показано в [159],

$$\mathrm{M}_2[n_A\bar{z}_1-Z_A]=\bar{n}_A\,\mathrm{M}_2[z_1]. \tag{4.62}$$

Приравнивая (4.61) и (4.62), с учетом (4.60) находим

$$\mathrm{M}_2[n_A]=(n-1)\,\mathrm{M}_2[z_1]/\bar{z}_1^2.$$

Полученные выражения для $\bar{n}_A$ и $\mathrm{M}_2[n_A]$ являются точными при произвольном отношении сигнал-шум q_1^2. При $q_1^2\to 0$ они переходят в вальдовские соотношения (4.15).

Пример 2. Обнаружение нефлуктуирующего сигнала со случайной начальной фазой.

Способом, подобным рассмотренному в примере 1, точное и приближенное аналитические выражения плотности $W(Z)$ могут быть получены не только для экспоненциального распределения z (Г-распределения первого порядка), но и для Г-распределений более высокого порядка, хотя выкладки при этом усложняются. Так же как и в случае шумоподобного сигнала, удается получить относительно простые приближенные выражения для случая отсутствия сигнала при $\alpha_1 \ll \beta_1$ и значениях n, ограниченных условием $\overline{P}(n) \gg \alpha_1$.

Г- распределение достаточно высокого порядка может использоваться для аппроксимации распределения z в случае нефлуктуирующего сигнала. Ниже рассматривается приближенный расчет, основанный на такой аппроксимации.

В соответствии с (4.40) $z = -a_1^2 + \ln I_0(2a_1u)$; $W(u) = 2u\exp(-u^2)$, $(a = a_0 = 0)$. При этом плотность z определяется выражением

$$W(z)=W(u)\frac{du}{dz}=\frac{u}{a_1}\exp(-u^2)\frac{I_0(2a_1u)}{I_1(2a_1u)}. \tag{4.63}$$

Здесь $u = u(z) = z^{(-1)}$ — функция, обратная (4.40).

При $z < -a_1^2$ имеем $W(z) = 0$, при $z = -a_1^2$ имеем $W(z) = 1/a_1^2$. В интервале практически интересных значений a_1 функция, обратная (4.40), явно не выражается. Приближенно (4.63) можно представить первым членом ряда Лаггера. Это приводит к следующему аппроксимирующему Г-распределению:

$$W(\xi)=\frac{1}{\Gamma(l)\,d}\left(\frac{\xi}{d}\right)^{l-1}\exp\left(-\frac{\xi}{d}\right),\ \xi\geqslant 0,$$

где $\xi = z + a_1^2$, $\Gamma(l)$ — полная Г-функция; параметры d и l определяются через дисперсию $M_2[z]$ и математическое ожидание $\bar{z}$:

$$d = M_2[z]/(\bar{z} + a_1^2); \quad l = (\bar{z} + a_1^2)^2/M_2[z].$$

Вид плотности (4.63) и аппроксимирующих Г-распределений представлен на рис. 4.4 соответственно штриховыми и сплошными линиями. На рис. 4.5 приведены зависимости d и l от a_1.

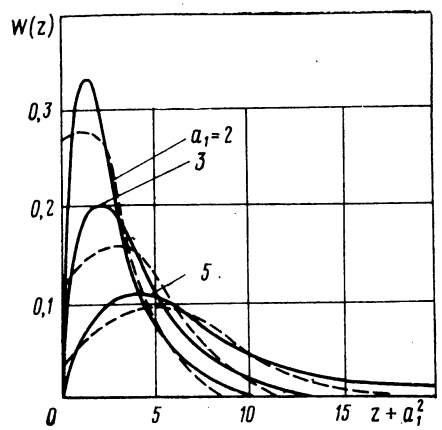


Рис. 4.4. Плотность вероятности накопленной статистики для сигнала со случайной начальной фазой

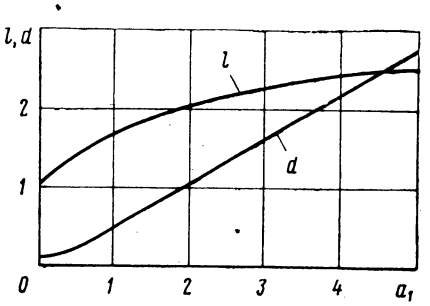


Рис. 4.5. Зависимость параметров аппроксимирующего Г-распределения от уровня сигнала a_1

Пренебрегая наличием верхнего порога и используя (4.28)—(4.37), можно показать, что при отсутствии сигнала и $B > -a_1^2$

$$W_n(y) \approx \left[\frac{(y + na_1^2 - B)^{nl-1}}{\Gamma(nl)\, d^{nl}} - \frac{a_1^2 (n-1)(y + na_1^2 - B)^{nl-2}}{(nl-1)\,\Gamma(nl-1)\, d^{nl}}\right] \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{y + na_1^2}{d}\right);$$

$$y = Z_{n-1} + z_n \geqslant -na_1^2;$$

$$F(n) \approx 1 - \left[\Gamma\left(nl, \frac{na_1^2}{d}\right) - \frac{(n-1)\,a_1^2}{(nl-1)\,d}\,\Gamma\left(nl-1, \frac{na_1^2}{d}\right)\right] \exp\left(-\frac{B}{d}\right), \quad (4.64)$$

где $\Gamma(k, \nu)$ — неполная Г-функция. При $nl \to \infty$ с учетом асимптотического равенства

$$\Gamma(k, \nu) \underset{k\to\infty}{\simeq} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{\nu-k}{\sqrt{k}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = 1 - \Phi\left(\frac{\nu-k}{\sqrt{k}}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ — интеграл вероятности, (4.64) преобразуется к виду

$$F(n) \simeq 1 - \left\{1 - \Phi(x) - \frac{a_1^2 (n-1)}{d\,(nl-1)}\left[1 - \Phi\left(x + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]\right\} \exp\left(-\frac{B}{d}\right),$$

где $x = \frac{a_1^2}{d} - l\sqrt{\frac{n}{l}}$.

Используя (4.38) и (4.39), можно также получить

$$\bar{n} = \exp\left(-\frac{B}{d}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left[\Gamma\left(nl, \frac{na_1^2}{d}\right) - \frac{a_1^2(n-1)}{d(nl-1)}\Gamma\left(nl-1, \frac{na_1^2}{d}\right)\right];$$

$$M_2[n] = \exp\left(-\frac{B}{d}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(n-\bar{n})^2\left[\Gamma\left(nl, \frac{na_1^2}{d}\right) - \right.$$

$$-\frac{a_1^2(n-1)}{d(nl-1)}\Gamma\left(nl-1, \frac{na_1^2}{d}\right) - \Gamma\left((n-1)l, \frac{(n-1)a_1^2}{d}\right) -$$

$$\left.-\frac{a_1^2(n-2)}{d(nl-2)}\Gamma\left((n-1)l-1, \frac{(n-1)a_1^2}{d}\right)\right].$$

В качестве продуктивного приближенного метода расчета распределения длительности последовательного анализа, близкого к рассмотренному методу пошаговых вычислений, отметим развитый в [165] метод, основанный на применении результатов теории выбросов случайных процессов к случайной последовательности накопленных значений логарифма отношения правдоподобия. Ввиду трудности расчета многомерных функций распределения этой последовательности используются независимое, односвязное и двухсвязное приближения, что позволяет в ряде задач, в частности в случае шумоподобного сигнала, приближенно выразить $F(n)$ через табулированные и элементарные функции.

Метод Монте-Карло. Статистический эксперимент на ЭВМ является наиболее универсальным методом расчета характеристик процедур последовательного обнаружения во всех случаях, когда аналитический расчет выполнить не удается. Им целесообразно пользоваться также для проверки точности приближенных аналитических выражений и оценки справедливости сделанных при их выводе допущений. По объему необходимых вычислений этот метод с учетом высокого быстродействия современных ЭВМ является приемлемым для большинства практически интересных задач, кроме случая малого расчетного сигнала или определения вероятности очень редких событий (например, вероятности ложной тревоги порядка $10^{-4} - 10^{-8}$).

Общие вопросы проведения вычислений на ЭВМ методом Монте-Карло подробно рассмотрены в монографиях [166—168], а цифровому моделированию задач статистической радиотехники посвящена монография [13]. В этих источниках можно найти и обширную библиографию. Исследование характеристик последовательной процедуры методом статистического эксперимента проводилось в [152, 169, 170] и др.

Для проведения статистического эксперимента на ЭВМ составляется алгоритм вычислений, представляющий математическую модель последовательного обнаружителя. Вычисления в соответствии с этим алгоритмом осуществляются над вырабатываемой ЭВМ последовательностью случайных чисел, статистические характеристики которой выбираются так, чтобы она имитировала последовательность отсчетов принимаемого сигнала с заданными свойствами. Многократное повторение статистического эксперимента с независимыми реализациями сигнала позволяет получить эмпирические частоты, средние и распределения, которые могут использоваться в качестве оценок соответствующих характеристик последовательной процедуры.

Необходимое число опытов определяется заданной точностью результата. Так, доверительными границами для вероятности правильного обнаружения $D(a, a_1)$ при получении оценки $\hat{D}$ из N опытов являются [171]

$$D_{1,2} \approx \frac{\hat{D}N + 0{,}5\nu^2 \mp \nu\sqrt{\hat{D}(1-\hat{D})N + 0{,}25\nu^2}}{N+\nu^2}. \qquad (4.65)$$

Здесь ν определяется равенством $\Phi(\nu) = 2\eta$, где $\Phi(\nu)$ — интеграл вероятности; 2η — вероятность события $D \in [D_1, D_2]$, т. е. доверительный уровень границ для D. Эти границы являются приближенными и достаточно надежны при условиях $\hat{D}N \geqslant 4$ и $(1-\hat{D})N \geqslant 4$. Для $\hat{D} < 4/N$ следует несколько понизить нижнюю, а при $\hat{D} > 1 - 4/N$ повысить верхнюю границу доверительного интервала.

Точность оценки $\hat{n} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} n_j$ средней длительности последовательного анализа $\bar{n}$, которая распределена по нормальному закону, определяется ее среднеквадратическим отклонением $\sigma(\hat{n}) = \sigma(n)/\sqrt{N}$. Вместо неизвестного $\sigma(n)$ может использоваться выборочная оценка этой величины

$$S = \left[\frac{N\sum_{i=1}^{N} n_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} n_i\right)^2}{N(N-1)}\right]^{1/2},$$

определяемая в ходе статистического эксперимента. Доверительные границы для $\bar{n}$ находятся при этом по таблицам распределения Стьюдента с $N-1$ степенью свободы [171].

Вероятности $P(n)$ окончания процедуры за n шагов оцениваются эмпирическими частотами $\hat{P}(n) = N_n/N$, где N_n — число опытов из общего их числа N, которые заканчиваются на шаге n. Доверительные интервалы для $P(n)$, как и для $D(a, a_1)$, могут оцениваться с помощью (4.65). При малых a_1 и больших длительностях последовательного анализа значения N_n могут оказываться малыми, а для отдельных n — равными нулю даже при большом числе опытов N.

В случаях, когда наблюдаются значения $N_n < 4$, целесообразно перейти от расчета дискретных вероятностей $P(n)$ к определению непрерывной функции распределения длительности последовательного анализа $F(y)$, которая сглаживает истинную ступенчатую функцию $F(n)$. Приближением $F(y)$ является эмпирическая функция распределения $F_N(y)$. Последняя может строиться в виде ступенчатой функции $F_N(y) = \frac{1}{N}\sum_{k \leqslant y} N_k$. В качестве доверительных границ для $F(y)$ могут быть приняты $F_N(y) \pm \varepsilon$, где ε при доверительном уровне этих границ 2η приближенно определяется асимптотической формулой [171] $\varepsilon = \left(\frac{1}{2N}\ln\frac{2}{1-2\eta}\right)^{1/2}$.

Ниже приводятся примеры алгоритмов расчета, иллюстрирующие применение метода Монте-Карло к расчету характеристик последовательного обнаружения.

Пример 1. Характеристики обнаружения шумоподобного сигнала. Параметры задачи: расчетное отношение средней мощности сигнала к мощности помехи q_1^2, наблюдаемое отношение q^2, решающие пороги A, B, число опытов N. Выборка предполагается независимой и однородной, помеха — гауссовской.

1. Выбирается случайное число R_i, равномерно распределенное в интервале (0,1).

2. Для отношения сигнал-шум q^2 формируется случайное число $u_i = \sqrt{-(1+q^2)\ln R_i}$, распределенное по закону Рэлея:

$$W(u_i) = \frac{2u_i}{1+q^2} \exp\left(\frac{-u_i^2}{1+q^2}\right).$$

3. В соответствии с (4.41) вычисляется логарифм отношения правдоподобия

$$z_i = -\ln(1+q_1^2) + q_1^2 u_i^2/(1+q_1^2).$$

4. Величина z_i сравнивается с решающими порогами A и B. При $z_i \geqslant A$ принимается альтернатива H_1, при $z_i \leqslant B$ — гипотеза H_0, при $B < z_i < A$ пп. 1—3 повторяются, образуется $\sum_i z_i$, которая сравнивается с порогами A и B. Процедура повторяется, пока на некотором шаге n не будет принято решение в пользу H_1 или H_0.

5. Вычисления по пп. 1—4 повторяются N раз. Рассчитываются эмпирические оценки $\widehat{D}(a, a_1) = N_1/N$ (N_1 — число решений в пользу H_1) и $\widehat{n}(a, a_1) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} n_j$.

Пример 2. Характеристики обнаружения нефлуктуирующего сигнала со случайной начальной фазой. Параметры задачи: расчетное отношение сигнал-шум по напряжению a_1, наблюдаемое отношение a, решающие пороги A, B, число опытов N. Выборка предполагается независимой и однородной, шум—гауссовским.

1. Выбирается пара независимых случайных чисел R_i' и R_i'', равномерно распределенных в интервале (0, 1).

2. Для отношения сигнал-шум a формируется случайное число [167]

$$u_i = \sqrt{-\ln R_i' + a^2 + 2a\sqrt{-\ln R_i'}\cos 2\pi R_i''},$$

распределенное по закону Райса:

$$W(u_i) = 2u_i \exp(-u_i^2 - a^2) I_0(2a u_i).$$

3. В соответствии с (4.40) рассчитывается логарифм отношения правдоподобия для заданного a_1: $z_i = -a_1^2 + \ln I_0(2a_1 u_i)$.

Пункты 4—5 аналогичны примеру 1.

На рис. 4.6—4.8 представлены рассчитанные методом Монте-Карло характеристики обнаружения $D(a/a_1)$ и средние длительности $\bar{n}(a/a_1)$ для сигнала с постоянной амплитудой и случайной фазой, шумоподобного сигнала, а также для сигнала с медленно — от процедуры к процедуре — флуктуирующей амплитудой*. Расчет выполнен для

* Авторы выражают благодарность Г. Н. Соловьеву, Е. К. Кузьминой и Г. А. Профатиловой за помощь в моделировании, расчетах и обсуждении результатов.

значений отношений сигнал-шум, отмеченных на осях абсцисс рисунков. Значения каждой из соответствующих ординат кривых получены усреднением результатов 1000 опытов. Для определения максимума $\bar{n}$ при некоторых значениях a_1 проводился расчет в дополнительных точ-

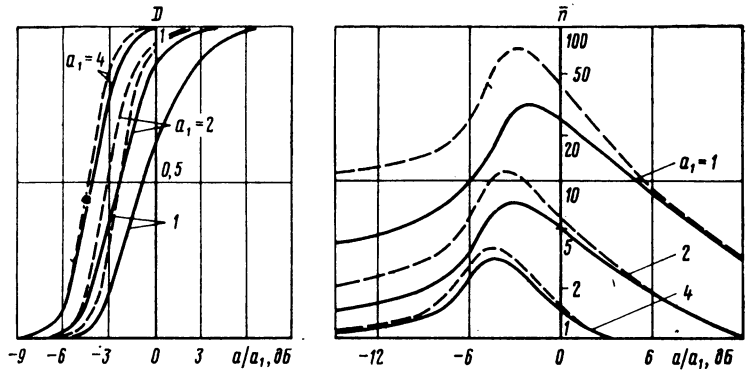


Рис. 4.6. Характеристики и средняя длительность обнаружения для сигнала с постоянной амплитудой и случайной начальной фазой

ках. Использовались вальдовские пороги, соответствующие $F_1 = \alpha_1 = 10^{-6}$ и $D_1 = 1 - \beta_1 = 0{,}5$ (сплошные линии) и 0,9 (штриховые линии). Характеристики обнаружения сигнала с медленными флуктуациями амплитуды рассчитаны в предположении, что в качестве ква-

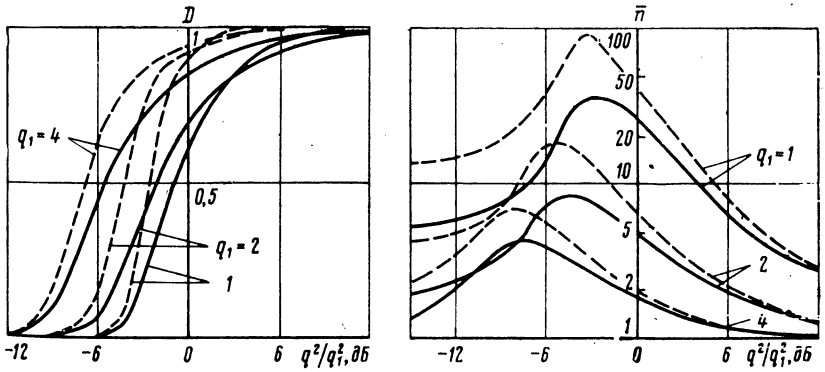


Рис. 4.7. Характеристики и средняя длительность обнаружения для шумоподобного сигнала с рэлеевскими флуктуациями амплитуды

зиоптимальной для этого случая используется решающая статистика, оптимальная для сигнала с постоянной амплитудой и случайной фазой. Флуктуации амплитуды предполагаются рэлеевскими:

$$W(a_1/\bar{a}) = (2a/\bar{a})\exp[-(a/\bar{a})^2].$$

Здесь $\bar{a}$ — среднее значение a.

Отметим некоторые особенности полученных зависимостей.

Как следует из графиков, флуктуации сигнала влияют на характеристику обнаружения последовательной процедуры примерно так же, как и в процедуре Неймана — Пирсона: наибольшую крутизну имеет характеристика обнаружения сигнала с постоянной амплитудой, на-

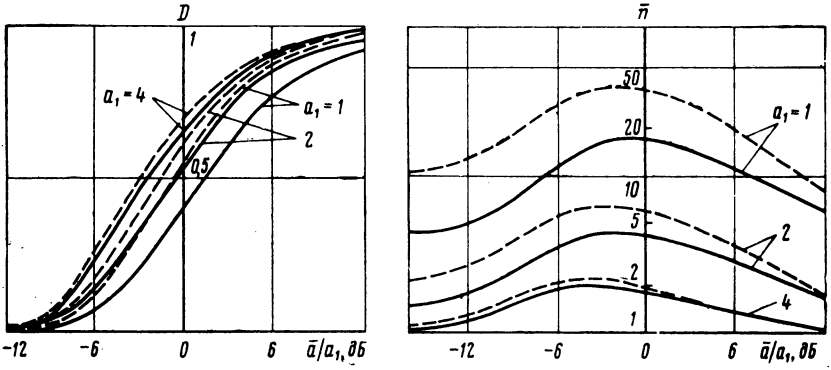


Рис. 4.8. Характеристики и средняя длительность обнаружения для сигнала с медленными рэлеевскими флуктуациями амплитуды при использовании обнаружителя, оптимального для сигнала с постоянной амплитудой и случайной начальной фазой

именьшую — медленно флуктуирующего сигнала. Энергетические потери из-за медленных флуктуаций (по сравнению с нефлуктуирующим сигналом) зависят от требуемой вероятности обнаружения и расчетного отношения сигнал-шум (для $D = 0{,}5$ потери составляют 1,5—3 дБ, для $D = 0{,}9$ достигают 6 — 7 дБ).

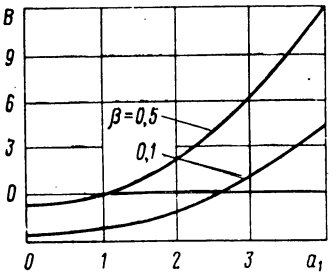


Рис. 4.9. Зависимость нижнего порога от уровня сигнала для сигнала со случайной начальной фазой

Средняя длительность последовательной процедуры для сигналов с расчетной мощностью мало зависит от типа флуктуаций. В точке «резонанса» длительность наблюдения нефлуктуирующего и быстрофлуктуирующего сигналов примерно в 2 раза превышают длительность обнаружения расчетного сигнала, медленные флуктуации приводят к усреднению зависимости $\bar{n}(\bar{a}/a_1)$, поэтому ее максимум менее выражен. При гипотезе H_0 среднее время принятия решения $\bar{n}_0$ для нефлуктуирующего и медленно флуктуирующего сигналов одинаково, поскольку алгоритм их обнаружения, как уже указывалось, строится на основе одной и той же решающей статистики $z(u)$. Для быстрофлуктуирующего сигнала длительность $\bar{n}_0$ оказывается больше, чем для нефлуктуирующего, и это различие нарастает с увеличением отношения сигнал-шум, что связано с большей дисперсией решающей статистики $z(u)$.

Эффект превышения порога в момент принятия решения при $a_1 > 1$ приводит к заметному расхождению между фактической вероятностью

правильного обнаружения $D = 1 - \beta$ для $a = a_1$ и расчетной величиной $D_1 = 1 - \beta_1$, соответствующей вальдовскому порогу. Методом Монте-Карло могут быть найдены значения нижнего порога последовательной процедуры, обеспечивающие при $a = a_1$ расчетную величину β. На рис. 4.9 представлена зависимость от a_1 порогов B, обеспечивающих $\beta = 0{,}1$ и $0{,}5$ для сигнала с фиксированной амплитудой и случайной начальной фазой. Использование скорректированного нижнего порога приводит при $a_1 = 2 \div 3$ к сокращению средней длительности процедуры необнаружения в 1,2—1,5 раза. При $a_1 = 4 \div 5$ и α порядка 10^{-6} нижний порог приближается к верхнему $A =$

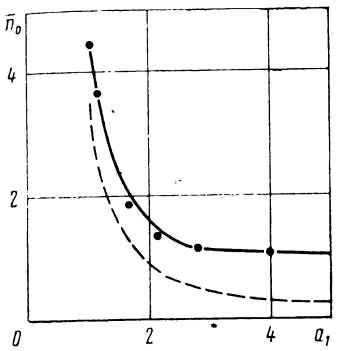


Рис 4.10. Средняя длительность последовательного обнаружения:
——— расчет по (4.38), (4.64);
— — — — расчет по (4.15);
● — эксперимент

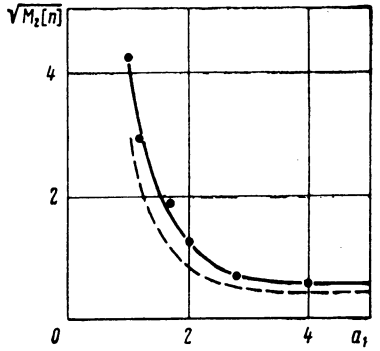


Рис. 4.11. Дисперсия длительности последовательного обнаружения:
——— расчет по (4.39), (4.64);
— — — — расчет по (4.15);
● — эксперимент

$= \ln[(1 - \beta_1)/\alpha_1]$, и последовательная процедура вырождается в однопороговую с принятием решения на первом же шаге.

Отметим в заключение данного раздела возможность экспериментальной проверки методом Монте-Карло точности приближенных аналитических выражений для различных характеристик последовательного анализа. В качестве примера на рис. 4.10, 4.11 представлены зависимости математического ожидания и дисперсии длительности последовательной процедуры от отношения сигнал-шум, рассчитанные по формулам (4.15) и (4.64) и полученные моделированием на ЭВМ.

4.3. Последовательное обнаружение при наличии мешающих параметров

4.3.1. Общие положения

Априорная неопределенность параметров различаемых распределений типична для большинства задач обнаружения сигнала. Для ряда задач характерна также нестационарность параметров сигналов и помех в процессе обнаружения, приводящая к неоднородности анализируемой выборки. В этих условиях различаемые гипотезы становятся

сложными. Ниже в данном разделе рассматриваются задачи последовательного обнаружения, для которых неопределенные параметры являются мешающими, т. е. такими, оценка которых не представляет самостоятельного интереса.

Как указывалось в гл. 3, к статистическим критериям, применяемым для обнаружения сигнала в условиях априорной неопределенности, предъявляется требование малой чувствительности к значениям мешающих параметров. Критерии, уровень значимости α и мощность $1 - \beta$ которых не зависят от неизвестных параметров, называются относительно них инвариантными. Если при справедливости альтернативы вероятность отклонения гипотезы не меньше, чем верхняя грань уровня значимости на множестве ϑ значений неопределенных параметров, т. е. $\inf\limits_{\vartheta} (1 - \beta) \geqslant \sup\limits_{\vartheta} \alpha$, то соответствующий критерий называется несмещенным. Несмещенные критерии, обеспечивающие постоянство α на некотором множестве значений параметров, называются на этом множестве подобными [87].

Среди инвариантных и несмещенных представляют интерес критерии, обладающие наибольшей по сравнению с другими мощностью. Критерии, обладающие этим свойством в некоторой области значений параметров альтернативного распределения, называются равномерно наиболее мощными (РНМ) в этой области. Однако статистические задачи, для которых существуют РНМ инвариантные или несмещенные критерии, скорее исключение, чем правило [87]. Поиск критериев, обладающих высокой мощностью и малой чувствительностью к мешающим параметрам, является одним из актуальных направлений развития теории статистических решений.

Критерии, устойчивые к мешающим параметрам, могут строиться с использованием выборок как фиксированного, так и регулируемого в ходе наблюдения объема. Основное различие в свойствах тех и других заключается при этом в следующем. При фиксированных объемах выборок не могут быть сохранены одновременно уровень значимости и мощность критерия в условиях, когда из-за мешающего параметра различие между гипотическим и альтернативным распределениями уменьшается. Наилучший результат, которого при этом можно достигнуть, это построение РНМ несмещенного или подобного критерия. Так, широко используемый в практике обнаружения сигналов критерий Неймана—Пирсона является РНМ подобным. Однако падение мощности критерия, вызванное сближением различаемых распределений, может быть скомпенсировано увеличением объема выборки, и наилучшим результатом при этом является РНМ инвариантный критерий.

Последовательный анализ является методом, допускающим необходимое регулирование объема выборки в ходе наблюдения, чем может быть обеспечено постоянство мощности критерия при сближении распределений. При этом для ряда условий обеспечивается и минимальный в среднем объем выборки. Таким образом, на основе последовательного анализа для задач с мешающими параметрами могут строиться инвариантные критерии, обладающие в среднем наибольшей мощностью. Некоторой платой за качество критерия при этом является

случайность объема выборки, дисперсия которого увеличивается с ростом априорной неопределенности мешающего параметра. Заметим, что применение последовательного анализа обычно обеспечивает не строгую инвариантность, а ограниченность вероятностей ошибок α и β сверху некоторыми расчетными значениями α_1 и β_1, связанными с решающими порогами. По мере взаимного удаления различаемых распределений α и β уменьшаются вследствие возрастающей роли эффекта «перескока» порогов решающей статистикой.

Задача построения последовательного критерия при наличии мешающих параметров впервые рассматривалась Вальдом [149]. В качестве способа преодоления априорной неопределенности при этом, так же как и в случае выборок фиксированного объема, использовалось усреднение различаемых распределений, рассматриваемых при фиксированных значениях мешающих параметров как условные, по вероятности условий. Полученные таким образом распределения не содержат неизвестных параметров и далее могут рассматриваться как соответствующие простой гипотезе и альтернативе.

В тех случаях, когда значения неизвестных параметров $\boldsymbol{\vartheta}$, соответствующие различным элементам выборки, являются независимыми случайными величинами с априори известным законом распределения, операция перехода к простым гипотезам состоит в усреднении одномерных распределений выборочных значений $W(x|\boldsymbol{\vartheta}, H_{1,0})$ по априорному распределению $W(\boldsymbol{\vartheta})$. Примером может служить усреднение двумерного распределения отсчетов огибающей и фазы для смеси сигнала и шума по неизвестной начальной фазе сигнала, которая при некогерентном накоплении является независимой от отсчета к отсчету и равномерно распределенной в интервале $(0,2\pi)$.

Иногда с целью упрощения предположение о независимости значений мешающих параметров $\boldsymbol{\vartheta}_1, \ldots, \boldsymbol{\vartheta}_i$ для последовательности элементов выборки $x_1, \ldots, x_i$ используется и в тех случаях, когда фактически эти значения не являются независимыми. Оптимальная обработка при зависимых значениях $\boldsymbol{\vartheta}$ заключается в усреднении функций правдоподобия выборочного вектора $\mathbf{x}$ по многомерному априорному распределению последовательности значений мешающего параметра $W(\boldsymbol{\vartheta}_1, \ldots, \boldsymbol{\vartheta}_i)$.

В большинстве прикладных задач априорные распределения мешающих параметров неизвестны или весьма протяженны. В этих случаях операция усреднения функций правдоподобия каждого элемента выборки неприменима или приводит к существенному сближению гипотез и снижению мощности критерия. Более мощный критерий может быть получен, если при вычислении безусловных функций правдоподобия выборочного вектора $W(\mathbf{x}|H_{1,0})$ использовать имеющиеся априорные сведения о функциональной или вероятностной связи значений параметра $\boldsymbol{\vartheta}_i$, соответствующих последовательности элементов x_i выборки $\mathbf{x}$. Такое вычисление может выполняться рекуррентно путем усреднения условного распределения $W(x_i|\boldsymbol{\vartheta}_i, H_{1,0})$ i-го элемента выборки по апостериорному распределению $W(\boldsymbol{\vartheta}_i|\mathbf{x}_{i-1})$, рассчитанному на основании всех ранее полученных элементов выборки $x_1, \ldots, x_{i-1}$, или, если по выборке $\mathbf{x}_{i-1}$ может быть вычислена до-

статочная оценка $\widehat{\vartheta}_{i-1}$ параметра ϑ_i, по апостериорному распределению $W(\vartheta|\widehat{\vartheta}_{i-1})$.

Можно показать [3], что указанные рекуррентные алгоритмы эквивалентны усреднению совместной плотности вероятности выборки $W(\mathbf{x}_i|\vartheta)$ по совместному априорному распределению последовательности значений мешающего параметра $W(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_i)$. Алгоритмы, полученные таким способом, называют алгоритмами совместного обнаружения-оценивания [3].

Состоятельные оценки могут и непосредственно подставляться в функции правдоподобия вместо неизвестных значений мешающих параметров. Последующее формальное применение байесовских решающих правил обеспечивает при этом минимум максимального отклонения среднего риска от его значений в статистически определенной задаче [2]. (Примером такого подхода может служить использование нормального распределения с подставленной в него оценкой неизвестной дисперсии в задаче Стьюдента [173].)

Заметим, что формально получаемые по выборочным данным оценки мешающих параметров альтернативного распределения становятся истинными оценками лишь после вынесения решения в пользу альтернативы. В противном случае они оказываются псевдооценками, влияние которых на алгоритм обнаружения необходимо дополнительно исследовать в каждой конкретной задаче.

Рекуррентный расчет отношения правдоподобия Λ_i удобен с точки зрения практической реализации, особенно при последовательном анализе, когда возможность вынесения решения в пользу H_0 или H_1 проверяется на каждом шаге. Отношение правдоподобия выборочного вектора $\mathbf{x}_i$, полученного на i-м шаге эксперимента, имеет при этом вид

$$\Lambda_i = \lambda_i \Lambda_{i-1}, \tag{4.66}$$

где отношение правдоподобия i-го элемента выборки

$$\lambda_i = \frac{\int\limits_{\Theta} W(x_i \mid \vartheta, H_1)\, W(\vartheta \mid \widehat{\vartheta}_{i-1})\, d\vartheta}{\int\limits_{\Theta} W(x_i \mid \vartheta, H_0)\, W(\vartheta \mid \widehat{\vartheta}_{i-1})\, d\vartheta} = \frac{W(x_i \mid \widehat{\vartheta}_{i-1}, H_1)}{W(x_i \mid \widehat{\vartheta}_{i-1}, H_0)}; \tag{4.67}$$

$$W(\vartheta \mid \widehat{\vartheta}_{i-1}) = W(\widehat{\vartheta}_{i-1} \mid \vartheta) W(\vartheta) \Big/ \int\limits_{\Theta} W(\widehat{\vartheta}_{i-1} \mid \vartheta)\, W(\vartheta)\, d\vartheta; \tag{4.68}$$

$W(\vartheta)$ — априорное распределение параметра ϑ.

Получение оценок ϑ приводит к сужению области апостериорного распределения неизвестных параметров ϑ, но не устраняет априорную неопределенность полностью, так как отыскание апостериорных распределений $W(\vartheta|\widehat{\vartheta})$ (4.68) также требует знания априорного распределения $W(\vartheta)$. Однако если априорное распределение $W(\vartheta)$ много «шире» условного распределения оценки $W(\widehat{\vartheta}|\vartheta)$, которое полностью определяется методом ее получения и является известным, то форма $W(\vartheta)$ мало влияет на апостериорное распределние $W(\vartheta|\widehat{\vartheta})$ и в выборе

$W(\hat{\theta})$ может быть допущен значительный произвол. Действительно, функция $W(\hat{\theta})$ формально может трактоваться как вес, с которым усредняются частные значения потерь при расчете средних потерь некоторого критерия обнаружения относительно байесовского, оптимального для статистически определенной задачи. Тогда ее выбор более зависит от важности разных значений потерь с точки зрения экспериментатора, чем от реальных факторов, порождающих априорное распределение $W(\hat{\theta})$ [2].

В силу изложенного в качестве априорных могут выбираться некоторые стандартные распределения, в том числе несобственные, не удовлетворяющие условию нормировки (например, равномерное в бесконечной области). Удобен также выбор априорного распределения $W(\hat{\theta})$, принадлежащего некоторому сопряженному семейству, обладающему тем свойством, что при любом размере выборки n и любых значениях ее элементов апостериорное распределение принадлежит тому же семейству, что и $W(\hat{\theta})$ [155].

Подстановка выбранных таким образом априорных распределений в формулу Байеса (4.68) дает апостериорные распределения, удовлетворяющие нормировке, причем для условных распределений $W(\widehat{\theta}|\hat{\theta})$, достаточно «узких» по сравнению с выбранным априорным $W(\hat{\theta})$, из этой формулы следует приближенное равенство $W(\hat{\theta}|\widehat{\theta}) \approx W(\widehat{\theta}|\hat{\theta})$.

Точность оценки мешающего параметра повышается, если кроме выборки, по которой производится обнаружение сигнала, для получения оценки может быть использована дополнительная обучающая выборка, особенно если последняя является классифицированной, т. е. известно, к какому из различаемых распределений она относится. В прикладных задачах возможность получения классифицированной помеховой обучающей выборки возникает, когда в частотно-временно́м пространстве имеется область, где существование сигнала невозможно или маловероятно, а статистические характеристики помехи являются такими же, как и в области, где сигнал может присутствовать (например, период обратного хода развертки импульсной радиолокационной станции).

Отметим, что использование для расчета функций правдоподобия $W(x_i|\hat{\theta}_{i-1}, H_{1,0})$ всей информации о неизвестном параметре, полученной к i-му шагу, часто сопряжено со значительным усложнением алгоритма обнаружения. В этих случаях целесообразен переход к квазиоптимальным оценкам $\widehat{\theta}_{i-1}$, использующим наиболее существенную часть информации о параметре $\hat{\theta}$ на i-м шаге. Например, при наличии обучающих выборок может оказаться оправданным отказ от использования дополнительной информации о $\hat{\theta}$, содержащейся в решающей выборке.

В последующих пунктах данного раздела рассматриваются примеры последовательных правил обнаружения при наличии мешающих параметров. Ввиду практической важности большое внимание уделяется случаю неизвестного энергетического параметра σ гауссовского шума с некоррелированными отсчетами. Сигнал предполагается квазидетерминированным.

4.3.2. Последовательное обнаружение сигнала при неизвестной мощности шума и отсутствии классифицированных обучающих выборок

В данном разделе рассматривается последовательное обнаружение сигнала на фоне гауссовских помех неизвестной мощности в случае, когда получение классифицированной обучающей выборки невозможно. При такой постановке задачи для обнаружения сигнала используются статистики, родственные t-статистике Стьюдента.

В задачах с однородными выборками могут применяться упрощенные последовательные процедуры с малым числом управлений ходом наблюдения [154]. Одной из наиболее известных вырожденных последовательных процедур, использующих однократную коррекцию объема выборки, является двухвыборочный тест Ч. Стейна [174]. Этот тест предназначен для проверки гипотезы H_0: $a = a_0$ о значении среднего a нормальной выборки с неизвестной дисперсией σ^2 (задача Стьюдента) и является инвариантным относительно σ^2.

Тест Стейна оперирует независимой выборкой $x_1, x_2, \ldots, x_i$ из нормальной совокупности $N(a, \sigma^2)$. Первоначально используется выборка фиксированного объема n_0, по которой рассчитывается выборочная дисперсия [171]

$$s^2 = \frac{1}{n_0 - 1}\left\{\sum_{i=1}^{n_0} x_i^2 - \frac{1}{n_0}\left(\sum_{i=1}^{n_0} x_i\right)^2\right\}. \qquad (4.69)$$

Далее определяется полный объем выборки n:

$$n = \max\{[s^2/h] + 1,\ n_0\},$$

где $[y]$ — целая часть числа y; $h > 0$ — константа, заранее выбираемая исходя из желательного вида характеристики обнаружения (мощностной функции, см. ниже). После получения $n - n_0$ дополнительных выборочных значений по выборке объема n рассчитывается решающая статистика

$$T = \frac{\bar{x} - a_0}{\sqrt{h}} = d + \frac{a - a_0}{\sqrt{h}}, \text{ где } \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad d = \frac{\bar{x} - a}{\sqrt{h}}.$$

Статистика d имеет распределение Стьюдента t_{n_0-1} с $n_0 - 1$ степенью свободы [88]. Гипотеза H_0 отклоняется, если $|T| > C(\alpha/2)$, где порог $C(\alpha/2)$ выбирается из условия $P(t_{n_0-1} > C(\alpha/2)) = \alpha/2$. Здесь α — уровень значимости для двусторонней альтернативы.

Характеристика обнаружения (мощностная функция)

$$D(|a - a_0|) = p\{|t_{n_0-1} + (a - a_0)/\sqrt{h}| > C(\alpha/2)\}$$

не зависит от σ. В силу того, что распределение Стьюдента для t_{n_0-1} является четным унимодальным с вершиной в начале координат, эта характеристика имеет минимум, равный α при $a = a_0$, соответствующем гипотезе H_0. Таким образом, критерий Стейна является несмещенным и инвариантным к значениям параметра σ.

Проверка статистики T на условие $T > C(\alpha)$, где $P(t_{n_0-1} > C(\alpha)) = \alpha$, дает тест на проверку гипотезы H_0: $a = a_0$ против односторонней альтернативы $a > a_0$. При этом характеристика обнаружения $D(a) = P\{t_{n_0-1} > C(\alpha) + (a_0 - a)/\sqrt{h}\}$.

Распределение вероятностей значений случайной величины n для теста Стейна оказывается зависящим от параметра σ и определяется с помощью таблиц χ^2-распределения в соответствии с выражениями

$$P(n = n_0) = P(s^2/h < n_0) = P\{(n_0 - 1)\, s^2/\sigma^2 < n_0 (n_0 - 1) \times$$
$$\times h/\sigma^2\} = P\{\chi^2 < y\},\ y = n_0 (n_0 - 1)\, h/\sigma^2;\ P(n = \nu > n_0) =$$
$$= P(\nu \leqslant s^2/h + 1 < \nu + 1) = P\{(\nu - 1)(n_0 - 1)\, h/\sigma^2 \leqslant$$
$$\leqslant \chi^2 < \nu (n_0 - 1)\, h/\sigma^2\}.$$

Задача оптимизации объема первой выборки n_0 критерия Стейна рассматривалась в [175, 176]. Возможно также отыскание экстремума одного из параметров задачи: α, β, $\bar{n}(H = H_{0,1})$ — при условии, что остальные параметры ограничены некоторыми числами. Например, может отыскиваться минимум $\bar{n}(H = H_0)$ при условии $\alpha \leqslant \alpha_0$, $\beta \leqslant \beta_0$, $\bar{n}(H = H_1) \leqslant n_1$. Способы решения таких условно-экстремальных задач, основанные на методе множителей Лагранжа, рассмотрены в [154]. Там же показано, что при существовании функции Лагранжа с положительными множителями условный экстремум соответствует минимуму среднего риска для некоторой байесовской задачи.

В ряде работ [98, 177, 178 и др.] предложены и исследованы различные варианты использования статистик Стьюдента и Стейна в многошаговых последовательных процедурах для проверки гипотезы о среднем нормального распределения при неизвестной дисперсии.

Так, инвариантный к параметру σ последовательный критерий может быть построен, если на каждом n-м шаге эксперимента сравнивать с вальдовскими порогами отношение правдоподобия $\lambda_n = W_1(t_n)/W_0(t_n)$ для t-статистик, вычисленных по полученной к этому шагу выборке. Здесь $W_0(t_n)$ и $W_1(t_n)$ соответственно центральное и нецентральное распределения Стьюдента с $n-1$ степенью свободы. Однако при вычислении $W_1(t_n)$ возникает трудность, связанная с тем, что параметр нецентральности $\delta = a/\sigma$ этого распределения содержит неизвестный параметр σ. Для преодоления этой трудности в [98] предлагается в качестве σ использовать σ_{max} — максимальное априорно ожидаемое значение этой величины. При этом построенный критерий оказывается минимаксным, и возникают потери в средней длительности процедуры, связанные с излишне осторожным выбором σ.

В [98, 179] предлагается компенсировать эти потери уменьшением в функции номера шага n и случайной величины S_n^2 абсолютного значения нижнего порога B для $Z_n = \ln \Lambda_n$. Показано, что при малых отношениях сигнал-шум δ и $\alpha \ll \beta$ такой способ приводит к небольшому изменению вероятности пропуска β и заметному выигрышу в среднем числе шагов последовательного анализа при решении в пользу гипотезы H_0 по сравнению со случаем постоянных порогов.

Другой способ исключения неизвестного параметра σ состоит в использовании на каждом шаге последовательного анализа некоторой обучающей выборки для его оценки [98]. При этом по результатам m наблюдений может быть вычислена выборочная дисперсия s_m^2. Затем по выборке случайного объема $k = [s_m^2/h] \geqslant m$ (h = const) образуется статистика Стьюдента—Стейна $t_k = \sqrt{k} x_k / s_m$. На этом один этап наблюдения завершается. Аналогичная последовательность операций производится на следующих этапах. Полученные статистики t_{ki} (i — номер этапа) имеют при гипотезе H_0 центральное распределение Стьюдента $W_0(t_{ki})$ с $m-1$ степенью свободы, а при альтернативе — нецентральное распределение $W_1(t_{ki})$ с параметром нецентральности a/h. С учетом независимости статистик t_{ki} критерий может строиться на основе сравнения с вальдовскими порогами логарифма отношения правдоподобия $Z_n = \sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{i=1}^{n} \ln\{W_1(t_{ki})/W_0(t_{ki})\}$.

Рассмотренный способ может использоваться при больших объемах обучающей выборки и сохраняет инвариантность не только при постоянной величине неизвестного параметра, но и при изменении σ на разных шагах последовательной процедуры. В [98] показано, что при $a/h \ll 1$ средний объем выборки такой процедуры близок к длительности последовательного анализа при известном параметре σ.

4.3.3. Адаптивное последовательное обнаружение на фоне гауссовского шума неизвестной мощности при наличии классифицированной обучающей выборки

Задача построения оптимального невырожденного последовательного решающего правила, обладающего инвариантностью, в том случае, когда неизвестное стандартное отклонение гауссовского шума σ изменяется по случайному закону σ (t), интервал корреляции которого меньше или сравним со временем наблюдения, в общем виде оказывается весьма сложной прежде всего из-за трудности поиска оптимальных решающих границ $A(t)$, $B(t)$ [3]. Эта задача существенно облегчается, если на всех шагах наблюдения имеется возможность получения классифицированной (соответствующей гипотезе H_0) обучающей выборки, на основании которой может быть вычислена текущая оценка мешающего параметра σ.

Как указывалось выше, условия для получения такой обучающей выборки имеются в тех случаях, когда помеха может считаться однородной в более широкой частотно-временной области, чем область существования полезного сигнала. Например, для импульсного сигнала, обладающего достаточно большой скважностью, оценка мощности аддитивного шума может быть получена интегрированием реализации $x(t)$ на некотором интервале времени, прилегающем к отчету x_i, относительно которого осуществляется проверка гипотез H_0 и H_1. Для узкополосного сигнала оценка интенсивности широкополосного шума может производиться в соседних частотных каналах. Иногда указанные способы измерения шума могут применяться совместно

Наличие обучающей выборки, как уже указывалось, позволяет при вычислении оценки σ_i пренебречь информацией о параметре σ, содержащейся в решающей выборке $\mathbf{x}_i$, что обеспечивает взаимную независимость выборок $\mathbf{x}_i$ и σ_i. Если объем обучающей выборки достаточно велик, при построении алгоритма оценки без заметных потерь в точности можно отказаться также от использования априорной информации о коррелированности процесса $\sigma(t)$ и для каждого x_i вычислять оценку σ_i по выборке $\mathbf{x}_i$, не зависящей от выборок, использовавшихся на других шагах. При определенном операторе оценки $\widehat{\sigma}_i = f(\mathbf{x}_i)$ и известном законе распределения обучающей выборки $W(\mathbf{x})$ условная плотность распределения $W(\widehat{\sigma}|\sigma)$ также полностью известна. На ее основе может быть вычислено апостериорное распределение $W(\sigma|\widehat{\sigma})$, которое, как указывалось выше, при высокой точности оценки $\widehat{\sigma}$ мало зависит от вида и параметров априорного распределения $W(\sigma)$. Интегрированием условных функций правдоподобия $W(\mathbf{x}_i|H_1, \sigma)$ и $W(\mathbf{x}_i|H_0, \sigma)$ по апостериорному распределению $W(\sigma|\widehat{\sigma})$ сложные гипотезы $H_{1\sigma}$; $H_{0,\sigma}$ сводятся к простым гипотезам H_1, H_0, которым соответствуют не содержащие неизвестных параметров функции правдоподобия $W(\mathbf{x}_i|H_1, \widehat{\sigma})$ и $W(\mathbf{x}_i|H_0, \widehat{\sigma})$.

Оптимальный последовательный алгоритм различения гипотез H_1 и H_0 в соответствии с (4.66), (4.67) должен строиться на основе статистики логарифма отношения правдоподобия, которая при сделанных предположениях о независимости выборок $\{x_i\}$, $\{\widehat{\sigma}_i\}$ имеет вид

$$Z_k = \sum_{i=4}^{k} z(x_i|\widehat{\sigma}_i) = \sum_{i=1}^{k} \ln \frac{W(x_i|H_1, \widehat{\sigma}_i)}{W(x_i|H_0, \widehat{\sigma}_i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \ln \frac{\int_{\sigma} W(x_i|H_1, \sigma) W(\sigma|\widehat{\sigma}_i)\, d\sigma}{\int_{\sigma} W(x_i|H_0, \sigma) W(\sigma|\widehat{\sigma}_i)\, d\sigma}. \qquad (4.70)$$

Среднее приращение статистики (4.70) за один шаг последовательной процедуры зависит от $\widehat{\sigma}$, поэтому при изменениях параметра σ длительность процедуры будет автоматически меняться, обеспечивая при сравнении статистики (4.70) с вальдовскими решающими порогами ограниченность сверху вероятностей ошибок α и β расчетными значениями α_1, β_1 [180].

Отличие такой последовательной процедуры различения простых гипотез H_0 и H_1 от рассмотренных в § 4.2 состоит в том, что при нестационарном за время наблюдения параметре σ выборка $\{x_i\}$ является неоднородной. Покажем, что последовательный анализ независимой неоднородной выборки $\{x\}$ с вероятностью, равной единице, завершится за конечное время, если при этом на всех шагах выполняется условие ограниченности снизу дисперсий z, т. е. $M_2(z) \geqslant M_{2\min}$. (В за-

дачах обнаружения сигналов это условие является естественным, поскольку в реальных приемных устройствах $\sigma \neq 0$.)

Следуя А. Вальду (см. [149], с. 202), разобьем бесконечную последовательность $z_1, z_2, \ldots, z_i$ на интервалы, каждый из которых включает r отсчетов z_i. Пусть ξ обозначает сумму элементов k-го интервала. Для доказательства того, что последовательный процесс рано или поздно завершится, достаточно показать, что равна нулю вероятность P того, что одновременно при всех k окажется справедливым неравенство $|\xi_k| < c$ или $(\xi)^2 < c^2$, где $c = |A| + |B|$. Поскольку $z_1, \ldots, z_i$ по условию являются независимыми величинами, $\xi_1, \ldots, \xi_j$ также распределены независимо, следовательно, $P = \prod_{k=1}^{j} P\,(\xi_k^2 < c^2)$. Так как дисперсия $M_2[z] \geqslant \min M_2$, соответствующим выбором значения интервала r всегда можно обеспечить выполнение неравенства $M[\xi_k^2] \geqslant c^2$, при этом $P\,(\xi_k^2 < c^2) < 1$. Следовательно, $\lim\limits_{j \to \infty} \{P = \prod_{k=1}^{j} P(\xi_k^2 < c^2)\} = 0$, т. е. с вероятностью, равной единице, последовательный анализ рано или поздно завершается.

Условное математическое ожидание приращений статистики (4.70) при фиксированном параметре σ из-за интегрирования функций правдоподобия по апостериорной плотности $W(\sigma|\widehat{\sigma})$ оказывается меньше значения $\bar{z}(\sigma)$, соответствующего точно известному параметру σ. Соответственно средняя длительность адаптивной процедуры, построенной на статистике (4.70), будет больше, чем при точно известном σ, что является платой за априорную неопределенность этого параметра. Однако, поскольку статистика (4.70) представляет собой отношение правдоподобия выборочного вектора $\mathbf{x}_i$, последовательный критерий, основанный на этой статистике, будет иметь наименьшую среднюю длительность среди всех критериев, построенных на основании независимых оценок $\widehat{\sigma_1}, \ldots, \widehat{\sigma_i}$ и обеспечивающих заданные значения α_1 и β_1.

В качестве примера рассмотрим адаптивную последовательную процедуру некогерентного обнаружения сигнала с постоянной амплитудой и случайной начальной фазой на фоне шума с рэлеевским распределением огибающей, дисперсия которого априори неизвестна и может изменяться за время наблюдения по случайному закону $\sigma^2(t)$. Гипотезе H_0 при этом соответствует рэлеевское распределение независимых отсчетов наблюдаемой величины V_i:

$$W(V_i \mid H_0, \sigma) = \frac{V_i^2}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{V_i^2}{2\sigma^2}\right), \tag{4.71}$$

а альтернативе H_1 — распределение Райса

$$W(V_i \mid H_1, \sigma) = \frac{V_i^2}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{V_i^2 + V_c^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{V_i V_c}{\sigma^2}\right). \tag{4.72}$$

Пусть для каждого отсчета V_i имеется не зависимая от V_i $(j \neq i)$ выборка $V_1, \ldots, V_j, \ldots, V_n = \{V_j\}_n$, относительно которой априори

известно, что она соответствует гипотезе H_0, т. е. подчиняется распределению (4.71).

На основании выборки $\{V_j\}_n$ может быть вычислена оценка максимального правдоподобия параметра σ

$$\widehat{\sigma}_{\text{мп}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} V_j^2/n}.$$

Эта оценка при конечном объеме выборки является смещенной:

$$M[\widehat{\sigma}_{\text{мп}}] = \sigma\Gamma(n+0{,}5)/(\Gamma(n)\sqrt{n}).$$

Соответствующая несмещенная оценка

$$\widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}_{\text{мп}}\Gamma(n)\sqrt{n}/\Gamma(n+0{,}5) = \widehat{\sigma}_{\text{мп}} K_n \sqrt{n} \tag{4.73}$$

имеет условную плотность распределения

$$W(\widehat{\sigma}\,|\,\sigma) = \frac{2\widehat{\sigma}^{2n-1}}{\sigma^{2n}\Gamma(n)K_n^{2n}} \exp\left(-\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2 K_n^2}\right), \quad \widehat{\sigma} \geqslant 0 \tag{4.74}$$

(χ — распределение с параметрами $2n$; $\sigma K_n\sqrt{n-1}$ [181]).

Отметим, что с точки зрения практической реализации удобнее линейная несмещенная оценка вида

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} V_j, \tag{4.75}$$

по эффективности весьма близкая к максимально правдоподобной (коэффициент асимптотической эффективности оценки (4.75) равен 0,914). Однако аналитическое выражение распределения этой оценки оказывается слишком громоздким. Поэтому, а также с целью исследования потенциальной эффективности алгоритма в данном примере используется несмещенная оценка (4.73).

В качестве априорной целесообразно выбрать обладающую свойством инвариантности к преобразованиям вида $f(\sigma) = \sigma^a$, $a \neq 0$, несобственную плотность [155]

$$W(\sigma) = 1/\sigma, \quad \sigma \geqslant 0. \tag{4.76}$$

На основании (4.72), (4.74), (4.76) с учетом разложения $I_0(y) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\left(\frac{y}{2}\right)^{2l}\Big/\Gamma^2(l+1)\right)$ находим двумерную плотность

$$W(V_i;\ \widehat{\sigma}\,|\,H_1) = \int_0^\infty W(V_i, \widehat{\sigma}\,|\,H_1, \sigma)\,W(\sigma)\,d\sigma = \int_0^\infty W(V_i\,|\,H_1, \sigma)\,W(\widehat{\sigma}\,|\,\sigma) \times$$

$$\times W(\sigma)\,d\sigma = \frac{2V_i K_n^2}{\widehat{\sigma}^2\Gamma(n)[(V_i^2+V_c^2)K_n^2/\widehat{\sigma}^2+1]^{n+1}} \sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{V_i V_c}{V_i^2+V_c^2+\widehat{\sigma}^2/K_n^2}\right]^{2l} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(n+2l+1)}{\Gamma^2(l+1)}. \tag{4.77}$$

Поскольку оценка $\widehat{\sigma}$ в (4.77) играет роль масштабного коэффициента, перейдем к одномерному распределению нормированной переменной $u_i = V_i/(\widehat{\sigma}\sqrt{2})$:

$$W(u_i \mid H_1) = \frac{W(V_i, \widehat{\sigma} \mid H_1)}{W(\widehat{\sigma})(1/\widehat{\sigma})} = \frac{2u_i K_n^2}{\Gamma(n)[(a_1^2+u_i^2)K_n^2+1]^{n+1}} \times$$

$$\times \sum_{l=}^{\infty} \left[\frac{a_1 u_i}{a_1^2+u_i^2+1/K_n^2}\right]^{2l} \frac{\Gamma(n+2l+1)}{\Gamma^2(l+1)}, \qquad (4.78)$$

где $a_1 = V_c/(\widehat{\sigma}\sqrt{2})$; $W(\widehat{\sigma}) = \int_0^{\infty} W(\widehat{\sigma}|\sigma)\, W(\sigma)\, d\sigma = 1/\widehat{\sigma}$ — безусловное распределение оценки $\widehat{\sigma}$.

При $n \to \infty$, когда плотность Райса (4.72) нормализуется, плотность (4.78) стремится к нецентральному t-распределению [155]; при $V_c = 0$ из формулы (4.78) следует

$$W(u_i|H_0) = 2u_i K_n^2 n/(u_i^2 K_n^2 + 1)^{n+1}. \qquad (4.79)$$

Отметим, что плотность $W(u_i|H_0)$ (4.79), полученная здесь в предположении, что априорное распределение $W(\sigma) = 1/\sigma$, в действительности инвариантна к распределению $W(\sigma)$. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно найти распределение отношения независимых величин V и $\widehat{\sigma}$, задаваемых условными плотностями (4.71) и (4.74). Оказывается, что это распределение не зависит от параметра σ, а следовательно, и от $W(\sigma)$. Распределение $W(u_i|H_1)$ (4.78) аналогичным свойством не обладает.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{K_n = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1/2)}\right\} = 1/\sqrt{n}$, плотности (4.78) и (4.79) сходятся в обычном смысле к плотностям (4.72) и (4.71):

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2uK_n^2}{[(a_1^2+u^2)K_n^2+1]^{n+1}} \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a_1 uK_n^2}{(a_1^2+u^2)K_n^2+1}\right)^{2l} \frac{\Gamma(n+2l+1)}{\Gamma^2(l+1)\Gamma(n)}\right] =$$

$$= \frac{2u}{n}\exp(-a_1^2-u^2)\, n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a_1 u)^{2l}}{\Gamma^2(l+1)} \frac{\Gamma(n+2l+1)}{\Gamma(n+1)^{2l}} =$$

$$= 2u\exp(-a_1^2-u^2)\, I_0(2a_1 u).$$

Таким образом, статистика (4.70) сходится по вероятности к статистике, соответствующей случаю точно известного параметра σ, т. е. алгоритм различения гипотез H_0 и H_1, основанный на статистике (4.70), является состоятельным [1].

На рис. 4.12 приведено семейство зависимостей $z(u)$, рассчитанных по формуле (4.70) для распределений (4.78) и (4.79) при различных объемах обучающей выборки [182]. Особенностью этих кривых при конечном n является их немонотонный характер. Можно показать, что,

хотя с ростом n абсцисса и ордината максимума функции $z(u)$ неограниченно возрастают, при любом конечном a_1 и n

$$\lim_{u \to \infty} \ln [W(u \mid H_1)/W(u \mid H_0)] = 0.$$

Сближение гипотез, наблюдаемое при $u \to \infty$, связано с тем, что из-за возможных отклонений оценки в сторону значений $\hat{\sigma} \ll \sigma$ существенный вклад в полную вероятность $P(u \gg 1) = P(V \gg \sigma)$ вносят комбинации $\hat{\sigma} \ll \sigma$, $V \approx \sigma$, вероятности которых при H_0 и H_1 примерно одинаковы, а не комбинации $\hat{\sigma} \approx \sigma$, $V \gg \sigma$, вероятности

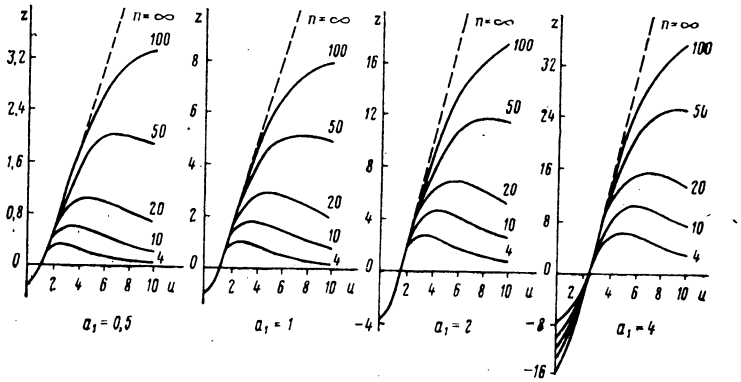


Рис. 4.12. Зависимость решающей статистики от нормированной наблюдаемой величины u при различных объемах n обучающей выборки

которых хотя и существенно различаются при гипотезе и альтернативе, но малы по абсолютной величине.

На рис. 4.13 приведены зависимости $\eta_{0,1} = \bar{z}_{0,1}(n \to \infty)/\bar{z}_{0,1}(n)$, характеризующие потери в информации Кульбака—Леблера $\bar{z}_{0,1} = \int_u z(u)\, W(u|H_{0,1})\, du$, возникающие из-за конечной точности измерения параметра σ. Как видно из рисунка, эти потери при $n = 10 \div 20$ составляют 50—30%, что приводит к соответствующему возрастанию средней длительности принятия решения.

Очевидно, что с точки зрения минимизации потерь в средней длительности последовательной процедуры, связанных с флуктуационной ошибкой оценки $\hat{\sigma}$, желательно эту оценку строить по обучающей выборке максимально возможного объема n. При обнаружении импульсного сигнала предел увеличению n ставит условие локальной стационарности процесса $\sigma(t)$ на временно́м интервале T_0, соответствующем реализации $V(t)$, из которой формируется обучающая выборка $\{V_j\}_i$. Если это условие не соблюдается, оценка $\hat{\sigma}_i$ вычисляется с большой систематической ошибкой относительно истинного значения параметра σ_i, что в свою очередь приводит к росту ошибок принятия реше-

ния. В том случае, когда оценка формируется в результате интегрирования сигнала вдоль частотной оси частотно-временно́й плоскости, существует аналогичное ограничение на отношение ширины спектра помехи к ширине полосы частот, в которой производится измерение. Поскольку требования минимизации флуктуационной и систематической ошибок противоречивы, существует некоторое значение времени наблюдения T_0 (объем выборки n), при котором минимизируется суммарная ошибка вычисления оценки $\widehat{\sigma}$.

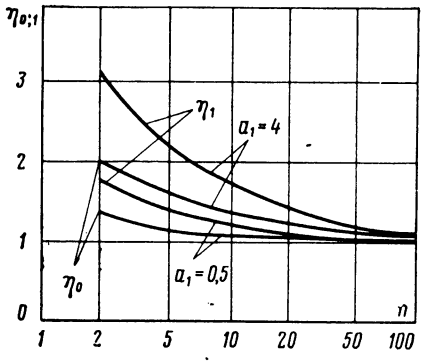


Рис. 4.13. Потери в информации Кульбака — Леблера из-за конечной точности оценки уровня шума

В [183] показано, что в случае, когда измерение σ производится с помощью линейного оператора (4.75), независимо от вида распределения $W(\sigma)$ выражение для оптимального времени осреднения имеет вид

$$T_{\text{opt}} = \sqrt[5]{(\delta^2+1)\,\tau_V/[\delta^2\,\Pi^4(\sigma)]}\,c_1. \tag{4.80}$$

Здесь τ_V — интервал корреляции огибающей на выходе приемника; $\Pi(\sigma)$ — ширина спектра процесса $\sigma(t)$; $\delta = \sqrt{M_2[\sigma(t)]/\{M[\sigma(t)]\}^2}$ — коэффициент, характеризующий относительный разброс (нестационарность) процесса $\sigma(t)$. Значение коэффициента c_1 зависит от формы энергетического спектра $F_\sigma(\omega)$ процесса $\sigma(t)$ (для гауссовского спектра $c_1 \approx 0{,}5$, для прямоугольного $c_1 \approx 0{,}7$, для экспоненциального $c_1 \approx 0{,}25$).

Дисперсия оценки (4.75) при оптимальном выборе интервала осреднения

$$\min M_2[\widehat{\sigma}] = \{M[\sigma(t)]\}^2 \frac{1{,}25\,(4-\pi)}{c_1\,\pi} \sqrt[5]{\Pi^4(\sigma)\,\tau_V^4\,(\delta^2+1)^4\,\delta^2}. \tag{4.81}$$

Минимум $M_2[\widehat{\sigma}]$ при $T_0 = T_{\text{opt}}$ выражен не резко, однако при существенных отличиях значений T_0 и T_{opt} дисперсия оценки превышает минимальное значение $\min M_2[\widehat{\sigma}]$ (4.81) на порядок и более.

4.3.4. Квазикогерентное последовательное обнаружение сигнала с неизвестным доплеровским сдвигом

Важным для практики видом априорной неопределенности является ситуация, когда в точке приема неизвестна фаза φ несущей сигнала, подлежащего обнаружению. Если фаза наблюдаемого напряжения относительно некоторого гармонического опорного колебания как при наличии, так и при отсутствии сигнала изменяется от отсчета к отсчету по случайному закону и распределена равномерно в интервале 0—2π, операция усреднения функций правдоподобия $W(u_i, \varphi_i|H_1)$ и $W(u_i,$

$\varphi_i|H_0)$ по мешающему параметру φ_i приводит к амплитудным (некогерентным) методам обнаружения, рассмотренным выше. Данный раздел посвящен вопросам построения последовательных процедур обнаружения когерентных сигналов, фаза которых постоянна или изменяется по некоторому детерминированному закону $\varphi_c(t)$.

Наиболее просто реализуется последовательная процедура обнаружения сигнала, фаза которого постоянна ($\varphi_c(t) = \varphi_0$) и полностью известна в точке приема. Отношение правдоподобия наблюдаемой выборки $\mathbf{u}_k$, $\boldsymbol{\varphi}_k$ в этом случае факторизуется относительно отдельных отсчетов u_i, φ_i и для сигнала с фиксированной амплитудой имеет вид

$$\Lambda(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\varphi}_k \mid \varphi_0) = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i = \prod_{i=1}^{k} \exp(2a_1 u_i \cos(\varphi_i - \varphi_0) - a_1^2). \quad (4.82)$$

Соответственно

$$Z_k = \sum_{i=1}^{k} \ln \lambda_i = \sum_{i=1}^{k} (2a_1 u_i \cos(\varphi_i - \varphi_0) - a_1^2). \quad (4.83)$$

На практике случай точно известной фазы встречается редко. При сравнительном анализе эффективности различных алгоритмов обнаружения алгоритм (4.83) часто используется как предельный [152].

Значительно чаще неизвестная фаза сигнала $\varphi_c(t)$ в каждой процедуре остается постоянной: $\varphi_c(t) = \varphi_0$, а от процедуры к процедуре изменяется по случайному закону и распределена равномерно в интервале $0—2\pi$. Отношение правдоподобия для этого случая находим интегрированием статистики $\Lambda(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\varphi}_k|\varphi_0)$ (4.82) по априорному распределению фазы φ_0:

$$\widetilde{\Lambda}_k = \int_0^{2\pi} \Lambda_k(\varphi_0)\, W(\varphi_0)\, d\varphi_0 = \exp(-ka_1^2)\, I_0(2a_1 U_k), \quad (4.84)$$

где $U_k = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{k} u_i \cos\varphi_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{k} u_i \sin\varphi_i\right)^2}$;

соответственно

$$Z_k = \ln I_0(2a_1 U_k) - ka_1^2. \quad (4.85)$$

Вычислитель статистики (4.85), которая, в отличие от статистики (4.83), не распадается на сумму статистик z_i отдельных отсчетов u_i, φ_i, несколько сложнее, чем при полностью известной фазе, но реализуем на современном уровне вычислительной техники.

Наиболее сложен с точки зрения построения последовательной процедуры случай, когда параметры функции $\varphi_c(t)$ неизвестны. Примером такого случая, представляющим большой практический интерес, является сигнал, несущая частота которого имеет неизвестный постоянный или регулярно меняющийся сдвиг относительно опорной частоты.

Обнаружитель сигнала с неизвестной частотой и начальной фазой обычно строится по многоканальной схеме, причем полоса пропускания каждого канала, а следовательно, и число каналов, необходимое для

перекрытия диапазона возможных значений частоты сигнала, зависят от времени наблюдения. Реализация такой многоканальной системы в случае последовательного обнаружения, когда длительность наблюдения является случайной, оказывается весьма сложной, а ее эффективность с ростом числа каналов уменьшается.

От указанных недостатков в значительной степени свободен одноканальный алгоритм «экстраполяционно-фазового» последовательного обнаружения (ЭФО) [184], в котором производится оценка неизвестных параметров функции $\varphi_c(t)$ и соответствующая перестройка вычислителя решающей статистики, т. е. реализуется метод совместного обнаружения-оценивания. В ходе этой перестройки по мере уточнения зависимости $\varphi_c(t)$ алгоритм вычисления отношения правдоподобия постепенно трансформируется из некогерентного в когерентный. До принятия решения о наличии сигнала возможность оценки зависимости $\varphi_c(t)$ по классифицированной выборке обычно отсутствует, поэтому в рассматриваемой задаче в качестве обучающей должна использоваться решающая выборка $\mathbf{u}_k$, $\boldsymbol{\varphi}_k$.

Ниже алгоритм ЭФО рассматривается применительно к задаче обнаружения когерентного гармонического сигнала с фиксированной амплитудой на фоне некоррелированных гауссовских помех при априорном предположении о линейном законе изменения фазы сигнала за время обнаружения $\varphi_c(t) = \varphi_0 + \omega_д t$, параметры φ_0 и $\omega_д$ которого неизвестны. Для дискретных фазовых отсчетов такому предположению соответствует соотношение $\varphi_{ci} = \varphi_0 + (i-1)\,\delta$, где $\delta = \omega_д T$; T — период поступления отсчетов.

Расчет отношения правдоподобия при последовательном анализе, следуя общей методике, описанной в п. 4.3.1, целесообразно производить рекуррентно в соответствии с выражением (4.67): $\Lambda_i = \lambda_i \Lambda_{i-1}$. При этом отношение правдоподобия λ_i для полученной на i-м шаге последовательной процедуры пары отсчетов амплитуды и фазы u_i, φ_i должно вычисляться с учетом распределения ожидаемой на этом шаге фазы сигнала φ_{ci}. Последнее определяется как апостериорное по получении $i-1$ предшествующих фазовых отсчетов и является априорным для i-го отсчета фазы φ_i.

Вся информация о распределении φ_{ci}, содержащаяся в выборке $\boldsymbol{\varphi}_{i-1}$, может быть представлена в виде оценки экстраполированной на один шаг последовательной процедуры оценки фазы сигнала $\widehat{\varphi}_i$, если последняя является достаточной статистикой выборочных данных. При этом условное распределение $W(\widehat{\varphi}_i|\varphi_0, \delta)$ полностью определяется способом получения оценки, а апостериорное распределение $W(\varphi_{ci}|\widehat{\varphi}_i)$, рассчитываемое по формуле Байеса (4.68), с ростом i перестает зависеть от априорного распределения $W(\varphi_0, \delta)$. Если наблюдаемая выборка порождена одной помехой, величина $\widehat{\varphi}_i$ представляет собой псевдооценку экстраполированного значения фазы сигнала.

На способ оценки параметров зависимости $\varphi_c(t)$ существенное влияние оказывает ограниченность интервала однозначного измерения фазы φ_i, который полагается равным $(-\pi, \pi)$. В результате этого для ли-

нейного закона $\varphi_c(t)$ наблюдаемые отсчеты φ_i при отсутствии помех меняются циклически. Априорное распределение φ_0 предполагается равномерным в интервале $(-\pi, \pi)$. Интервал возможных значений $\delta(\omega_д)$ ограничивается областью их однозначного определения при дискретном поступлении фазовых отсчетов с интервалом T: $-\pi < \delta < \pi$; в пределах этого интервала априорное распределение δ также полагается равномерным.

Для нециклических величин хорошо разработаны нерекуррентные и рекуррентные методы сглаживания и экстраполяции линейных траекторий по выборочным данным [171, 185, 186]. Алгоритмы оценки фазы, учитывающие ее цикличность, сложны и недостаточно разработаны [187]. Поэтому описываемый ниже алгоритм ЭФО построен на основе известных алгоритмов рекуррентного сглаживания нециклических линейно меняющихся величин, в которые введена эвристическая коррекция на цикличность фазовых отсчетов.

Алгоритм сглаживания и экстраполяции фазы имеет вид

$$\bar{\varphi}_i = \hat{\varphi}_i + \mu_i f(\gamma_i),\ \bar{\delta}_i = \bar{\delta}_{i-1} + \nu_i f(\gamma_i),\ \hat{\varphi}_{i+1} = \bar{\varphi}_i + \bar{\delta}_i \qquad (4.86)$$

при начальных условиях $\hat{\varphi}_1 = 0$, $\bar{\delta}_1 = 0$. Здесь $\gamma_i = \varphi_i - \hat{\varphi}_i$; φ_i — значение i-го отсчета фазы; $\bar{\varphi}_i$ — сглаженное по i отсчетам значение фазы; $\bar{\delta}_i$ — сглаженное значение приращения фазы за период T между отсчетами; $\hat{\varphi}_{i+1}$ — оценка экстраполированного значения фазы для шага $i+1$; μ_i и ν_i — коэффициенты сглаживания. Функция

$$f(\gamma_i) = \begin{cases} \gamma_i - 2\pi, & \pi < \gamma_i < 2\pi; \\ \gamma_i, & -\pi \leqslant \gamma_i \leqslant \pi; \\ \gamma_i + 2\pi, & -2\pi < \gamma_i < -\pi, \end{cases}$$

используется здесь в качестве упомянутой эвристической коррекции алгоритма сглаживания (для нециклических величин $f(\gamma_i) \equiv \gamma_i$).

При использовании этого алгоритма в случае гауссовских помех нестационарной интенсивности

$$\mu_i = \frac{M_2[\hat{\varphi}_i]}{M_2[\varphi_i] + M_2[\hat{\varphi}_i]},\quad \nu_i = \frac{M_2[\hat{\varphi}_i, \bar{\delta}_{i-1}]}{M_2[\varphi_i] + M_2[\hat{\varphi}_i]},$$

где $M_2[\hat{\varphi}_i]$ — дисперсия оценки экстраполированного значения фазы; $M_2[\hat{\varphi}_i, \bar{\delta}_{i-1}]$ — коэффициент корреляции между $\hat{\varphi}_i$ и $\bar{\delta}_{i-1}$.

Для вычисления $M_2[\hat{\varphi}_i]$ и $M_2[\hat{\varphi}_i, \bar{\delta}_{i-1}]$ может быть использован рекуррентный алгоритм:

$$M_2[\hat{\varphi}_i] = \mu_{i-1} M_2[\varphi_{i-1}] + 2M_2[\bar{\varphi}_{i-1}, \bar{\delta}_{i-1}] + M_2[\bar{\delta}_{i-1}];$$

$$M_2[\hat{\varphi}_i, \bar{\delta}_{i-1}] = M_2[\bar{\varphi}_{i-1}, \bar{\delta}_{i-1}] + M_2[\bar{\delta}_{i-1}];$$

$$M_2[\bar{\varphi}_i, \bar{\delta}_i] = \nu_i M_2[\varphi_i];$$

$$M_2[\bar{\delta}_i] = M_2[\bar{\delta}_{i-1}] - \nu_i M_2[\hat{\varphi}_i, \bar{\delta}_{i-1}];$$

при начальных условиях для $i = 1, 2$ имеем

$$\mu_1 = \mu_2 = 1;\ \nu_1 = 0;\ \nu_2 = 1;$$

$$M_2[\overline{\delta}_2] = M_2[\varphi_1] + M_2[\varphi_2];$$

$$M_2[\overline{\varphi}_2,\ \overline{\delta}_2] = M_2[\varphi_2].$$

В случае смеси гармонического сигнала и гауссовского шума дисперсия текущего отсчета фазы определяется соотношением [188]

$$M_2[\varphi_i] = \begin{cases} \pi^2/3 - 2a_{1i}\sqrt{\pi}, & a_{1i} \ll 1; \\ 0{,}5a_{1i}^2, & a_{1i} \gg 1, \end{cases}$$

где a_{1i} — отношение сигнал-шум по напряжению, которое предполагается известным или достаточно точно оцененным по обучающей выборке.

Для однородной выборки, соответствующей наблюдению в стационарном гауссовском шуме, алгоритм вычисления коэффициентов сглаживания сильно упрощается. В этом случае μ_i и ν_i зависят только от номера шага i:

$$\mu_i = 2(2i - 1)/[i(i + 1)];\ \nu_i = 6/[i(i + 1)],\ i > 2.$$

При большом числе фазовых отсчетов на основании центральной предельной теоремы воспользуемся нормальной аппроксимацией распределения отклонений отсчетов оценки $\widehat{\varphi}_i$ относительно истинного значения φ_{ci}. Такая аппроксимация с учетом ограничения области существования фазовых отсчетов интервалом длиной 2π является удовлетворительной только при достаточно большом отношении сигнал-шум, однако позволяет получить аналитически наглядный результат. Очевидно, что основанный на такой аппроксимации алгоритм обнаружения тем далее от оптимального, чем меньше отношение сигнал-шум. Разумные границы его применимости и эффективность по сравнению с некогерентным и истинно когерентным алгоритмами последовательного обнаружения ниже оцениваются статистическим экспериментом на ЭВМ.

Апостериорная плотность $W(\varphi_{ci}/\widehat{\varphi}_i)$ при равномерном априорном распределении $W(\varphi_{ci})$ совпадает с условной плотностью $W(\widehat{\varphi}_i/\varphi_{ci})$:

$$W(\Delta\varphi_i \mid \varphi_{ci}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi M_2[\Delta\varphi_i]}} \exp\left(-\frac{\Delta\varphi_i^2}{2M_2[\Delta\varphi_i]}\right);\ \Delta\varphi_i = \widehat{\varphi}_i - \varphi_{ci}. \quad (4.87)$$

Двумерные плотности совместных распределений отсчетов u_i и φ_i для гипотезы H_0 и альтернативы H_1 определяются выражениями

$$W(u_i,\ \varphi_i|H_1) = (u_i/\pi)\exp(-a_1^2 - u_i^2 + 2au_i\cos(\varphi_i - \varphi_{ci}));$$

$$W(u_i,\ \varphi_i|H_0) = (u_i/\pi)\exp(-u_i^2).$$

Используя обозначение $\gamma_i = \varphi_i - \widehat{\varphi}_i$, плотность $W(u_i, \varphi_i|H_1)$ можно представить в виде

$$W(u_i, \varphi_i|H_1) = W(u_i, \varphi_i - \varphi_{ci}|H_1) = W(u_i, \varphi_i - \widehat{\varphi}_i + \widehat{\varphi}_i - \varphi_{ci}|H_1) =$$
$$= W(u_i, \gamma_i + \Delta\varphi_i|H_1) = u_i/\pi \exp(-a_1^2 - u_i^2 + 2a_1 u_i \cos(\gamma_i + \Delta\varphi_i)). \quad (4.88)$$

Интегрируя плотность (4.88) по распределению отклонения оценки от истинного значения (4.87), получаем отношение правдоподобия для одного отсчета

$$\Lambda(u_i, \gamma_i) = \exp(-a_1^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi M_2[\Delta\varphi_i]}} \int_0^\infty \exp\left[2a_1 u_i \cos(\gamma_i + \Delta\varphi_i) - \frac{\Delta\varphi_i^2}{2M_2[\Delta\varphi_i]}\right] d\Delta\varphi_i. \quad (4.89)$$

С использованием гармонического разложения

$$\exp[A\cos(\gamma + \Delta\varphi)] = I_0(A) + 2\sum_{j=1}^{\infty} I_j(A)\cos[j(\gamma + \Delta\varphi)]$$

и известных интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2\gamma^2)\cos b\gamma d\gamma = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\exp\left(-\frac{b^2}{\pi a^2}\right);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2\gamma^2)\sin b\gamma d\gamma = 0$$

получаем следующее выражение для логарифма отношения правдоподобия (4.89) [189]:

$$z(u_1, \gamma_i) = \ln\Lambda(u_i, \gamma_i) = a_1^2 + \ln[I_0(2a_1 u_i) + 2\sum_{j=1}^{\infty} I_j(2a_1 u_i) \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{j^2 M_2[\Delta\varphi_i]}{2}\right)\cos(j\gamma_i)]. \quad (4.90)$$

При $M_2[\Delta\varphi_i] \to \infty$ последнее выражение переходит в характеристику $z(u)$, соответствующую некогерентному обнаружению

$$z(u_i) = -a_1^2 + \ln I_0(2a_1 u_i),$$

а при $M_2[\Delta\varphi_i] \to 0$ — в логарифм отношения правдоподобия когерентного сигнала с точно известным фазовым сдвигом

$$z(u_i, \gamma_i) = -a_1^2 + 2a_1 u_i \cos\gamma_i.$$

Расчет функции $z(u_i, \gamma_i)$ с помощью (4.90) удобен при малых величинах $a_1 u_i$ и большой дисперсии $M_2[\Delta\varphi_i]$. При больших $a_1 u_i$ и ма-

лых $M_2[\Delta\varphi_i]$ сходимость входящего в это выражение ряда замедляется, а необходимая точность расчета его членов возрастает. При таком сочетании параметров удобнее пользоваться другим представлением функции $z(u_i, \gamma_i)$, которое получается разложением функции $\exp(2a_1u_i\cos(\gamma_i + \Delta\varphi_i))$ в ряд Тейлора по степеням $\Delta\varphi_i$ в окрестности точки $\Delta\varphi_i = 0$. Ограничиваясь для малых $M_2[\Delta\varphi_i]$ двумя членами ряда, находим

$$z(u_i, \gamma_i) = -a_1^2 + 2a_1u_i\cos\gamma_i + \ln[1 + a_1u_i M_2[\Delta\varphi_i](2a_1u_i\sin^2\gamma_i - \cos\gamma_i)].$$

Третье слагаемое этого выражения представляет поправку к характеристике $z(u, \gamma)$ для когерентного сигнала, возникающую вследствие ограниченной точности оценки фазы.

На рис. 4.14 приведены полученные методом математического моделирования характеристики обнаружения $D(a_1)$, $D(a/a_1)$ и зависимости $\bar{n}(a_1)$, $\bar{n}(a/a_1)$ для последовательной процедуры, построенной на статистике (4.90). Как следует из этих зависимостей, алгоритм ЭФО при $a_1 \approx 1$ обеспечивает выигрыш в средней длительности процедуры обнаружения $\bar{n}_1$ около 2 раз по сравнению с некогерентным обнаружением. Потери в среднем времени наблюдения алгоритма ЭФО относительно когерентного обнаружителя сигнала с известной начальной фазой при равных вероятностях обнаружения составляют 30—40%. При отсутствии сигнала выигрыш снижается, что связано с меньшей средней длительностью процедуры необнаружения $\bar{n}_0$ и недостаточной сходимостью алгоритма ЭФО к когерентному за малое число шагов. С уменьшением a_1 выигрыш в средней длительности увеличивается, однако наблюдается снижение вероятности правильного обнаружения D, которое при $a_1 = -(2 \div 3)$ дБ становится существенным.

Это связано с повышением вероятности сбоя сглаживания фазовой траектории из-за цикличности фазовых отсчетов и их неправильной интерпретации в принятом алгоритме. Таким образом, при $a_1 = -(2 \div 3)$ дБ описанный алгоритм теряет свою эффективность. Расширение диапазона эффективного использования алгоритма ЭФО возможно при коррекции решающей статистики с учетом ошибок сглаживания фазовых отсчетов. Так, стабилизация вероятности правильного обнаружения при уменьшении a_1 возможна, если для расчета функций правдоподобия в качестве апостериорной плотности распределения фазы использовать композицию фазовых распределений для правильного и ошибочного сглаживания траекторий. Эти распределения должны суммироваться с весами, равными вероятностям безошибочного и ошибочного сглаживания, которые могут быть определены из статистического эксперимента.

Моделирование показывает, что использование композиции распределений стабилизирует вероятность правильного обнаружения ценой некоторого увеличения средней длительности последовательного анализа по сравнению с описанным алгоритмом ЭФО Циклические алго-

ритмы, принципиально исключающие сбои сглаживания фазы, в настоящее время трудно реализуемы.

При $a_1 > 3$ дБ выигрыш ЭФО относительно некогерентного обнаружителя уменьшается, поскольку при обнаружении сильных сигналов когерентные и некогерентные методы близки по эффективности.

Таким образом, описанный квазикогерентный одноканальный алгоритм ЭФО обеспечивает заметный выигрыш в средней длительности

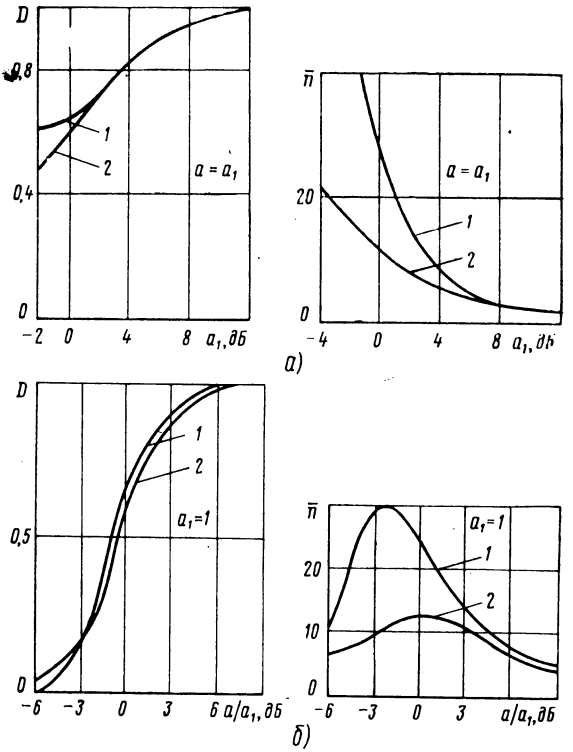


Рис. 4.14. Зависимости характеристики обнаружения и средней длительности наблюдения от уровня сигнала a, совпадающего с расчетным a_1 (*а*), и от отношения a/a_1 истинного уровня сигнала к расчетному (*б*):

нефлуктуирующий сигнал; A=13,1; $\alpha_1=10^{-6}$, $B=0{,}69$; $\beta_1=0{,}5$ (*1* — некогерентное обнаружение, *2* — экстраполяционно-фазовое обнаружение)

последовательного анализа в диапазоне отношений сигнал-шум — $-3 \div +3$ дБ. Отметим, что дополнительным преимуществом этого алгоритма является возможность получения в момент принятия решения оценки частотного сдвига обнаруживаемого сигнала, которая формируется в процессе сглаживания фазовой траектории. Как показывают результаты математического моделирования, среднеквадратическая ошибка этой оценки не превышает $0{,}03T^{-1}$, где T — период между отсчетами.

4.4. Последовательное обнаружение сигналов в многоканальных системах

4.4.1. Общие положения

Данный раздел посвящен задачам обнаружения сигналов, неизвестные параметры которых являются измеряемыми (информационными). Это означает, что на основании выборочных значений, использовавшихся при обнаружении, должна производиться оценка этих параметров. Рассматривается случай проверки простой гипотезы H_0 против сложной альтернативы H_{M_1}, предполагающей, что неизвестный параметр единственного сигнала принимает одно из значений ϑ_j, принадлежащих дискретному или непрерывному множеству Θ, а также более общий случай, когда альтернатива H_{M1} допускает присутствие одновременно нескольких сигналов, различающихся значением параметра ϑ.

Такие задачи связаны с необходимостью обнаружения и разрешения сигналов, различающихся частотой, временем появления и другими параметрами. Так, для импульсной радиолокации типична задача обнаружения сигнала с неизвестной задержкой, для радиосвязи с подвижными объектами, доплеровской радиолокации, спектрального анализа — задача обнаружения сигнала с неточно известным значением несущей частоты и т. п.

Алгоритм обнаружения-измерения единственного сигнала может строиться либо по одноканальной (самонастраивающейся), либо по многоканальной схеме [3]. При одновременном наблюдении нескольких сигналов, число которых априори неизвестно, самонастраивающиеся алгоритмы практически не разработаны, поэтому единственным вариантом устройства, обеспечивающего решение такой задачи, остается многоканальный обнаружитель.

Схема, состоящая из m параллельных каналов, каждый из которых настроен на соответствующее значение параметра ϑ_j, реализует оптимальный алгоритм обработки в случае, когда неизвестный параметр принимает конечное число дискретных значений $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_j, \ldots, \vartheta_m$. При непрерывном параметре такая схема является квазиоптимальной и сходится к оптимальной с ростом числа каналов [3]. Ниже параметр ϑ для простоты считается дискретным.

Задача последовательного обнаружения сигналов в многоканальных системах имеет особенности, связанные с тем, что, как уже указывалось, оптимальное последовательное правило различения сложных гипотез не найдено. Все известные квазиоптимальные алгоритмы предусматривают расчет в каждом канале (элементе разрешения) парциальной решающей статистики — отношения правдоподобия Λ_{jk} ($j = 1 \div m$ — индекс канала; k — индекс номера шага), которая затем в той или иной форме используется для вынесения решения.

Правила прекращения наблюдения при многоканальном последовательном обнаружении делятся на два класса: с независимыми и зависимыми решениями.

4.4.2. Правила обнаружения с независимыми решениями

Многоканальная последовательная процедура с независимыми решениями состоит в том, что в каждом канале в соответствии с вальдовским критерием отношения правдоподобия проверяется простая гипотеза H_0 относительно одной из простых альтернатив H_{11}, ..., H_{1m}, на которые в этом случае распадается сложная альтернатива H_{1M}. Накопление статистики в каждом канале при этом прекращается немедленно после ее выхода из зоны неопределенности. Процедура в целом считается законченной в тот момент, когда будет принято решение во всех каналах, что обеспечивает обнаружение с заданной вероятностью любого числа сигналов $l \leqslant m$. Интегральная функция распределения длительности многоканальной процедуры с независимыми решениями определяется выражением

$$F(n_M) = \prod_{j=1}^{m} F(n_j), \tag{4.91}$$

а средняя длительность

$$\bar{n}_M = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - F(n_M)) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \prod_{j=1}^{m} F(n_j)\right). \tag{4.92}$$

Входящие в (4.91) и (4.92) функции распределения длительности наблюдения в отдельных каналах $F(n_j)$ могут быть рассчитаны с помощью методов, изложенных в § 4.2. Если каналы статистически однородны, т. е. распределения длительности наблюдения в них одинаковы, то $F(n_M) = F^m(n_j)$.

Очевидно, что длительность многоканальной последовательной процедуры с независимыми решениями совпадает с длительностью n_j наблюдения в том канале, где решение было принято последним, т. е. $n_M = \max\limits_j n_j$. Это позволяет при статистически однородных каналах применить для расчета интегральной функции распределения длительности многоканальной процедуры известный результат теории экстремальных статистик [172], согласно которому распределение максимальных значений случайных величин, принадлежащих однородной выборке, с ростом ее объема стремится к двойному экспоненциальному. Таким образом, при справедливости во всех каналах гипотезы H_0 возможна аппроксимация

$$F(n_M \mid H_0) = F^m(n \mid H_0) \underset{m \to \infty}{\simeq} \exp\left[-\exp\left(-t_m^{-1}(n_M - \mu_m)\right)\right]. \tag{4.93}$$

Параметр μ_m [мода плотности распределения (4.93)] является $(1 - 1/m)$-квантилем длительности n одноканальной процедуры:

$$F(n = \mu_m) = 1 - 1/m. \tag{4.94}$$

Параметр t_m, характеризующий рассеяние величины n_M, определяется соотношением $t_m^{-1} = mF'(n = \mu_m)$, $F'(y)$ — производная. Моменты распределения (4.93) выражаются через параметры μ_m и t_m [172]:

$$\bar{n}_M = \mu_m + 0{,}577 t_m; \quad \mathrm{M}_2[n_M] = 1{,}646 t_m^2. \tag{4.95}$$

Скорость сходимости приближения (4.93) к истинному распределению n_M зависит от вида исходного распределения $F(n)$. Для гауссовского, вейбулловского, гамма- и других распределений экспоненциального класса точность приближения (4.93) уже при $m \geqslant 10$ оказывается достаточной для расчета первых двух моментов длительности многоканальной процедуры.

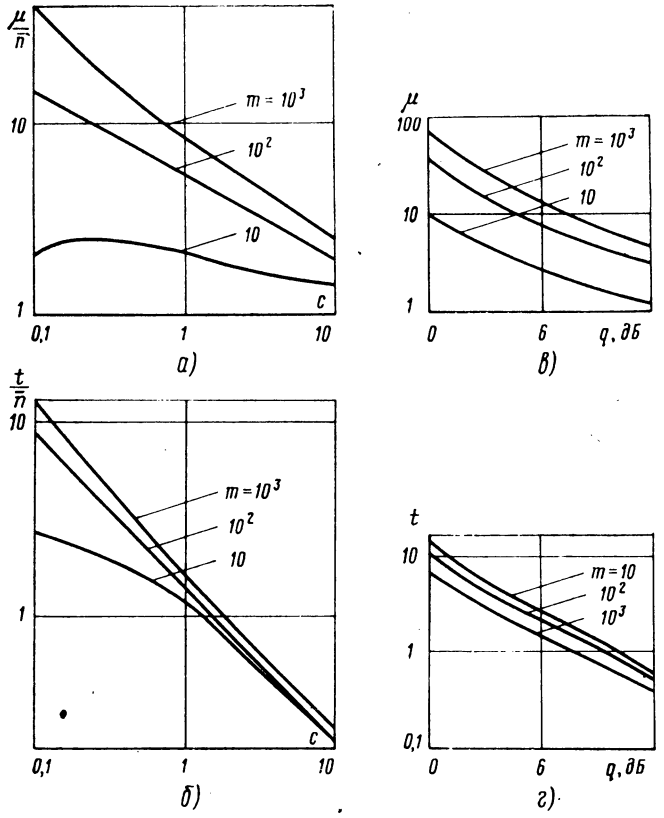


Рис. 4.15. Статистические характеристики длительности многоканальной последовательной процедуры

Иногда параметры μ_m и t_m непосредственно выражаются через параметры исходного распределения $F(n)$. Легко видеть, что для показательного распределения $F(n) = 1 - \exp(-n/\bar{n})$; $\mu_m = \bar{n} \ln m$; $t_m = \bar{n}$. Для большинства распределений $F(n)$ уравнение (4.94) решается относительно μ_m только численными методами.

Для тех случаев, когда длительность одноканальной процедуры подчиняется распределению Вальда (4.14), на рис. 4.15, *а* приведены рассчитанные с помощью таблиц [163] для ряда значений m зависимости от параметра c нормированного $(1 - 1/m)$-квантиля $\mu_m/\bar{n}$, а на рис. 4.15, *б* для тех же значений m приведены зависимости от c отношения

$t_m/\bar{n}$. Погрешность аппроксимации m-й степени распределения Вальда двойным экспоненциальным не превышает 15% при $m = 10$, $c = 0{,}1$ и быстро уменьшается с ростом c и m. Для $m \to \infty$, когда $F(n_M) = F^m(n)$ отлична от нуля только при значениях $F(n)$, весьма близких к единице, т. е. при $n \gg \bar{n}$, возможна аппроксимация распределения Вальда показательным (см. § 4.2). Для этого случая в [190] найдены аналитические выражения функции распределения $F(y)$ нормированной длительности $y = n_M/\bar{n}_M$, а также ее математического ожидания и дисперсии.

На рис. 4.15, *в* и *г* приведены рассчитанные зависимости параметров μ_m и t_m от отношения сигнал-шум q_1^2 для случая сильного сигнала с рэлеевскими флуктуациями амплитуды, когда распределение длительности одноканальной процедуры описывается формулой (4.59). Погрешность расчёта $\bar{n}_M$ с помощью (4.95) и графиков рис. 4.15, *в* и *г* зависит от q_1^2: при $q_1^2 = 0$ дБ и $m = 10$ максимальная ошибка составляет 15%, при $q_1^2 = 12$ дБ она возрастает до 30%, поскольку точность аппроксимации $F(n_M)$ непрерывным распределением (4.93) при $n \to 1$ ухудшается. Более точной для распределения $F(n)$, описываемого выражением (4.59), оказывается эмпирическая формула

$$\bar{n}_M = \mu_M + t_m, \tag{4.96}$$

погрешность которой при $m = 10$ для всех q_1^2 не превышает 15% и быстро уменьшается с ростом m.

Отметим, что для всех распределений $F(n)$ экспоненциального класса параметр t_m, а следовательно, и дисперсия $M_2(n_M) = 1{,}65t_m^2$ с ростом числа каналов стремятся к некоторому установившемуся значению, что связано со свойством предельного распределения (4.93), для которого $\lim\limits_{m\to\infty} t_m = \text{const}$ [172].

Параметр μ_m, а соответственно и средняя длительность многоканальной процедуры $\bar{n}_M$ возрастают с ростом m по закону, близкому к линейно-логарифмическому: $\bar{n}_M = \bar{n} + k \ln m$, где $k > 0$ — некоторый коэффициент.

Как показывают результаты большого числа работ по вопросам обнаружения сигналов, такая закономерность, отражающая рост «платы» за априорную неопределенность параметров сигнала при увеличении числа их возможных значений, является типичной и свойственна всем многоканальным процедурам — как последовательным, так и однопороговым. Например, в многоканальном обнаружителе Неймана—Пирсона вероятность ложной тревоги $\alpha_m = 1 - (1 - \alpha_1)^m \simeq m\alpha_1$. Для поддержания на выходе такого обнаружителя постоянной вероятности ложной тревоги $\alpha_m = \alpha_1$ необходимо с ростом числа каналов повышать пропорционально $\ln m$ решающий порог во всех каналах, что в свою очередь требует увеличения объема выборки для сохранения заданной вероятности правильного обнаружения [156].

Зависимость от числа каналов m верхнего порога последовательной процедуры с независимыми решениями, обеспечивающей $\alpha_m = \alpha_1$,

имеет аналогичный вид: $A(m) = A + \ln m$. Однако, как следует из рис. 4.16, при увеличении m нарастает не только связанная с верхним порогом $A(m)$ средняя длительность последовательного обнаружения $\bar{n}_{1M}$, но и длительность наблюдения в отсутствие сигналов $\bar{n}_{0M}$, от верхнего порога практически не зависящая. Существенно, что временные затраты последовательной процедуры растут быстрее, чем для эквивалентной по надежности процедуры Неймана—Пирсона. При некотором m, определяемом видом и параметрами распределений $W(\mathbf{x}|H_1)$ и $W(\mathbf{x}|H_0)$, а также заданными вероятностями ошибок α_1 и β_1, правило с независимыми решениями начинает проигрывать однопороговому, что свидетельствует о неоптимальности данного последовательного алгоритма в задачах различения сложных гипотез.

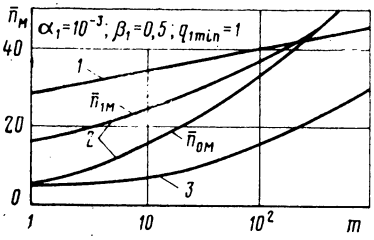


Рис. 4.16. Зависимость средней длительности различных процедур принятия решения от числа независимых каналов приема:

1 — обнаружитель Неймана — Пирсона; *2* — последовательная процедура с независимыми решениями при $q_1 = \text{const}$; *3* — последовательная процедура с независимыми решениями при $q_1 = f(R)$ (математическое моделирование, сигнал с независимыми рэлеевскими флуктуациями огибающей)

Радиолокационное последовательное обнаружение с разрешением по дальности. Тот факт, что при большом числе однородных каналов последовательная процедура с независимым принятием решения далека от оптимальной, в некоторых работах служил причиной для вывода о ее непригодности для радиолокационного обнаружения с высоким разрешением по дальности [169, 191]. В действительности каналы (элементы разрешения) радиолокационного дальномера неоднородны, поскольку распределение выборки в присутствии сигнала зависит от его мощности, а последняя при фиксированной эффективной рассеивающей площади цели, как известно, является функцией дальности.

Для однопороговых критериев учет зависимости мощности сигнала от дальности не дает ощутимого эффекта. Поэтому обычно во всех каналах полагают $W(x_i|H_1) = W(x|q_{1\min})$, где $q_{1\min}$ — эффективное значение сигнала, отраженного от расчетной цели, находящейся на максимальной дальности $R_{\max}$, при которой обеспечивается заданная вероятность обнаружения.

При последовательном анализе учет зависимости $q_1(R)$ позволяет сократить число каналов, в которых наиболее вероятна затяжка наблюдения в отсутствие сигналов, что эквивалентно уменьшению общего числа параллельно анализируемых каналов [156]. Действительно, функция распределения длительности последовательной процедуры при гипотезе H_0 смещается влево с увеличением расчетного отношения сигнал-шум q_1. Поэтому функция распределения длительности многоканальной последовательной процедуры, учитывающей зависимость $q_1(R)$,

$$F(n_M[q_1(R)]) = \prod_{j=1}^{m} F(n \mid q_{1j}) > F^m(n \mid q_{1\min}).$$

Соответственно

$$\bar{n}_M[q_1(R)] = \sum_{n=1}^{\infty}(1 - F(n_M[q_1)\ R)]) < \bar{n}_M[q_1(R_{\max})] = \sum_{n=1}^{\infty}(1 - F(n_M[q_1(R_{\max})]).$$

На рис. 4.16 приведена зависимость $\bar{n}_M = f(m)$ для случая $q_{1j} = q_{\min} \times \times R^2_{\max}/R_j^2$, соответствующего уравнению радиолокации, при $R_{\max}/R_{\min} = 20$;

$q_{1\,\min} = 1$. Выигрыш в объеме выборки по сравнению с однопороговой процедурой при $m = 10^3$ составляет 1,5—2 раза [192, 193].

Обратим внимание, что этот выигрыш достигается благодаря некоторой трансформации характеристики обнаружения $D = f(R)$. При $q_1 = \text{const}$ вероятность обнаружения расчетной цели монотонно возрастает с уменьшением дальности. Для $q_1 = f(R)$ эта вероятность остается примерно постоянной, близкой к расчетному значению D_1, на всех дальностях, где слабо сказывается эффект «перескока» решающей статистики за пороги, приводящий к повышению вероятности правильного обнаружения. Влияние этого эффекта нарастает с уменьшением дальности до цели, в результате характеристика обнаружения описанной после-

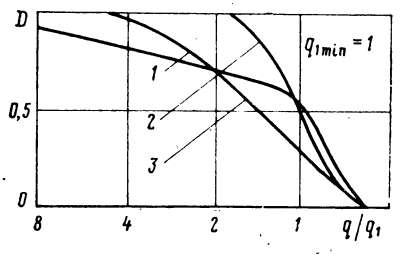


Рис. 4.17. Зависимость вероятности правильного обнаружения от дальности при радиолокационном наблюдении:

1 — обнаружитель Неймана — Пирсона; *2* — последовательный обнаружитель с независимыми решениями при $q_1 = q_{1\,\min} = \text{const}$; *3* — последовательный обнаружитель с независимыми решениями при $q_1 = f(R)$

довательной процедуры приобретает вид, изображенный на рис. 4.17. Необходимый в некоторых случаях компромисс между требованиями минимальной средней длительности наблюдения и максимальной крутизны зависимости $D = f(R)$ может быть достигнут, если регулированием $q_1 = f(R)$ охватывается лишь часть каналов, расположенных на максимальной дальности [194].

4.4.3. Правила обнаружения с зависимыми решениями

Основная причина потерь при многоканальном последовательном анализе с независимыми решениями состоит в том, что время, затрачиваемое на завершение эксперимента в тех каналах, где он затянулся, не используется для уточнения принятых решений в остальных каналах. Более эффективны последовательные алгоритмы с зависимыми решениями, в которых решение о прекращении опыта в каждом канале выносится на основании анализа совокупности значений решающей статистики, накопленных во всех каналах. Прекращению такой многоканальной процедуры могут соответствовать различные комбинации состояний статистик в каналах.

Близкой к оптимальной является последовательная процедура, основанная на статистике безусловного отношения правдоподобия, которое в случае обнаружения точно известного числа сигналов l, отличающихся значением дискретного параметра ϑ_j, имеет вид

$$\overline{\Lambda}_l = \sum_{i=1}^{C_m^l} \widetilde{\Lambda}_i P_i. \qquad (4.97)$$

Здесь $\widetilde{\Lambda}_i = \prod_{j \in S_i} \Lambda_j$; $S_i = S_i(l)$ — множество индексов j каналов, образующих i-е сочетание из m по l, соответствующее одному из возможных расположений l сигналов в m каналах ($i = 1 \div C_m^l$, $C_m^l =$

$= \frac{m!}{l!\,(m-l)!}$; P_l — вероятность такого расположения; Λ_j — отношение правдоподобия, накопленное в j-м канале.

Алгоритм обнаружения, построенный на статистике (4.97), интерпретирует неизвестный параметр ϑ как мешающий и осуществляет проверку гипотезы H_0 против обобщенной простой альтернативы $\overline{H}_l$, предполагающей наличие l сигналов без указания значений параметров $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_l$.

После принятия на основе статистики $\overline{\Lambda}_l$ решения в пользу $\overline{H}_l$ максимально правдоподобной оценке параметров обнаруженных сигналов соответствуют индексы тех l каналов, в которых накоплены максимальные значения парциальных статистик Λ_j. Для выявления этих каналов необходимо произвести ранжировку выборки $\{\Lambda_j\}$. Индексы ранжированной в порядке убывания выборки $\{\Lambda_j\}$ в дальнейшем будут иметь обозначения j^* $(j^* = 1 \div m)$.

Если ранжировка выборки $\{\Lambda_j\}$ производится непосредственно в ходе наблюдения, критерий обнаружения точно известного числа сигналов может строиться на основе l максимальных отсчетов статистики Λ_{j^*}, $j^* = 1 - l$. Переход к статистикам экстремальных значений позволяет упростить алгоритм по сравнению с оптимальным, построенным на статистике (4.97). Поскольку вклад в сумму (4.97) каналов, содержащих сигнал, в вероятностном смысле максимален, обнаружители на экстремальных статистиках по мощности мало уступают оптимальным [153]. Однако статистика

$$\Lambda_l^*(\mathbf{x}_{mn}) = \prod_{j^*=1}^{l} \Lambda_{j^*}(\mathbf{x}_{mn})$$

не является отношением правдоподобия выборочного вектора $\mathbf{x}_{mn}$, поэтому условие продолжения последовательной процедуры, обеспечивающей расчетные вероятности ошибок, в этом случае имеет вид $B_1^* < \Lambda_l^* < A_1^*$, где A_1^*, B_1^* — некоторые пороги, отличающиеся от вальдовских. Требуемые вероятности ошибок при вальдовских порогах могут быть обеспечены, если рассматривать $\Lambda_l^*(\mathbf{x}_{mn})$ как некоторую «промежуточную» статистику выборочного вектора $\mathbf{x}_{mn}$, для которой может быть рассчитано отношение правдоподобия

$$L(\Lambda_l^*) = W(\Lambda_l^* \mid H_l)/W(\Lambda_l^* \mid H_0) = \prod_{j^*=1}^{l} [W(\Lambda_{j^*} \mid H_1)/W(\Lambda_{j^*} \mid H_0)]. \quad (4.98)$$

Ситуации, когда число сигналов, подлежащих обнаружению, точно известно априори, на практике встречаются сравнительно редко. Типичной является задача проверки простой гипотезы H_0 об отсутствии хотя бы одного сигнала против односторонней альтернативы H_M, предполагающей наличие в m-канальной системе некоторого априори неизвестного числа сигналов $l \geqslant 1$. Оптимальное правило различения таких гипотез должно основываться на статистике, получаемой усреднением отношения правдоподобия (4.97) по распределению параметра

l — априорному $P(l)$ либо апостериорному $P(\widehat{l}|\widehat{l})$, вычисленному на основании оценки $\widehat{l}$, получаемой в ходе наблюдения. Априорное распределение $P(l)$ во многих задачах может приниматься равномерным в интервале $1 - l_{max}$; иногда есть основания считать его биномиальным или пуассоновским [172]. При высокой точности оценки $\widehat{l}$ эффективные алгоритмы обнаружения могут быть получены непосредственной подстановкой оценки $\widehat{l}$ вместо параметра l в статистику (4.97) (подробнее см. п. 4.3.1).

Наряду с рассмотренными выше строгими методами синтеза возможен эвристический подход к построению последовательных алгоритмов обнаружения неизвестного числа сигналов. Условием окончания опыта в таких алгоритмах должно быть вынесение решения в пользу H_0 или H_1 во всех без исключения каналах.

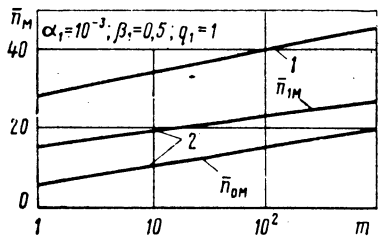


Рис. 4.18. Зависимость средней длительности различных процедур принятия решения от числа независимых каналов приема:

1 — обнаружитель Неймана — Пирсона; *2* — обнаружитель Маркуса — Сверлинга (математическое моделирование, сигнал с независимыми рэлеевскими флуктуациями)

Обнаружение единственного сигнала. Наболее подробно в настоящее время исследован случай обнаружения единственного сигнала ($l = 1$), появление которого в любом из m каналов равновероятно. При этом

$$\bar{\Lambda} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\Lambda_j = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\exp(Z_j), \qquad (4.99)$$

т. е. безусловное отношение правдоподобия представляет собой выборочное среднее парциальных статистик Λ_j. Последовательную процедуру, основанную на статистике (4.99), иногда называют процедурой с игнорированием разрешения [152, 195] или процедурой Маркуса—Сверлинга [156, 169]. Условие прекращения наблюдения для этой процедуры имеет вид $\bar{\Lambda}(n) \leqslant B_1 \cup \bar{\Lambda}(n) \geqslant A_1$; n — номер шага.

На рис. 4.18 приведены примеры зависимости $\bar{n}_м = f(m)$ процедуры Маркуса—Сверлинга, полученные методом математического моделирования. Как следует из графика, абсолютный выигрыш в среднем объеме выборки по сравнению с обнаружителем Неймана—Пирсона в данном случае практически не зависит от числа каналов m, относительный выигрыш при $m = 10^3$ составляет 2—3 раза. Этот результат подтверждает возможность построения эффективных последовательных решающих правил при большой априорной неопределенности неизвестного параметра.

В качестве квазиоптимального при обнаружении единственного сигнала часто рассматривают алгоритм, основанный на экстремальной

статистике $\Lambda^* = \Lambda_{j^*=1}$ [196]. Возможность перехода от оптимальной статистики (4.99) к экстремальной обусловлена тем, что в момент принятия решения в пользу H_1 с большой вероятностью $\Lambda(H_1) \gg \Lambda(H_0)$, т. е. значение суммы (4.99) в этот момент в основном определяется статистикой канала, в котором обнаружен сигнал:

$$\bar{\Lambda}(H_1) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \Lambda_j \approx \frac{1}{m} \Lambda^*. \qquad (4.100)$$

Из (4.100) непосредственно следует, что условие $\bar{\Lambda} \geqslant A_1$, гарантирующее согласно (4.1) значение $\alpha \leqslant \alpha_1$, практически эквивалентно условию $\Lambda^*/m > A_1$; следовательно,

$$A_1^* \approx mA_1. \qquad (4.101)$$

Вероятность пропуска для процедуры, построенной на статистике Λ^*, при вальдовском пороге B_1, как уже указывалось, отличается от расчетной, определяемой формулой (4.1). Причина отличия в данном случае состоит в том, что в течение всего времени, пока статистика Λ^* находится в зоне неопределенности, продолжается накопление парциальных статистик во всех прочих каналах. В результате становится возможным возврат в зону неопределенности случайно вышедшей за нижний порог статистики канала, содержащего сигнал, но одновременно возрастает средняя длительность наблюдения $\bar{n}_{0M}$.

При оптимальном пороге B_1^* вероятность пропуска β и средняя длительность $\bar{n}_{0M}$ процедуры на экстремальной статистике Λ^* близки к соответствующим характеристикам процедуры Маркуса—Сверлинга, однако задача поиска этого порога оказывается довольно сложной [153]. Отношение правдоподобия (4.98) для экстремальной статистики Λ^* имеет вид [197]

$$L(\Lambda^*) = \frac{W(\Lambda^* \mid H_1)}{W(\Lambda^* \mid H_0)} = \left(\frac{1}{m} \frac{W(\Lambda \mid H_1)}{W(\Lambda \mid H_0)} - \frac{m-1}{m} \frac{F(\Lambda \mid H_1)}{F(\Lambda \mid H_0)} \right)_{\Lambda=\Lambda^*}. \qquad (4.102)$$

Легко показать, что в области значений величины $L(\Lambda^*)$, примыкающей к верхнему порогу $A_1 \approx 1/\alpha_1 \gg 1$, имеет место

$$L(\Lambda^*)_{\Lambda^* \gg 1} \approx \Lambda^*/m \qquad (4.103)$$

сравните с (4.101)].

В области значений $\Lambda^* \leqslant 1$, соответствующих принятию гипотезы H_0 при $\beta \leqslant 0{,}5$, вид и параметры функции $L(\Lambda^*)$ существенно зависят от слагаемого $(m-1)\,F(\Lambda/H_1)/mF(\Lambda|H_0)$, которое меняется от шага к шагу. В результате расчет оптимальной статистики $L(\Lambda^*)$ в области вальдовского порога B_1 оказывается ненамного проще расчета оптимального порога B^* (см. выше).

Таким образом, при построении последовательной процедуры на основе экстремальной статистики неизбежно возникают проблемы, связанные с ее неоптимальностью с точки зрения принятия решения в пользу H_0. С другой стороны, трудности формирования оптимальной статистики $\bar{\Lambda}$ (4.99), некоторое время назад являвшиеся серьезным

препятствием к ее практическому использованию, по мере прогресса вычислительной техники становятся все менее существенными [194]. Эту тенденцию следует учитывать при выборе вида решающей статистики для конкретных устройств обнаружения единственного сигнала.

Обнаружение произвольного числа сигналов. Выше уже отмечалось, что многоканальная схема прежде всего необходима для обнаружения и разрешения нескольких сигналов, наблюдаемых одновременно. Однако при анализе характеристик многоканальных алгоритмов вероятность наличия нескольких сигналов обычно полагают пренебрежимо малой и ограничиваются случаем наблюдения единственного сигнала. Существуют практически важные задачи, где это предположение не выполняется, поэтому параметры многоканальной процедуры при наблюдении нескольких сигналов, число которых априори неизвестно, представляют самостоятельный интерес.

Из известных в настоящее время последовательных алгоритмов для обнаружения произвольного числа сигналов $l \leqslant m$ кроме правила с независимыми решениями (см. выше) может применяться правило с одновременными решениями [198]. В соответствии с этим правилом накопление статистик Λ_j во всех каналах продолжается до шага n, на котором впервые выполняется условие

$$\Lambda_j(n) \leqslant B_1^* \cup \Lambda_j(n) \geqslant A_1^*, \quad j = 1 \div m, \tag{4.104}$$

т. е. статистика во всех каналах одновременно выйдет из зоны неопределенности. Решение в пользу H_1 в каждом канале при этом выносится на основании парциальной статистики Λ_j, что обеспечивает разрешение всех сигналов. При вынесении решения в пользу H_0 данное правило эквивалентно правилу, основанному на экстремальной статистике, поскольку условия $\Lambda_j(n)_{j=1 \div m} \leqslant B_1$ и $\Lambda^*(n) \leqslant B_1$ совпадают. Как и выше, здесь требуется определить зависящий от m оптимальный нижний порог B_1^*, при котором обеспечивается расчетное значение $\beta = \beta_1$, поскольку для вальдовского порога B_1 имеем $\beta < \beta_1$ и это неравенство усиливается с ростом m.

Дополнительные возможности оптимизации алгоритмов различения сложных гипотез дает способ, основанный на использовании для вынесения решения в пользу H_1 и H_0 различных статистик — обнаружения и необнаружения [200]. Ниже такие алгоритмы будем называть алгоритмами с комбинированной решающей статистикой.

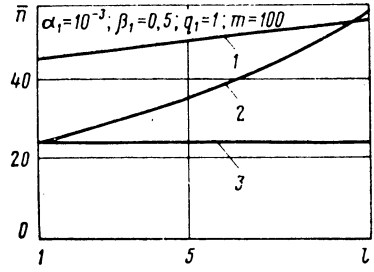
Комбинированная статистика, использующая в качестве статистики обнаружения парциальные отношения правдоподобия $\Lambda_j(n)$ отдельных каналов, а в качестве статистики необнаружения — обобщенное отношение правдоподобия (4.99) всех каналов, парциальные статистики которых на n-м шаге не пересекли верхний порог, при малых l позволяет построить последовательное решающее правило, близкое по эффективности к правилу Маркуса—Сверлинга, сохраняющее разрешение по параметру ϑ и не требующее оптимизации нижнего порога. Условие окончания наблюдения для $\alpha_m = \alpha_1$ при этом имеет вид

$$\frac{1}{m - k(n)} \sum_{j \in S_A} \Lambda_j(n) \leqslant B_1 \cup \Lambda_j(n) \geqslant A_1^* \approx m A_1. \tag{4.105}$$

Здесь S_A — множество индексов j каналов, где $\Lambda_j(n) \geqslant A_1^*$; $k(n)$ — число каналов, в которых на n-м шаге $\Lambda_j(n) \geqslant A_1^*$ $(0 \leqslant k \leqslant m)$.

Очевидно, что при вынесении решения в пользу H_0 во всех каналах такая процедура тождественна процедуре Маркуса—Сверлинга, т. е. обеспечивает расчетную вероятность пропуска β_1 и минимальную среднюю длительность $\bar{n}_{M_0}$ при вальдовском пороге B_1. Средние длительности этих двух процедур при наличии единственного сигнала также практически совпадают (см. рис. 4.18, 4.19).

На рис. 4.19 приведены полученные методом математического моделирования зависимости средней длительности процедуры $\bar{n}$ и вероятности правильного обнаружения D от числа сигналов l для правил с не-



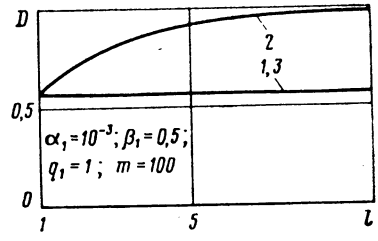


Рис. 4.19. Зависимость средней длительности последовательной процедуры и вероятности правильного обнаружения от числа сигналов $(l=1\div10)$:

1 — независимые решения; *2* — правило (4.105); *3* — правило (4.112) (математическое моделирование, сигнал с независимыми рэлеевскими флуктуациями)

зависимыми решениями и (4.105). Из рисунка следует, что среднее время принятия решения с увеличением l быстро возрастает, причем для процедуры с независимыми решениями этот рост не сопровождается, а для процедуры (4.105) сопровождается увеличением вероятности обнаружения D.

Поскольку в рассматриваемой задаче увеличение априорной неопределенности, связанной с увеличением l, компенсируется ростом суммарной энергии сигнала в каналах, можно рассчитывать на существование более предпочтительной процедуры со слабой зависимостью $\bar{n}$ и D от неопределенного параметра l. Действительно, такую процедуру удается построить с использованием оценки неизвестного параметра l в ходе наблюдения.

В процессе наблюдения информация о параметре l содержится в апостериорных вероятностях наличия сигнала в каналах $P_j=\Lambda_j/(\Lambda_j+1)$ [3]. Апостериорная вероятность некоторого числа сигналов

$$P(l)=\sum_{i=1}^{C_m^l}\prod_{j\in S_i}P_j\prod_{j\bar{\in}S_i}(1-P_j). \qquad (4.106)$$

Здесь S_i — то же, что в (4.97), в первом произведении l, а во втором — $(m-l)$ сомножителей.

Синтез оптимального алгоритма обнаружения-оценивания, как уже указывалось, включает в себя получение из распределения $P(l)$ оценки $\widehat{l}$ параметра l и расчет для этой оценки условного распределения $P(\widehat{l}\,|\,l)$. На основании распределения $P(\widehat{l}\,|\,l)$ при заданном априорном распределении $P(l)$ $(1 \leqslant l \leqslant l_{\max})$ может быть вычислено апостериорное распределение $P(l\,|\,\widehat{l})$ и безусловное отношение правдоподобия

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{l_{\max}} \Lambda(\mathbf{x}\,|\,l)\,P(l\,|\,\widehat{l}\,) = \sum_{l=1}^{l_{\max}} \Lambda(\mathbf{x}\,|\,l)\,\frac{P(\widehat{l}\,|\,l)\,P(l)}{\sum\limits_{l=1}^{l_{\max}} P(\widehat{l}\,|\,l)\,P(l)}. \tag{4.107}$$

Однако расчет оптимальной статистики (4.107) наталкивается на серьезные математические трудности, связанные со сложностью нахождения максимально правдоподобной оценки $\widehat{l}$ и вычисления оптимальной статистики (4.97). Рассмотрим возможность упрощения этой задачи, основанную на использовании эвристической оценки $\widehat{l}$ и статистики экстремальных значений (4.98) вместо оптимальной статистики (4.97).

Пусть имеется ранжированная в порядке убывания выборка значений парциальных решающих статистик $\{\Lambda_{j^*}(n)\}$. Будем считать появление любого числа сигналов в диапазоне $1 - l_{\max}$ независимым равновероятным событием. При этом каждый член выборки $\{\Lambda_{j^*}(n)\}$ может рассматриваться как максимальный по отношению к $m - j^*$ членам, имеющим больший индекс. Следовательно, для него может быть рассчитано отношение правдоподобия $L(\Lambda_{j^*}(n))$ (4.102). Примем в качестве оценки неизвестного параметра l число каналов $\widehat{l}$, в которых полученные таким образом $L(\Lambda_{j^*}(n)) \geqslant 1$. Эту оценку подставим вместо параметра l в алгоритм, соответствующий точно известному числу сигналов. Статистика (4.98) при этом приобретает вид

$$L(\Lambda^*(\mathbf{x}|\,l)) = \prod_{j^*=1}^{j^*=\widehat{l}} (\Lambda_{j^*}) = \prod_{j^*=1}^{\widehat{l}} \frac{W(\Lambda_{j^*}\,|\,H_1)}{W(\Lambda_{j^*}\,|\,H_0)} =$$

$$= \prod_{j^*=1}^{\widehat{l}} \left(\frac{\Lambda}{m-j^*+1} + \frac{m-j^*}{m-j^*+1} \frac{F(\Lambda\,|\,H_1)}{F(\Lambda\,|\,H_0)} \right)_{\Lambda=\Lambda_{j^*}}, \tag{4.108}$$

где $\widehat{l}$ — число каналов, в которых $L(\Lambda_{j^*}) \geqslant 1$; j^* — индексы членов ранжированной в порядке убывания выборки $\{\Lambda_j\}$.

Для того чтобы избежать трудностей, связанных с расчетом отношения правдоподобия (4.108) в области нижнего порога (см. выше), целесообразно построить алгоритм обнаружения по принципу комбини-

рованной статистики. Статистика (4.108), используемая в таком алгоритме только для проверки гипотезы H_l, с учетом (4.103) упрощается:

$$\prod_{j^*=1}^{\widehat{l}} \left(\frac{\Lambda}{m-j^*+1} + \frac{m-j^*}{m-j^*+1} \frac{F(\Lambda \mid H_1)}{F(\Lambda \mid H_0)} \right)_{\substack{\Lambda=\Lambda_{j^*} \\ \Lambda_{j^*} \geqslant A_1 (m-j^*+1)}} \approx$$

$$\approx \prod_{j^*=1}^{\widehat{l}} \frac{\Lambda_{j^*}}{m-j^*+1}, \qquad (4.109)$$

где $\widehat{l}$ — число каналов, в которых $\Lambda_{j^*} \geqslant m - j^* + 1$.

Для решения в пользу H_0 при этом может использоваться статистика

$$\overline{\Lambda} = \frac{1}{m-\widehat{l}} \sum_{j^*=\widehat{l}+1}^{m} \Lambda_{j^*},$$

что обеспечивает в каналах с индексами $j^* > \widehat{l}$ проверку H_0 против альтернативы H_1, предполагающей наличие единственного сигнала. Условие прекращения наблюдения для рассматриваемого алгоритма имеет вид

$$\frac{1}{m-\widehat{l}} \sum_{j^*=\widehat{l}+1}^{m} \Lambda_{j^*} \leqslant B_1 \cup \prod_{j^*=1}^{\widehat{l}} \frac{\Lambda_{j^*}}{m-j^*+1} \geqslant A_1. \qquad (4.110)$$

Очевидно, что при вынесении решения в пользу H_0 ($\widehat{l} = 0$) правило (4.110) совпадает с правилом Маркуса—Сверлинга, а при обнаружении единственного сигнала ($\widehat{l} = 1$) с учетом (4.101) — с правилом (4.105).

Сравнительно громоздкая операция ранжировки выборки в таком алгоритме необходима только для вычисления статистики обнаружения (4.109). В тех случаях, когда максимальное число сигналов $l_{\max} \ll m$, с учетом сходимости при $m \to \infty$ распределений экстремальных значений к предельному (см. п. 4.4.2), зависимостью функций правдоподобия $W(\Lambda_{j^*} | H_{1,0})$ от индекса j^* в выражении (4.108) можно пренебречь. Статистика обнаружения (4.109) в этом случае предельно упрощается:

$$\prod_{j^*=1}^{\widehat{l}} \frac{\Lambda_{j^*}}{m-j^*+1} \underset{j^* \ll m}{\approx} \prod_{i} \frac{\Lambda_i}{m}, \qquad (4.111)$$

где $i = 1 \div \widehat{l}$ — индексы каналов, в которых $\Lambda \geqslant m$.

Таким образом, при $l_{\max} \ll m$ правило прекращения опыта (4.110) может быть представлено в виде

$$\frac{1}{m-\widehat{l}} \sum_{j=1}^{m-\widehat{l}} \Lambda_j \leqslant B_1 \cup \prod_{i=1}^{\widehat{l}} \frac{\Lambda_i}{m} \geqslant A_1, \qquad (4.112)$$

где $j = 1 \div (m - \widehat{l})$ — индексы каналов, в которых $\Lambda < m$.

На рис. 4.19 приведены результаты моделирования последовательного алгоритма, использующего решающее правило (4.112). Из рисунка следует, что для этого алгоритма средняя длительность $\bar{n}_l$ и вероятность обнаружения D не зависят от числа одновременно наблюдаемых сигналов и совпадают с соответствующими характеристиками процедуры Маркуса—Сверлинга, квазиоптимальной при наблюдении единственного сигнала. Вероятность ложной тревоги, т. е. принятия решения в пользу H_1 в каналах, не содержащих сигнала, как при отсутствии, так и при наличии сигналов в других каналах не превышает расчетного значения, определяемого вальдовским порогом. Таким образом, эксперимент подтверждает возможность построения эффективных алгоритмов обнаружения-измерения неизвестного числа сигналов на основе рассмотренной эвристической оценки.

В заключение отметим, что в данном разделе всюду для простоты изложения в качестве парциальных рассматривались статистики отношения правдоподобия $\Lambda_j(n) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_j(k)$, где k — номер шага последовательной процедуры. С точки зрения практической реализации предпочтительно накопление парциальной статистики $Z_j(n) = \ln \Lambda_j(n) = \sum_{k=1}^{n} z_j(k)$ с последующим преобразованием $\Lambda_j(n) = \exp Z_j(n)$. Алгоритмы, построенные по принципу комбинированной решающей статистики, имеют в этом смысле дополнительное преимущество, состоящее в том, что в качестве статистики обнаружения могут использоваться величины $Z_j(n)$ [правило (4.105)] или их суммы [правила (4.110), (4.112)]. Экспоненциальному преобразованию при этом должны подвергаться значения $Z_j(n)$ не во всем их возможном диапазоне, а только значения $Z_j(n) < B + \ln m$, входящие в статистику необнаружения; соответственно уменьшается разрядность устройства, вычисляющего $\sum_{l} \exp Z_j(n)$.

4.4.4. Многоэтапные последовательные процедуры

Всюду выше при рассмотрении многоканальных алгоритмов обнаружения считалось, что условия, в которых формируется выборка $\mathbf{x}$, и правило принятия решения в пользу гипотезы H_0 или альтернативы H_1 в ходе опыта остаются неизменными. При сложной альтернативе H_0 в ряде случаев более эффективными оказываются алгоритмы обнаружения, допускающие изменение плана эксперимента в зависимости от его хода.

В частности, средняя длительность многоканальной последовательной процедуры с независимым решением сокращается, если перейти от постоянных (вальдовских) порогов к функциональным порогам, зависящим от номера шага, для которых область неопределенности по мере накопления данных сужается. Вырожденным случаем процедуры с такими порогами является усеченная последовательная процедура, при которой на некотором заранее заданном шаге n_y наблюдение прерывается и решение в пользу H_0 или H_1 выносится по однопороговому решающему правилу. Удобных для инженерной практики методов расчета зависимостей $A(n)$ и $B(n)$, обеспечивающих минимизацию среднего объема выборки $\bar{n}_M$ при заданных α_1 и β_1, в настоящее время не разработано. Известно, что для нормальной выборки использование линейного или ступенчатого возрастающего нижнего порога $B(n)$ приводит к сокращению средней длительности

$\bar{n}_M$ примерно в 2 раза по сравнению со случаем вальдовского порога при $m \approx$ $\approx$ 100 [199].

Дальнейшее повышение эффективности многоканального последовательного обнаружения обеспечивается, если в ходе эксперимента целенаправленно изменяются не только решающее правило, но и условия наблюдения. Обычно условия опыта изменяются не на каждом шаге наблюдения, а по завершении некоторого этапа. Переход к каждому следующему этапу при этом зависит от результатов предыдущего, т. е. является случайным событием. Поэтому такие многоэтапные процедуры относятся к классу последовательных, даже если на некоторых этапах правило принятия решения базируется на выборках фиксированного объема [156]. (Иногда их выделяют в отдельный класс вырожденных последовательных процедур [154].)

Параметры первого этапа выбираются исходя из заданной вероятности β_1 пропуска сигнала, поэтому его средняя длительность может быть меньше величины, необходимой для поддержания расчетной вероятности ложной тревоги α_1. Решение в пользу гипотезы H_0 на первом этапе означает окончание опыта в целом; если гипотеза H_0 не подтверждается, происходит переход к следующему этапу; аналогичное правило действует и на последующих этапах.

Примером алгоритма этого класса может служить двухэтапное радиолокационное обнаружение, при котором на первом этапе разрешающая способность системы по дальности снижается либо из-за использования усредненной статистики типа (4.99), либо из-за сужения спектра зондирующего сигнала. На втором этапе, который проводится только при условии, что на первом этапе было принято решение об обнаружении, обеспечивается требуемая разрешающая способность и производится измерение дальности. Известен ряд многоэтапных процедур такого типа (см. например, библиографию в [156]). При оптимальном выборе параметров двух-трехэтапные многоканальные последовательные процедуры приближаются по эффективности к квазиоптимальным невырожденным последовательным процедурам. Недостатком таких алгоритмов является сравнительная сложность их реализации и использования в нестационарных условиях наблюдения.

Глава 5

ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ В НЕГАУССОВСКИХ ПОМЕХАХ

5.1. Постановка задачи

Большинство внешних помех радиотехническим, гидроакустическим и другим информационным системам является случайным процессом с негауссовским законом распределения вероятности мгновенных значений. Существенно негауссовскими являются атмосферные и индустриальные помехи, взаимные помехи радиосредств, активные помехи радиопротиводействия, пассивные помехи в радио- и гидролокационных системах, сосредоточенные помехи в широкополосных системах связи, шумы океана в пассивных гидроакустических системах обнаружения и др.

Негауссовские помехи по форме одномерного распределения вероятности мгновенных значений делятся на помехи импульсного и синусоидального типов. Помехи импульсного типа характеризуются частыми большими выбросами мгновенных значений и описываются распределениями вероятности с положительным эксцессом. К таким помехам относятся: атмосферные и индустриальные, активные импульс-

ные, отражения от взволнованной морской поверхности. Помехи синусоидального типа в противоположность импульсным помехам имеют редкие выбросы за пределы диапазона наиболее вероятных значений и описываются распределениями с отрицательным эксцессом. К таким помехам относятся: чисто синусоидальные без модуляции и с произвольной угловой модуляцией (активные помехи радиопротиводействия), синусоидальные в смеси с гауссовским шумом, активные прямошумовые помехи, полученные ограничением гауссовского шума, радиолокационные отражения от мешающих нефлуктуирующих объектов.

Задача обнаружения в этой главе формулируется следующим образом. По наблюдаемым данным $x_k = s_k + \xi_k$, представляющим выборку размером n из колебания $x(t) = s(t) + \xi(t)$, заданного на интервале времени $(0, T)$, где $s(t)$ — ожидаемый сигнал, $\xi(t)$ — помеха, необходимо принять решение о наличии сигнала. Рассматриваются сигналы когерентные (детерминированные и квазидетерминированные), а также некогерентные (некогерентная пачка импульсов, флуктуирующие сигналы общего вида). Выборка помехи ξ_k в общем случае коррелированная негауссовская.

Основное внимание уделяется проблеме обнаружения слабых сигналов, т. е. считается, что отношение сигнал-помеха на входе приемника много меньше единицы. В таких условиях работают, например, радиотехнические системы, использующие сложные сигналы, РЛС с селекцией движущихся целей на фоне мешающих отражений, радиотехнические системы в условиях радиопротиводействия, пассивные гидроакустические системы обнаружения.

Обнаружитель Неймана—Пирсона, максимизирующий вероятность правильного обнаружения D при фиксированной вероятности ложной тревоги α, принимает решение о наличии сигнала, когда выполняется неравенство

$$l = W_1(\mathbf{x})/W_0(\mathbf{x}) \geqslant C, \tag{5.1}$$

где $W_1(\mathbf{x})$ и $W_0(\mathbf{x})$ — распределения данных $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ при наличии и отсутствии сигнала; C — пороговый уровень, определяемый заданной вероятностью ложной тревоги α. При негауссовских помехах алгоритмы, следующие из (5.1), выражаются громоздкими вычислительными процедурами, мало пригодными для технической реализации.

Для случая малого отношения сигнал-помеха существуют другие подходы к оптимизации обнаружения. Один из них базируется на концепции локальной оптимальности [1]. При этом вводится в рассмотрение энергетический параметр сигнала ϑ такой, что при $\vartheta = 0$ сигнал исчезает и распределение смеси сигнала с помехой $W_1(\mathbf{x})$ переходит в распределение помехи $W_0(\mathbf{x})$. Локально оптимальным (ЛО) считают такое правило принятия решения $\varphi_{\text{ло}}$, при котором для фиксированной α

$$\left.\frac{\partial D(\vartheta, \varphi_{\text{ло}})}{\partial \vartheta}\right|_{\vartheta=0} > \frac{\partial}{\partial \vartheta} D(\vartheta, \varphi)|_{\vartheta=0},$$

где φ — неоптимальное решающее правило. Таким образом, если обнаружитель Неймана—Пирсона максимизирует вероятность правиль-

ного обнаружения D, то ЛО обнаружитель максимизирует наклон зависимости $D(\vartheta)$ в точке $\vartheta = 0$. Леман показал [204], что, применяя фундаментальную лемму Неймана—Пирсона, получаем: при фиксированном уровне α производная $D'(\vartheta)$ достигает максимума, когда решение о наличии сигнала принимается при выполнении неравенства

$$\frac{d}{d\vartheta} l(\vartheta)|_{\vartheta=0} \gtrless C. \qquad (5.2)$$

Заметим, что

$$\frac{d}{d\vartheta} l(\vartheta)|_{\vartheta=0} = \frac{d}{d\vartheta} \ln l(\vartheta)|_{\vartheta=0},$$

так как $l(\vartheta)|_{\vartheta=0} = 1$. Соотношение (5.2) является исходным для синтеза ЛО обнаружителей.

Другой подход к синтезу оптимального обнаружителя при слабых сигналах связан с критерием асимптотической оптимальности [1]. Асимптотически оптимальным (АО) для слабых сигналов считается такой обнаружитель, который при заданной энергии или других энергетических характеристиках сигнала, определяющих вероятность D, обеспечивает такое же значение D, как и обнаружитель Неймана—Пирсона, но в пределе: при объеме выборки наблюдения $n \to \infty$. Устремление $n \to \infty$ не должно изменять заданные энергетические характеристики сигнала, определяющие D. Это достигается соответствующим выбором зависимости амплитуды сигнала от объема выборки. АО обнаружитель находится из отношения правдоподобия (5.1) разложением его в ряд по степеням сигнала с отбрасыванием членов ряда, дающих при $n \to \infty$ нулевой вклад в среднее значение и дисперсию статистик, формируемых оконечными накопителями.

ЛО обнаружители в некоторых случаях могут обладать АО свойствами. В [205] сформулированы условия, при которых ЛО обнаружитель является асимптотически оптимальным. Эти условия выполняются, например, для задач обнаружения детерминированных и шумовых некогерентных сигналов в негауссовской помехе с независимыми выборочными значениями. В общем случае ЛО обнаружители не гарантируют максимальной вероятности D даже асимптотически.

В этой главе преимущественно рассматриваются АО обнаружители, которые сходятся по вероятности D к обнаружителю Неймана—Пирсона при достаточно большом объеме выборки n. Достаточные значения n зависят от конкретного вида помехи и требуемых значений D. Во многих случаях достаточным можно считать такое n, при котором заданное значение D достигается для отношений сигнал-помеха на входе $q_{вх} \leqslant 10^{-2}$. С увеличением $q_{вх}$ эффективность АО обнаружителя, рассчитанного на негауссовские помехи, снижается, но все же может быть выше, чем у обнаружителей Неймана—Пирсона, рассчитанных на гауссовский шум.

Качество алгоритмов обнаружения оценивается вероятностями правильного обнаружения D и ложной тревоги α. Однако расчет этих вероятностей требует знания плотности распределения вероятностей $W(Z)$ выходной статистики обнаружителя Z (статистики, сравниваемой

с порогом). Расчет плотности $W(Z)$ является трудной задачей, особенно для негауссовских помех. В том частном случае, когда Z является гауссовской статистикой, вероятности D и α являются монотонной функцией выходного отношения сигнал-помеха

$$q = (m_{z1} - m_{z0})^2/\sigma_{z0}^2, \tag{5.3}$$

где m_{z1} и m_{z0} — среднее значение статистики Z при наличии и отсутствии сигнала; σ_{z0}^2 — дисперсия статистики Z (предполагаемая одинаковой при наличии и отсутствии сигнала). В общем случае вероятности D и α перестают быть функциями только q и зависят еще от других статистических характеристик сигнала и помехи. Однако для грубой, качественной оценки обнаружителя можно по-прежнему пользоваться величиной (5.3).

5.2. Вероятностные модели негауссовских помех

Негауссовские процессы чаще всего для исчерпывающего вероятностного описания требуют такого количества статистической информации, которое трудно получить из физических измерений по причинам ограниченного времени анализа, сложности создания аппаратурных анализаторов и др. Эти обстоятельства вынуждают отказаться от полного вероятностного описания негауссовских помех в пользу упрощенного описания в рамках определенных хорошо изученных в математике случайных процессов. Такими процессами, в частности, являются негауссовские, происходящие из гауссовских, и марковские. Эти процессы удобны для описания, во-первых, потому, что требуют вполне доступной физической информации относительно объекта описания, а во-вторых, что не менее важно, на их основе значительно упрощается решение вероятностных задач математическими методами, так как теория указанных процессов достаточно развита.

Ниже рассматриваются свойства вероятностных моделей, применяемых для описания негауссовских помех.

Марковские модели. Под марковской p-связной моделью описываемой выборки подразумевается случайная выборка, плотность вероятности которой выражается произведением условных плотностей описываемой выборки не выше p-го порядка:

$$W_n(\xi_1,\ldots,\xi_n) = W_1(\xi_1)\ldots W(\xi_p|\xi_{p-1},\ldots,\xi_1)\prod_{k=p+1}^{n} W(\xi_k|\xi_{k-1},\ldots,\xi_{k-p}). \tag{5.4}$$

В формуле (5.4)

$$W(\xi_k|\xi_{k-1},\ldots,\xi_{k-p}) = \frac{W_{p+1}(\xi_k,\ldots,\xi_{k-p})}{W_p(\xi_{k-1},\ldots,\xi_{k-p})}, \tag{5.5}$$

где W_p — p-мерная плотность вероятности описываемой выборки. Увеличивая порядок марковской модели, можно получить сколь угод-

но хорошее описание любого реального процесса. Однако применение сложных моделей наталкивается на серьезные аналитические и технические трудности, связанные с описанием и аппаратурным анализом многомерных распределений. Вследствие этого зачастую приходится удовлетворяться моделями невысоких порядков.

Остановимся на свойствах гауссовских марковских моделей, из которых методом нелинейного преобразования можно получать негауссовские марковские модели.

В классе гауссовских процессов марковская модель порядка p определяется $(p+1)$ значениями корреляционной функции $B(k)$ описываемой выборки при $k=\overline{0, p}$. При этом корреляционная функция модели $\widetilde{B}(k)$ совпадает с $B(k)$ в точках $k=\overline{0, p}$. В других точках $\widetilde{B}(k)$ и $B(k)$ могут различаться.

Рассмотрим способ определения функции $\widetilde{B}(k)$ по заданной $B(k)$ для гауссовских процессов. Заметим, что матрица $||\widetilde{B}_{kl}^{-1}||$, обратная $||\widetilde{B}_{kl}|| = ||\widetilde{B}(|k-l|)||$, может иметь ненулевые элементы только на главной диагонали и примыкающих к ней p над- и поддиагоналях, т. е.

$$\widetilde{B}_{kl}^{-1}\begin{cases}\neq 0 \text{ при } |k-l|\leqslant p;\\ =0 \text{ при } |k-l|>p.\end{cases} \tag{5.6}$$

Свойство (5.6) следует из формулы

$$B_{kl}^{-1}=-\frac{\partial^2}{\partial\xi_k\,\partial\xi_l}\ln W_n(\xi), \tag{5.7}$$

которая с учетом определения модели (5.4) принимает вид

$$\widetilde{B}_{kl}^{-1}=-\sum_{m=p+1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\xi_k\,\partial\xi_l}\ln W(\xi_m|\xi_{m-1},\ldots,\xi_{m-p})-$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial\xi_k\,\partial\xi_l}[\ln W(\xi_p|\xi_{p-1},\ldots,\xi_1)+\ln W(\xi_{p-1}|\xi_{p-2},\ldots,\xi_1)+$$

$$+\ldots+\ln W_1(\xi_1)]. \tag{5.8}$$

В (5.7), (5.8) $W_n(\xi)$ — n-мерная гауссовская плотность; $W(\xi_k|\xi_{k-1},\ldots,\xi_{k-p})$ — соответствующие ей условные плотности.

Формула (5.8) однозначно определяет матрицу $||\widetilde{B}_{kl}^{-1}||$ первыми $(p+1)$ значениями корреляционной функции $B(k)$ описываемой выборки. Обратив $||\widetilde{B}_{kl}^{-1}||$, получим корреляционную матрицу модели $||\widetilde{B}_{kl}||$, в которой $\widetilde{B}_{1k}\equiv\widetilde{B}(k)$. В простейшем случае, при $p=1$, $\widetilde{B}(k)=\sigma^2[B_0(1)]^k$, где $B_0(1)=B(1)/\sigma^2$ — коэффициент корреляции соседних элементов в описываемой выборке; σ^2 — дисперсия выборки.

Функция $\widetilde{B}(k)$ является рациональной относительно своих первых значений $\widetilde{B}(0), \ldots, \widetilde{B}(p)$. Это следует из того, что матрица $||\widetilde{B}_{kl}||$, порождающая функцию $\widetilde{B}(k)$, имеет обратную $||\widetilde{B}_{kl}^{-1}||$, элементы которой являются рациональными функциями от $\widetilde{B}(0), \ldots, \widetilde{B}(p)$.

Обратим внимание, что процессы, сформированные из белого шума линейной динамической системы порядка $p\geqslant 2$ и являющиеся, как известно, компонентой p-мерного марковского процесса, не являются p-связными в смысле (5.4). Пусть, например, линейная система образована p последовательно включенными одинаковыми низкочастотными RC-фильтрами. При наличии на входе такой системы белого шума на выходе будем иметь процесс со спектральной плотностью

$$S(\omega)\sim 1/(\alpha^2+\omega^2)^p,\ \alpha=1/(RC),$$

Последовательность ξ_k, образованная из этого процесса с интервалом дискретизации Δt, имеет нормированную корреляционную функцию

$$B_0(k) = \frac{(p-1)!}{(2p-2)!} e^{-(\alpha \Delta t k)} \sum_{l=0}^{p-1} \frac{(2p-i-2)!\,(2\alpha\Delta t k)^l}{i!\,(p-i-1)!}. \quad (5.9)$$

Функция (5.9) представима как рациональная относительно своих $(p+1)$ первых отсчетов только при $p = 1$. Поэтому при $p \geqslant 2$ рассматриваемый процесс не обладает свойством (5.4).

Погрешность описания произвольного процесса марковскими моделями исследуется в [217, 218].

Модели в виде процессов, порождаемых гауссовским шумом. Наиболее доступной информацией о негауссовском процессе являются одномерная плотность вероятности и корреляционная функция. Учесть полностью такую информацию в гауссовских или марковских моделях невозможно. Подходящим способом описания процесса с заданными одномерной плотностью и корреляционной функцией является представление его результатом комбинированного линейного и нелинейного преобразования белого гауссовского шума n_l:

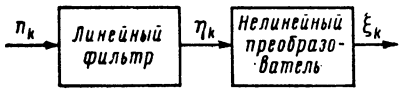


Рис. 5.1. Схема формирования негауссовских процессов

$$\xi_k = V\left(\sum_{l=1}^{n} A_{kl} n_l\right). \quad (5.10)$$

Оператору (5.10) соответствует схема образования ξ из $\mathbf{n}$, изображенная на рис. 5.1. Фильтр осуществляет линейное преобразование

$$\eta_k = \sum_{l=1}^{n} A_{kl} n_l, \quad (5.11)$$

такое, что $\langle\eta\rangle = 0$; $\langle\eta^2\rangle = 1$; $\langle\eta_k\eta_l\rangle = B_{0\eta}(|k-l|)$. Нелинейный элемент является безынерционным преобразователем с характеристикой $V(\eta)$, обратная функция которой $Q(\xi)$ однозначная, причем $dQ(\xi)/d\xi > 0$.

Оператор (5.10) определяется двумя характеристиками: матрицей $||A_{kl}||$ и функцией $V(\eta)$, вариацией которых можно добиться образования ξ с необходимым распределением вероятностей $W_{\xi 1}$ и корреляционной функцией $B_\xi(k)$.

При заданных $W_{\xi 1}$ и B_ξ характеристики оператора находятся в следующей последовательности. Сначала определяется функция $V(\eta)$ из нелинейного дифференциального уравнения

$$W_{\eta 1}(\eta) = W_{\xi 1}[V(\eta)] \frac{dV(\eta)}{d\eta}, \quad (5.12)$$

где $W_{\eta 1}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\eta^2/2}$; $V(0) = 0$; $\frac{dV(\eta)}{d\eta} > 0$.

После определения $V(\eta)$ по заданной функции B_ξ находится функция $B_{0\eta}$, связанная с B_ξ соотношением

$$B_\xi = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^2 \frac{B_{0\eta}^m}{m!}, \tag{5.13}$$

где $C_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V(\eta) H_m(\eta) e^{-\eta^2/2} d\eta;$

$H_m(\eta)$ — полиномы Эрмита. Иногда функцию $B_\xi(k)$ удается выразить через $B_{0\eta}(k)$ в замкнутой форме путем вычисления корреляционной функции прямым методом:

$$B_\xi = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-B_{0\eta}^2}} \int_{-\infty}^{\infty} V(\eta_k) V(\eta_l) \left[-\frac{\eta_k^2 - 2B_{0\eta}\eta_k\eta_l + \eta_l^2}{2(1-B_{0\eta}^2)} \right] d\eta_k d\eta_l, \tag{5.14}$$

где $B_{0\eta} = \langle \eta_k \eta_l \rangle$.

В некоторых случаях определенная из (5.13) или (5.14) функция $B_{0\eta}$ может иметь преобразование Фурье, отрицательное для отдельных ω. При этом найденная $B_{0\eta}$ еще не будет искомой корреляционной функцией. Возникает необходимость отыскания корреляционной функции, наилучшим образом приближающейся к $B_{0\eta}$. Решение такой задачи дано в [216].

Характеристика фильтра $||A_{kl}||$ связана с $B_{0\eta}$ равенством

$$B_{0\eta}(|k-l|) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{g=1}^{n} A_{km} A_{lg} \mathrm{M}[n_m n_g] = \sum_{m=1}^{n} A_{km} A_{lm}. \tag{5.15}$$

Выражения (5.12)—(5.15) определяют связь между характеристиками $W_{\xi 1}$ и B_ξ описываемого процесса и характеристиками $||A_{kl}||$ и $V(\eta)$ оператора (5.10).

Оператор (5.10) особенно подходит для описания активных прямошумовых помех, формируемых прямым усилением шума первичного источника. Первичный шум является, как правило, широкополосным и гауссовским, для которого допустима модель в виде некоррелированного процесса. Эквивалентная схема формирующего усилителя совпадает с изображенной на рис. 5.1. При этом фильтр соответствует линейной части усилителя, включающей первые каскады, а нелинейный элемент отражает нелинейный режим работы оконечных каскадов усиления.

Описание помех оператором (5.10) дает сравнительно простые решения в задачах оптимального приема. Это является следствием простого аналитического выражения распределения $W_{\xi n}$ выборки $\boldsymbol{\xi}$, заданной в виде (5.10). Так как $\boldsymbol{\xi}$ является продуктом нелинейного и монотонного безынерционного преобразования $\boldsymbol{\eta}$, то $W_{\xi n}$ связано с гауссовской плотностью вероятности $W_{\eta n}$ выборки $\boldsymbol{\eta}$ соотношением

$$W_\xi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = W_\eta(\eta_1, \ldots, \eta_n) \prod_{k=1}^{n} \frac{dQ(\xi_k)}{d\xi_k}. \tag{5.16}$$

Из структуры (5.16) вытекает важное свойство монотонных безынерционных преобразований, состоящее в следующем. Если распределение $W_{\eta n}$ допускает разложение на множители в виде (5.4), то и для $W_{\xi n}$ существует аналогичное разложение:

$$W_{\xi n}(\xi_1,\ldots,\xi_n) = W_\xi(\xi_1)\ldots W_\xi(\xi_p \mid \xi_{p-1},\ldots,\xi_1)\prod_{k=p+1}^{n} W_\xi(\xi_k \mid \xi_{k-1},\ldots,\xi_{k-p}), \tag{5.17}$$

где

$$W_\xi(\xi_k \mid \xi_{k-1},\ldots,\xi_{k-p}) = W_\eta(\eta_k \mid \eta_{k-1},\ldots,\eta_{k-p})\frac{d\eta_k}{d\xi_k};\quad W_\xi(\xi_1) = W_\eta(\eta_1)\frac{d\eta_1}{d\xi_1}.$$

Другими словами, монотонное безынерционное преобразование не изменяет порядка преобразуемого марковского процесса. Из этого, в частности, следует, что для негауссовских процессов вида (5.10) некоррелированность влечет и независимость так же, как и для гауссовских процессов.

5.3. Оптимальное обнаружение сигналов на фоне негауссовских помех с независимыми значениями

К помехам с независимыми значениями относятся стационарные негауссовские шумы, имеющие широкополосный спектр в полосе $(0, F_в)$. Аппроксимируя такой спектр прямоугольным, для корреляционной функций помехи $B(\tau)$ получаем нули в точках $\tau = k/(2F_в)$, где $k = 1, 2, \ldots$ Взяв отсчеты из входного колебания $x(t) = s(t) + \xi(t)$ через интервал времени $\Delta t = 1/(2F_в)$, получим последовательность $x_k = s_k + \xi_k$, в которой отсчеты помехи ξ_k некоррелированны. Если при этом полезный сигнал $s(t)$ узкополоснее помехи, то согласно теореме отсчетов выборка s_k будет эквивалентна непрерывному колебанию $s(t)$.

Итак, рассматривается задача обнаружения сигнала s_k в данных наблюдения x_k, содержащих независимые отсчеты помехи ξ_k с заданным одномерным распределением.

5.3.1. Детерминированные и квазидетерминированные сигналы

Известно [1, 204], что АО обнаружитель детерминированного сигнала, принимаемого на фоне аддитивной помехи, должен сравнивать с «порогом» статистику

$$Z = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, s_k, \tag{5.18}$$

где

$$f(\xi) = -\frac{d}{d\xi}\ln W_{\xi 1}(\xi). \tag{5.19}$$

Этот алгоритм рассматривался О. Е. Антоновым [210], Б. Р. Левиным и А. Ф. Кушниром [220]. В [220] была доказана его асимптотическая

оптимальность. Статистике (5.18) соответствует канал обработки, состоящий из безынерционного нелинейного элемента (НЭ) с характеристикой преобразования $f(\xi)$ и согласованного фильтра (СФ), рассчитанного на обнаруживаемый сигнал s_k (рис. 5.2). При гауссовском распределении $W_{\xi 1}$ нелинейность исчезает.

При задании помехи представлением

$$\xi_k = V(n_k), \tag{5.20}$$

где n_k — некоррелированный гауссовский шум с единичной дисперсией; $V(\eta)$ — монотонно неубывающая функция с обратной функцией $Q(\xi)$, распределение W_ξ выражается через распределение W_n по формуле

$$W(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} Q^2(\xi)\right] \frac{dQ(\xi)}{d\xi}.$$

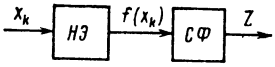


Рис. 5.2. Асимптотически оптимальный обнаружитель детерминированного сигнала в широкополосной помехе

При этом характеристика НЭ выражается через $Q(\xi)$:

$$f(\xi) = Q(\xi) Q'(\xi) - Q''(\xi)/Q'(\xi), \tag{5.21}$$

где $Q'(\xi) = dQ(\xi)/d\xi$; $Q''(\xi) = d^2Q(\xi)/d\xi^2$.

Выразим моменты m_{z0}, m_{z1}, σ^2_{z0} статистики (5.18), определяющие выходное отношение сигнал-помеха (5.3). При этом полагаем, что плотность $W_{\xi 1}$ удовлетворяет условиям

$$W_{\xi 1}(b) - W_{\xi 1}(a) = 0; \quad W'_{\xi 1}(b) - W'_{\xi 1}(a) = 0, \tag{5.22}$$

где a и b — границы интервала, на котором сосредоточена плотность $W_{\xi 1}$. Условия (5.22) выполняются, в частности, при открытом интервале (a, b), а также для симметричных плотностей $W_{\xi 1}$. При отсутствии сигнала с учетом (5.22) получаем $m_{z0} = 0$, $\sigma^2_{z0} = M[f^2(\xi)] \sum_{k=1}^{n} s_k^2$. При наличии сигнала $z = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k + s_k) s_k$. Раскладывая функцию $f(\xi + s)$ в ряд Тейлора по степеням s и считая энергию сигнала фиксированной, а амплитуду сигнала пропорциональной $1/\sqrt{n}$, в условиях асимптотической оптимальности статистики (5.18) получаем $m_{z1} = \sigma^2_{z1} = \sigma^2_{z0}$. Таким образом, выходное отношение сигнал-помеха представляется формулой

$$q = \mu q_\Gamma, \tag{5.23}$$

где $q_\Gamma = \frac{1}{\sigma^2_\xi} \sum_{k=1}^{n} s_k^2$ — выходное отношение сигнал-помеха при гауссовской помехе (σ^2_ξ — дисперсия помехи);

$$\mu = M[f^2(\xi)] \sigma^2_\xi = M\left[\frac{d}{d\xi} f(\xi)\right] \sigma^2_\xi \tag{5.24}$$

— коэффициент улучшения отношения сигнал-помеха при негауссовской помехе. С помощью неравенства Буняковского—Коши доказывается (см. [210]), что $\mu \geqslant 1$, причем знак равенства соответствует гауссовской плотности $W_{\xi 1}$.

Для помех, заданных в виде (5.20),

$$\mu = M\left[(QQ' - Q''/Q')^2\right] \sigma_\xi^2. \tag{5.25}$$

Оценим коэффициент μ для помех, образованных из гауссовского шума при нелинейных искажениях следующего вида.

Ограничение логарифмического характера

$$V(\eta) = \begin{cases} \ln\left[1 + a\eta(t)\right] & \text{при } \eta \geqslant 0; \\ -\ln\left[1 - a\eta(t)\right] & \text{при } \eta < 0, \ a > 0. \end{cases}$$

Глубину ограничения, или коэффициент сжатия флуктуаций, будем характеризовать отношением $\alpha = a^2/\sigma^2$, где σ^2 — дисперсия ограниченного шума. По (5.25) получаем

$$\mu = \sigma^2\left(2 + 4/(a\sqrt{2\pi}) + 1/a^2\right). \tag{5.26}$$

Ограничение экспоненциального характера (жесткое ограничение)

$$V(\eta) = \begin{cases} 1 - e^{-a\eta}, & \eta \geqslant 0; \\ e^{a\eta} - 1, & \eta < 0. \end{cases} \tag{5.27}$$

В данном случае

$$\mu = (1 + a^2)\frac{2}{a^2}\exp(2a^2)\,\Phi(2a)\left[2\exp(2a^2)\,\Phi(-2a) - 4\exp(a^2/2)\,\Phi(-a) + 1\right], \tag{5.28}$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt.$

Симметричные экспоненциальные искажения

$$V(\eta) = \begin{cases} e^{a\eta} - 1, & \eta \geqslant 0; \\ 1 - e^{-a\eta}, & \eta < 0. \end{cases} \tag{5.29}$$

Преобразование (5.29) расширяет диапазон флуктуаций. Коэффициент расширения диапазона $\alpha = \sigma^2/a^2$. Выражение для μ отличается от (5.28) только знаком аргумента функции $\Phi(x)$.

Несимметричные экспоненциальные искажения

$$V(\eta) = \exp(a\eta). \tag{5.30}$$

В данном случае

$$\mu = \frac{1}{a^2}(1 + a^2)\,e^{3a^2}\left(e^{a^2} - 1\right). \tag{5.31}$$

Квадратичные искажения

$$V(\eta) = \eta + a\eta^2, \tag{5.32}$$

где $a < 1/6$. При этом условии обратная функция $Q(\xi) = (-1 + \sqrt{1 + 4a\xi})/(2a)$ является однозначной и

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1 + 2a^2)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + 2a\eta)^2} e^{-\eta^2/2}\,d\eta + 4a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + 2a\eta)^4} e^{-\eta^2/2}\,d\eta\right). \tag{5.33}$$

Оптимальный обнаружитель квазидетерминированного сигнала $s_k(\hat{\theta})$ с неизвестными параметрами $\hat{\theta}$ должен формировать усредненное отношение правдоподобия

$$\Lambda = \int_{\hat{\theta}} l(\hat{\theta}) W(\hat{\theta}) d\hat{\theta}, \tag{5.34}$$

где W — априорная плотность вероятности значений $\hat{\theta}$. В условиях асимптотической оптимальности

$$\ln l(\hat{\theta}) = z(\hat{\theta}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) s_k(\hat{\theta}).$$

При этом отношение правдоподобия (5.34) принимает вид

$$\Lambda = \int_{\hat{\theta}} \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} f(x_k) s_k(\hat{\theta})\right\} W(\hat{\theta}) d\hat{\theta}. \tag{5.35}$$

При гауссовском шуме из (5.35) получаем

$$\Lambda = \int_{\hat{\theta}} \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} x_k s_k(\hat{\theta})\right\} W(\hat{\theta}) d\hat{\theta}. \tag{5.36}$$

Единственным отличием статистик (5.35), (5.36) является наличие в (5.35) нелинейного безынерционного преобразования $f(x)$.

Таким образом, АО обнаружитель когерентного сигнала, рассчитанный на негауссовскую помеху, отличается от оптимального обнаружителя при гауссовской помехе дополнительным нелинейным безынерционным преобразованием, выполняемым до согласованной фильтрации или корреляционной обработки. Характеристика нелинейного преобразования определяется видом одномерного распределения помехи по формуле (5.19).

Характеристики обнаружения квазидетерминированного сигнала в условиях асимптотической оптимальности определяются целиком моментами m_{z0}, m_{z1}, σ_{z0}^2 условной статистики $z(\hat{\theta})$ и распределением параметров сигнала $W(\hat{\theta})$. Указанные моменты при выполнении условий (5.22) равны

$$m_{z0} = 0,\ m_{z1} = \mu q_{\text{г}}(\hat{\theta},\ \hat{\theta}_0),\ \sigma_{z0}^2 = \mu q_{\text{г}}(\hat{\theta}),$$

где

$$q_{\text{г}}(\hat{\theta},\ \hat{\theta}_0) = \frac{1}{\sigma_\xi^2} \sum_{k=1}^{n} s_k(\hat{\theta}) s_k(\hat{\theta}_0),\ q_{\text{г}} = \frac{1}{\sigma_\xi^2} \sum_{k=1}^{n} s_k^2(\hat{\theta});$$

$\hat{\theta}_0$ — значения параметров $\hat{\theta}$ в принятом сигнале.

Так как от распределения помехи $W_{\xi 1}$ зависит только коэффициент улучшения выходного отношения сигнал-помеха μ, то характеристики обнаружения $D(q_{\text{вх}})$ при произвольном $W_{\xi 1}$ выражаются через характеристики $D_{\text{п}}(q_{\text{вх}})$ для гауссовской помехи соотношением

$$D(q_{\text{вх}}) = D_{\text{г}}(\mu q_{\text{вх}}). \tag{5.37}$$

Практически инвариантность формы кривых обнаружения к распределению $W_{\xi 1}$, выражаемая равенством (5.37), проявляется при достаточной нормализации условной статистики $z(\vartheta)$, чего можно ожидать в условиях малого отношения сигнал-помеха на входе обнаружителя и вследствие этого продолжительного накопления сигнала.

5.3.2. Некогерентные сигналы

Рассмотрим сначала обнаружение последовательности неперекрывающихся импульсных сигналов вида

$$s(t) = Aa(t)\cos[\omega_0 t - \psi(t) - \varphi_0]. \qquad (5.38)$$

Несущая частота ω_0, огибающая $Aa(t)$ и фаза $\psi(t)$ сигнала считаются известными. Начальная фаза φ_0 — случайная величина, равномерно распределенная на интервале 0—2π с плотностью $1/(2\pi)$. Начальные фазы отдельных импульсов в последовательности независимы.

Пусть за интервал наблюдения из входного воздействия делается HL выборок, где H — число выборок в одном периоде повторения, а L — число периодов. Обозначим выборки в одном периоде индексами g и h ($g, h = 1, \ldots, H$), а выборки из разных периодов индексами χ и λ ($\chi, \lambda = 1, \ldots, L$). Некогерентную пачку, составленную из одинаковых импульсов вида (5.38) и постоянным периодом следования T, можно записать в виде

$$s_{h\chi}(\vartheta_\chi) = Aa_h \cos(\omega_0 t_h - \psi_h - \vartheta_\chi),$$

где $\vartheta_\chi = \varphi_\chi - \omega_0(\chi - 1)T$; $a_h = a(t_h)$, $\psi_h = \psi(t_h)$. Здесь φ_χ — начальная фаза χ-го импульса. Заметим, что случайные параметры ϑ_χ распределены равномерно, как и φ_χ.

Логарифм $Z = \ln \Lambda$ усредненного по параметрам $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_L$ отношения правдоподобия может быть представлен в виде

$$Z = \sum_{\chi=1}^{L} \ln\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp \sum_{g=1}^{H} \{\ln W_{\xi 1}[x_{g\chi} - s_g(\vartheta)] - \right.$$

$$\left. - \ln W_{\xi 1}(x_{g\chi})\}\, d\vartheta\right). \qquad (5.39)$$

Определим асимптотические выражения Z, приводящие к алгоритмам, близким к оптимальным при слабых сигналах. Для этого разложим в (5.39) функцию $\ln W_{\xi 1}[x_{g\chi} - s_g(\vartheta)]$ в ряд по степеням сигнала s_g, а экспоненту и логарифм $\ln(\ldots)$ в ряд Маклорена. Первые члены разложения правой части (5.39) имеют порядок A^2 и дают следующее выражение для Z:

$$Z = \sum_{\chi=1}^{L} (E_\chi^2 + c_\chi) + O(A^4), \qquad (5.40)$$

где

$$E_\chi^2 = U_\chi^2 + V_\chi^2;$$

$$U_\chi = A \sum_{g=1}^{H} f(x_{g\chi})\, a_g \cos(\omega_0 t_g - \psi_g);$$

$$V_\chi = A \sum_{g=1}^{H} f(x_{g\chi})\, a_g \sin(\omega_0 t_g - \psi_g);$$

$$c_\chi = -A^2 \sum_{g=1}^{H} \frac{d}{dx_{g\chi}} f(x_{g\chi})\, a_g^2;\ f(x) = -\frac{d}{dx} \ln W_{\xi 1}(x).$$

Через $O(A^4)$ в (5.40) обозначен остаточный член разложения, содержащий слагаемые порядка A^4 и выше.

Пусть число импульсов L и энергия последовательности фиксированы. При этом амплитуду импульсов следует рассматривать пропорциональной $1/\sqrt{H}$. С увеличением длительности импульсов, т. е. при $H \to \infty$, остаточный член $O(A^4) \to 0$, а $c_\chi \to$ const по вероятности, так что разложение (5.40) принимает вид

$$Z = \sum_{\chi=1}^{L} E_\chi^2. \tag{5.41}$$

Алгоритм (5.41) является асимптотически оптимальным при $H \to \infty$, т. е. близок к оптимальному при большой длительности импульсов пачки. Обнаружитель, соответствующий (5.41), отличается от оптимального обнаружителя при гауссовском шуме наличием на входе нелинейного преобразователя с характеристикой (5.19).

Положим теперь фиксированными длительность импульсов или, иначе, величину H и произведение* полной энергии сигнала LE_1 на энергию одного импульса E_1, а амплитуду импульсов будем рассматривать пропорциональной $1/\sqrt[4]{L}$. Увеличение числа импульсов при данных условиях приводит к снижению значимости остаточного члена $O(A^4)$ в разложении (5.40). При $L \to \infty$ член $O(A^4) \to 0$ по вероятности, а логарифм отношения правдоподобия принимает вид

$$z = \sum_{\chi=1}^{L} E_\chi^2 + \sum_{\chi=1}^{L} c_\chi. \tag{5.42}$$

Алгоритм (5.42) является асимптотически оптимальным при $L \to \infty$.

Схема обработки, соответствующая (5.42), приведена на рис. 5.3. Нелинейный элемент НЭ$_1$ имеет характеристику $f_1(x) = -\frac{d}{dx} \ln W_{\xi 1}(x)$,

* Величина LE_1^2 при больших L и малых E_1 в совокупности с характеристиками помехи определяет ошибки обнаружения некогерентной пачки. Это следует, например, из формул для моментов статистики обнаружения, согласно которым параметром обнаружения является величина Lq^2, пропорциональная LE_1^2.

а НЭ$_2$ — характеристику $f_2(x) = \frac{d^2}{dx^2} \ln W_{\xi 1}(x)$. Как видим, в данном случае простая модификация обнаружителя, оптимального при гауссовском шуме, путем включения на входе НЭ не обладает оптимальными свойствами. Помимо такой модификации необходима еще дополнительная цепь с нелинейными обработкой и некогерентным накоплением.

Остановимся теперь на крайнем случае, $H = 1$, соответствующем сигналу в виде последовательности независимых отсчетов $s_\chi = A \cos \theta_\chi$, где A — амплитуда отсчетов; θ_χ — фаза отсчетов, равновероятная в интервале $(0,2\pi)$; фазы разных отсчетов независимые. Из алгоритма (5.42) следует асимптотически оптимальное правило формирования статистики обнаружения

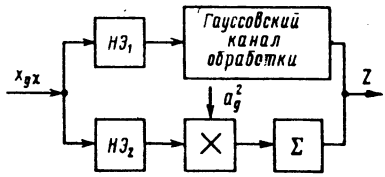


Рис. 5.3. Асимптотически оптимальный обнаружитель некогерентной пачки импульсов на фоне широкополосной помехи

$$Z = A^2 \sum_{\chi=1}^{L} f_3(x_\chi), \qquad (5.43)$$

где

$$f_3(x) = \left[\frac{d}{dx} \ln W_{\xi 1}(x)\right]^2 + \frac{d^2}{dx^2} \ln W_{\xi 1}(x) = \frac{d^2}{dx^2} W_{\xi 1}(x) / W_{\xi 1}(x). \qquad (5.44)$$

Алгоритм (5.43) предписывает нелинейное преобразование входных отсчетов с последующим их накоплением. Если амплитуда изменяется от отсчета к отсчету по известному закону, то накопление весовое с весом A_χ^2:

$$Z = \sum_{\chi=1}^{L} f_3(x_\chi) A_\chi^2.$$

Для некогерентных сигналов общего вида в последнее выражение вместо A_χ^2 войдет σ_χ^2 — дисперсия сигнальных отсчетов [230]. Заметим, что при гауссовском распределении $W_{\xi 1}$ с нулевым средним и дисперсией σ_ξ^2 нелинейный преобразователь $f_3(x)$ имеет характеристику f_{r3} (опускаем несущественный коэффициент)

$$f_{r3}(x) = x^2/\sigma_\xi^2 - 1,$$

что согласуется с известным положением о квадратичном накоплении наблюдаемых данных при обнаружении некогерентного сигнала в гауссовском шуме.

Из алгоритма (5.43) следует, что оптимальный обнаружитель в случае негауссовских помех можно вновь представить в виде модификации обнаружителя, оптимального при гауссовском шуме, которая заключается в постановке на входе дополнительного нелинейного преобразователя с характеристикой $f_4(x) = \sigma_\xi \sqrt{f_3(x) + 1}$. Этот вывод распространяется на некогерентные сигналы общего вида. При объеди-

нении дополнительного преобразователя $f_4(x)$ с квадратичным $f_{г3}(x)$ получаем НЭ с характеристикой (5.44). Заметим, что дополнительный НЭ, а также объединенный НЭ в обнаружителе некогерентных сигналов отличаются от НЭ в обнаружителе когерентных сигналов.

Найдем среднее значение $m_{z\vartheta}$ и дисперсию $\sigma^2_{z\vartheta}$ статистики (5.43), полагая выполняющимися следующие условия, аналогичные (5.22):

$$\frac{d^c}{d\xi^c} W_{\xi 1}(\xi)\Big|_a^b = 0 \text{ при } c = 1,\ 3;$$

$$\left\{\frac{d}{d\xi} \ln W_{\xi 1}(\xi) \frac{d^2}{d\xi^2} W_{\xi 1}(\xi)\right\}\Big|_a^b = 0. \qquad (5.45)$$

При отсутствии сигнала ($\vartheta = 0$) получаем

$$m_{z0} = A^2 \sum_{\chi=1}^{L} \mathrm{M}[f_3(\xi_k)] = 0;$$

$$\sigma^2_{z0} = A^4 \sum_{k,\, l=1}^{L} \mathrm{M}[f_3(\xi_k) f_3(\xi_l)] = A^4 L \mathrm{M}[f_3^2(\xi)].$$

При наличии сигнала во входных данных ($\vartheta = 1$) статистику (5.43) запишем, используя разложение функции $f_3(\xi + s)$ в ряд Тейлора по степеням s, в виде

$$z = A^2 \sum_{\chi=1}^{L} \left\{f_3(\xi_\chi) + s_\chi f_3'(\xi_\chi) + \frac{1}{2} s_\chi^2 f_3''(\xi_\chi) + \ldots\right\},$$

где $f_3'(\xi) = \dfrac{d}{d\xi} f_3(\xi)$; $f_3''(\xi) = \dfrac{d^2}{d\xi^2} f_3(\xi)$.

В условиях асимптотической оптимальности алгоритма (5.43) с учетом соотношений $\mathrm{M}[s_\chi] = 0$; $\mathrm{M}[s_\chi^2] = A^2/2$ и независимости отсчетов сигнала и помехи получаем

$$m_{z1} = 0{,}25 A^4 L \mathrm{M}[f_3''(\xi)];\ \sigma^2_{z1} = \sigma^2_{z0}.$$

При выполнении условий (5.45) имеем равенство $\mathrm{M}[f_3''(\xi)] = \mathrm{M}[f_3^2(\xi)]$. С учетом последнего выходное отношение сигнал-помеха равно

$$q = m_{z1}^2/\sigma^2_{z1} = A^4 L \mathrm{M}[f_3^2(\xi)]/16.$$

При гауссовском распределении помехи с дисперсией $\sigma_\xi^2 = m_2$ для $q = q_г$ получаем

$$q_г = A^4 L/(8m_2^2).$$

Отношение

$$\mu_H = q/q_г = (m_2^2/2)\, \mathrm{M}[(W''_{\xi 1}(\xi)/W_{\xi 1}(\xi))^2], \qquad (5.46)$$

где $W''(\xi) = \dfrac{d^2}{d\xi^2} W(\xi)$, характеризует приращение отношения сигнал-помеха на выходе устройства оптимальной обработки при действии вместо гауссовского шума негауссовской помехи. Этот вывод распространяется на некогерентные сигналы общего вида. Заметим, что

при обнаружении когерентных сигналов аналогичное приращение, определенное по (5.24), имеет вид

$$\mu = m_2 M\,[(W'_{\xi 1}(\xi)/W_{\xi 1}(\xi))^2], \text{ где } W' = dW(\xi)/d\xi.$$

Используя неравенство Буняковского—Коши, можно доказать, что при выполнении дополнительных условий типа (5.45) на поведение функции $W_{\xi 1}$ в концах интервала ее определенности имеет место соотношение $\mu_H \geqslant \mu^2$, причем знак равенства соответствует гауссовской плотности $W_{\xi 1}$.

Для статистики (5.41) в условиях ее асимптотической оптимальности моменты $m_{z\Phi}$ и $\sigma^2_{z\Phi}$ равны:

$$m_{z0} = 2Lq;\ m_{z1} = 2Lq\,(1 + q/2);\ \sigma^2_{z0} = 4Lq^2;\ \sigma^2_{z1} = 4Lq^2\,(1 + q),$$

где $q = \mu q_{вх} \sum_{g=1}^{H} a_g^2$, $q_{вх} = \dfrac{A^2}{2\sigma_\xi^2}$, а коэффициент μ определяется по формуле (5.24).

Для статистики (5.42) в условиях ее асимптотической оптимальности моменты $m_{z\Phi}$ и $\sigma^2_{z\Phi}$ приближаются к моментам статистики (5.41) при наличии условия $(\sum_{g=1}^{H} a_g^2)^2 \gg \sum_{g=1}^{H} a_g^4$, которое выполняется тем лучше, чем больше длительность отдельных импульсов в пачке. С уменьшением длительности импульсов пачки моменты статистики (5.42) приближаются к моментам статистики (5.43).

Рассмотрев оптимальное обнаружение когерентных и некогерентных сигналов приходим к выводу, что оптимальная обработка при обнаружении сигналов на фоне широкополосной негауссовской помехи отличается от обработки при помехе типа белый гауссовский шум дополнительным нелинейным безынерционным преобразованием входной смеси сигнала с помехой. Нелинейное преобразование имеет специальный вид и зависит от вида одномерного распределения помехи и от того, когерентным или некогерентным является полезный сигнал. Эффект дополнительного нелинейного преобразования выражается снижением необходимого отношения сигнал-помеха в μ раз в случае обнаружения когерентных сигналов и в μ_H раз при обнаружении некогерентных сигналов, причем $\mu_H \geqslant \mu^2$. Величина μ и μ_H зависят от одномерного распределения помехи и не зависят от формы сигнала. При обнаружении некогерентной пачки импульсов, являющейся сигналом когерентно-некогерентного типа, оптимальная обработка сложнее простой модификации гауссовского обнаружителя, отмеченной выше. Однако если преобладает когерентная или некогерентная часть, то оптимальную обработку можно заменить соответствующей когерентным или некогерентным сигналам.

5.3.3. Флуктуирующий сигнал общего вида

Здесь мы рассмотрим методы обработки флуктуирующих сигналов общего вида при обнаружении их на фоне широкополосной негауссовской помехи.

Оптимальный тракт обработки можно построить, по крайней мере, в двух типовых вариантах: многоканальном и с оценкой сигнала. Наряду с этим в отдельных случаях возможны и другие варианты (см., например, п. 5.3.2).

Обработка с оценкой сигнала. Алгоритм обработки с оценкой сигнала порождается рекуррентной формой отношения правдоподобия, рассмотренной в [3]. Считаем, что обнаружению подлежит сигнал известной формы $s_k(\vartheta_k)$, имеющий флуктуирующий параметр ϑ_k. Принимаем простую марковскую модель флуктуаций ϑ_k, полагая известными плотности $W_\vartheta(\vartheta_1)$, $W_\vartheta(\vartheta_k|\vartheta_{k-1})$. Заметим, что для выявления закономерностей в обработке сигналов, связанных с негауссовостью помехи, тип модели флуктуаций сигнала решающего значения не имеет. При сформулированных условиях рекуррентная форма ОП имеет вид

$$\Lambda_k = \Lambda_{k-1} \int \frac{W_{\xi 1}[x_k - s_k(\vartheta_k)]}{W_{\xi 1}(x_k)} \int W_\vartheta(\vartheta_k \mid \vartheta_{k-1}) P_{k-1}(\vartheta_{k-1}) d\vartheta_{k-1} d\vartheta_k , \tag{5.47}$$

$$P_k(\vartheta_k) = \frac{W_{\xi 1}[x_k - s_k(\vartheta_k)] \int W_\vartheta(\vartheta_k \mid \vartheta_{k-1}) P_{k-1}(\vartheta_{k-1})\, d\vartheta_{k-1}}{\int W_{\xi 1}[x_k - s_k(\vartheta_k)] \int W_\vartheta(\vartheta_k \mid \vartheta_{k-1}) P_{k-1}(\vartheta_{k-1})\, d\vartheta_{k-1} d\vartheta_k} \tag{5.48}$$

— апостериорная плотность вероятности параметра ϑ в k-м такте при наличии в наблюдаемой выборке x_k ожидаемого сигнала. В отсутствие сигнала функция $P_k(\vartheta_k)$ теряет смысл апостериорной плотности.

Из (5.47) следует

$$\ln \Lambda_n = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{W_{\xi 1}[x_k - s_k(\hat{\vartheta}_k)]}{W_{\xi 1}(x_k)}, \tag{5.49}$$

где $\hat{\vartheta}_k$ — некоторая оценка, или такое значение ϑ, при котором

$$W_{\xi 1}[x_k - s_k(\hat{\vartheta}_k)] = \int W_{\xi 1}[x_k - s_k(\vartheta_k)] \int W_\vartheta(\vartheta_k \mid \vartheta_{k-1}) P_{k-1}(\vartheta_{k-1}) \times \\ \times d\vartheta_{k-1} d\vartheta_k. \tag{5.50}$$

Имея в виду малость отношения сигнал-помеха, представим функцию $W_\xi(x - s)$ в левой и правой частях соотношения (5.50) линейным разложением относительно x. Переход к линейному разложению связан с частичной потерей оптимальности. При этом из (5.50) получим

$$s_k(\hat{\vartheta}_k) = \int s_k(\vartheta_k) \int W_\vartheta(\vartheta_k \mid \vartheta_{k-1}) P_{k-1}(\vartheta_{k-1}) d\vartheta_{k-1} d\vartheta_k.$$

Таким образом, значение $\hat{\vartheta}_k$, входящее в (5.49), можно считать оценкой параметра ϑ, сформированной по данным $x_1, \ldots, x_{k-1}$ и экстраполированной на следующий k-й такт, обеспечивающей минимальный средний квадрат уклонения функции $s_k(\hat{\vartheta}_k)$ от действующего сигнала $s_k(\vartheta_k)$.

Алгоритму (5.49) соответствует перестраиваемый по ϑ оптимальный обнаружитель детерминированного сигнала, который управляется бло-

ком, формирующим оценку $\hat{\vartheta}_k$. Схема обработки для малого отношения сигнал-помеха с учетом результатов п. 5.3.1 показана на рис. 5.4. В практических схемах в качестве блока формирования оценки $\hat{\vartheta}_k$ можно использовать нелинейный фильтр, вырабатывающий $\hat{\vartheta}_k$ по максимуму финальной апостериорной вероятности или другим способом. Вопросам построения нелинейных фильтров посвящены монографии [3, 9, 45].

Многоканальная обработка. Алгоритм многоканальной обработки получаем из (5.47), (5.48), применяя ступенчатую аппроксимацию апостериорной плотности [221, 222]. Для этого интервал априорно возможных значений ϑ разбиваем на ряд отрезков $(\vartheta^{i-1}, \vartheta^i)$, в пределах которых полагаем

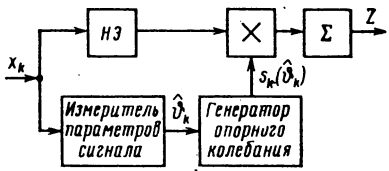


Рис. 5.4. Квазиоптимальный обнаружитель случайного сигнала на фоне широкополосной помехи

$$P_k(\vartheta_k) = P_0(\vartheta_k) \int_{\vartheta^{i-1}}^{\vartheta^i} P_k(\vartheta_k)\, d\vartheta_k \Bigg/ \int_{\vartheta^{i-1}}^{\vartheta^i} P_0(\vartheta_k)\, d\vartheta_k = P_0(\vartheta_k)\, \frac{P_k(j)}{P_0(j)}, \tag{5.51}$$

где $\vartheta^{i-1} \leqslant \vartheta < \vartheta^i$; $P_0(\vartheta_k) = W_\vartheta(\vartheta_k)$ — априорная плотность вероятности неизвестного ϑ; $P_k(j)$, $P_0(j)$ — соответственно апостериорная и априорная вероятности попадания значений ϑ в отрезок $(\vartheta^{i-1}, \vartheta^i)$.

Подставляя (5.51) в (5.48) и интегрируя (5.48) в пределах $(\vartheta^{i-1}, \vartheta^i)$, получаем рекуррентный алгоритм формирования апостериорных вероятностей $P_k(j)$:

$$P_k(j) = \frac{W_{\xi 1}\left[x_k - s_k\left(\widehat{\vartheta^j}\right)\right] \sum_{i=1}^{m} P_{k-1}(i)\, P_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} W_{\xi 1}\left[x_k - s_k\left(\widehat{\vartheta^j}\right)\right] \sum_{i=1}^{m} P_{k-1}(i)\, P_{ij}}, \tag{5.52}$$

где

$$P_{ij} = \frac{\int_{\vartheta^{i-1}}^{\vartheta^i} \int_{\vartheta^{i-1}}^{\vartheta^i} W_\vartheta(\vartheta_k \mid \vartheta_{k-1})\, P_0(\vartheta_{k-1})\, d\vartheta_{k-1}\, d\vartheta_k}{\int_{\vartheta^{i-1}}^{\vartheta^i} P_0(\vartheta_{k-1})\, d\vartheta_{k-1}} \tag{5.53}$$

— априорная вероятность перехода параметра ϑ из отрезка $(\vartheta^{i-1}, \vartheta^i)$ в текущем такте в отрезок $(\vartheta^{i-1}, \vartheta^i)$ в следующем такте; $\hat{\vartheta}^i$ — значение из отрезка $(\vartheta^{i-1}, \vartheta^i)$, которое при небольшой величине отрезка может быть взято равным его середине; m — число отрезков $(\vartheta^{i-1}, \vartheta^i)$, на которые разбит интервал априорно возможных значений ϑ.

Отношение правдоподобия Λ_k выражается через апостериорные вероятности $P_{k-1}(j)$ соотношением

$$\Lambda_k = \Lambda_{k-1} \sum_{j=1}^{m} \frac{W_{\xi 1}\left[x_k - s_k\left(\widehat{\vartheta}^j\right)\right]}{W_{\xi 1}(x_k)} \sum_{i=1}^{m} P_{k-1}(i)\, P_{ij}. \qquad (5.54)$$

Последнее можно представить так:

$$\Lambda_k = \sum_{j=1}^{m} W_k(j), \qquad (5.55)$$

где

$$W_k(j) = \frac{W_{\xi 1}\left[x_k - s_k\left(\widehat{\vartheta}^j\right)\right]}{W_{\xi 1}(x_k)} \sum_{i=1}^{m} W_{k-1}(i)\, P_{ij}. \qquad (5.56)$$

Алгоритмам (5.55), (5.56) соответствует многоканальная система обработки. На выходе каждого канала вычисляется $W_k(j)$, пропорциональная апостериорной вероятности попадания значения ϑ в интервал $(\vartheta^{j-1}, \vartheta^j)$. При вычислении $W_k(j)$ учитываются эффекты $W_{k-1}(i)$ на выходе всех каналов в предыдущем такте.

Если распределение $W_{\xi 1}$ из экспоненциального семейства, то вместо $W_k(j)$ проще формировать

$$Z_k(j) = \ln W_k(j). \qquad (5.57)$$

Однако для получения рекуррентного соотношения в этом случае необходимо в (5.56) ввести упрощение, представив ее, например, в виде

$$W_k(j) = \frac{W_{\xi 1}\left[x_k - s_k\left(\widehat{\vartheta}^j\right)\right]}{W_{\xi 1}(x_k)} \sup_i \left[W_{k-1}(i)\, P_{ij}\right]. \qquad (5.58)$$

Здесь, в отличие от (5.56), при образовании выходного эффекта j-го канала учитываются эффекты предыдущего такта не всех каналов, а только того, который образует с j-м каналом наиболее вероятную пару. Погрешность формулы (5.58) снижается с увеличением либо отношения сигнал-помеха, либо интервала корреляции параметра ϑ_k, когда в сумме (экстраполированном апостериорном распределении) $\sum_{i=1}^{m} P_{k-1}(i)\, P_i$ сильнее выражен преобладающий член.

Из (5.58) логарифмированием получаем рекуррентное соотношение для $Z_k(j)$:

$$Z_k(j) = \ln \frac{W_{\xi 1}\left[x_k - s_k\left(\widehat{\vartheta}^j\right)\right]}{W_{\xi 1}(x_k)} + \sup_i \left[Z_{k-1}(i) + \ln P_{ij}\right]. \qquad (5.59)$$

Последнее можно представить в нерекуррентной форме

$$Z_k(j) = \sum_{l=1}^{k} \ln \frac{W_{\xi 1}\left[x_l - s_l\left(\widehat{\vartheta}^j\right)\right]}{W_{\xi 1}(x_l)} + \sum_{l=1}^{k-1} \sup_i \left[Z_l(i) - Z_l(j) + \ln P_{ij}\right]. \qquad (5.60)$$

Соотношения (5.55), (5.57), (5.60) показывают, что многоканальная система обработки содержит m независимых каналов, оптимальных при обнаружении детерминированных сигналов $s_l(\hat{\vartheta}^j)$, а также устройство межканальной обработки, структура которого определяется второй суммой в (5.60). Межканальная обработка заключается в образовании в каждом такте разностей $Z_k(i) - Z_k(j)$ между выходными эффектами всех пар каналов, смещении этих разностей на $\ln P_{ij}$, отборе для каждого j-го канала максимальной величины из совокупности $[Z_k(i) - Z_k(j) + \ln P_{ij}]$. Отбираемые для j-го канала максимумы накапливаются и прибавляются к выходному эффекту своего канала.

Если параметр ϑ не флуктуирует, то

$$P_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j; \end{cases}$$

из соотношения (5.60) получаем

$$Z_k(j) = \sum_{l=1}^{k} \ln \frac{W_{\xi 1}[x_l - s_l(\hat{\vartheta}^j)]}{W_{\xi 1}(x_l)}. \qquad (5.61)$$

Алгоритму (5.61) соответствует многоканальный вариант устройства обработки в виде набора независимых каналов, оптимальных при обнаружении детерминированных сигналов $s_l(\hat{\vartheta}^j)$.

Обнаружение сигнала по набору статистик $Z_k(j)$ можно осуществить, сформировав ОП по формуле $\Lambda_k = \sum_{j=1}^{m} \exp[Z_k(j)]$ или приближенно по алгоритму $\ln \Lambda_k = \sup_j Z_k(j)$ и сравнив затем Λ_k или $\ln \Lambda_k$ с «порогом». Наконец, можно установить «порог» в каждом канале.

Из алгоритмов (5.59), (5.60) следует, что единственным отличием в структуре обнаружителя при негауссовской помехе по сравнению с гауссовской в случае малого отношения сигнал-помеха является нелинейный элемент, такой же, как и в обнаружителях когерентных сигналов. Однако необходимо иметь в виду, что схема НЭ — гауссовский канал, к которой приводят алгоритмы (5.59), (5.60), наиболее близка к оптимальной при медленных флуктуациях сигнала. Это условие было использовано в выводах.

5.4. Оптимальное обнаружение сигналов на фоне коррелированных негауссовских помех

В этом разделе рассматривается задача обнаружения при коррелированной выборке помехи ξ_k. Синтезируются АО обнаружители с декорреляцией помехи для разных типов сигналов и моделей помех.

Действующая помеха представляется суммой коррелированной составляющей V_k и некоррелированной гауссовской помехи n_k. Применением метода совместной марковской нелинейной фильтрации сигнала и помехи V_k находятся алгоритмы обнаружения с компенсацией помехи V_k. Изложение основывается на работах [5, 226].

5.4.1. Обнаружение детерминированного сигнала с декорреляцией помехи

Гауссовская модель помехи. При данной модели предположение о малости сигнала не обязательно. Достаточной для определения отношения правдоподобия (ОП) информацией является корреляционная матрица помехи

$$\| B^{(n)}_{\xi, ij} \| = \| B_\xi (\Delta t \mid i - j) \|,$$

имеющая порядок $n \times n$, где n — размер наблюдаемой выборки.

Статистика обнаружения, эквивалентная ОП, выражается через матрицу $\| H^{(n)}_{\xi, ij} \|$, обратную $\| B^{(n)}_{\xi, ij} \|$, в виде [14]

$$Z = \ln l(s) = \sum_{i,j=1}^{n} H^{(n)}_{\xi, ij} x_i s_j. \tag{5.62}$$

Алгоритм (5.62) можно представить в иной форме:

$$Z = \sum_{m=1}^{n} x^*_m s^*_m, \tag{5.63}$$

где

$$x^*_m = \sum_{l=1}^{n} A_{ml} x_l; \tag{5.64}$$

$$s^*_m = \sum_{l=1}^{n} A_{ml} s_l. \tag{5.65}$$

Матрица преобразования $\| A_{ml} \|$ удовлетворяет соотношению

$$\sum_{m=1}^{n} A_{mk} A_{ml} = H^{(n)}_{\xi, kl}. \tag{5.66}$$

Линейное преобразование (5.64) переводит коррелированную выборку помехи ξ_k в некоррелированную ξ^*_k, для которой

$$\langle \xi^*_i \xi^*_j \rangle = \sum_{l,k=1}^{n} A_{il} A_{jk} \langle \xi_l \xi_k \rangle =$$

$$= \sum_{l,k=1}^{n} A_{il} A_{jk} B^{(n)}_{\xi, lk} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{5.67}$$

Для доказательства (5.67) представим (5.66) в матричном виде

$$A^+ A = H. \tag{5.68}$$

Умножим обе части (5.68) на матрицу B слева, затем на A слева и на A^{-1} справа. В результате получим

$$ABA^+ = I,$$

что является матричной формой соотношения (5.67).

Согласно (5.63) канал оптимальной обработки состоит (рис. 5.5) из декоррелятора или, иначе, обеляющего фильтра (ОФ) и согласован-

ного фильтра (СФ), который согласуется с сигналом S_m^*, связанным с ожидаемым S_l по формуле (5.65).

Статистика обнаружения (5.63) при совпадении модели с описываемым процессом ξ_k распределена нормально с параметрами [14] $m_{z0}=0$,

$$m_{z1}=\sigma_{z0}^2=\sigma_{z1}^2=\sum_{i,\,j=1}^{n} H^{(n)}_{\xi,\,ij}\,s_i s_j.$$

При этом выходное отношение сигнал-помеха

$$q=\frac{m_{z1}^2}{\sigma_{z0}^2}=\sum_{i,\,j=1}^{n} H^{(n)}_{\xi,\,ij}\,s_i\,s_j. \qquad (5.69)$$

Формула (5.69) может быть записана через распределение $W_{\xi n}$ помеховой выборки:

$$q=\sum_{i,\,j=1}^{n} r_{ij}\,s_i\,s_j, \qquad (5.70)$$

где

$$\tau_{ij}=-\mathrm{M}\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j}\ln W_{\xi n}(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)\right].$$

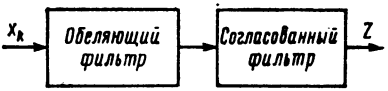


Рис. 5.5. Оптимальный обнаружитель детектированного сигнала на фоне коррелированной гауссовской помехи

Ниже убедимся, что (5.70) определяет выходное отношение сигнал-помеха и при негауссовских помехах.

Марковская модель помехи. Для определения ОП при p-связной марковской модели необходимо знать распределение помехи $(p+1)$-го порядка $W_{p+1}(\xi_i,\ \ldots,\ \xi_{i-p})$. При этом отношение правдоподобия выражается соотношением

$$l(s)=\frac{\prod_{i=1}^{n} W\,(x_i-s_i\,|\,x_{i-1}-s_{i-1},\ \ldots,\ x_{i-p}-s_{i-p})}{\sum_{i=1}^{n} W\,(x_i\,|\,x_{i-1},\ \ldots,\ x_{i-p})}, \qquad (5.71)$$

где $W\,(\xi_i|\xi_{i-1},\ \ldots,\ \xi_{i-p})$ — условная плотность вероятностей, соответствующая распределению $W_{p+1}(\xi_i,\ \ldots,\ \xi_{i-p})$. Запись формулы (5.71), а также следующих из нее предполагает, что

$$W\,(\xi_1\,|\,\xi_0,\ \ldots,\ \xi_{1-p})=W\,(\xi_1);$$

$$W\,(\xi_2\,|\,\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{2-p})=W\,(\xi_2\,|\,\xi_1)\ \text{и т. д.} \qquad (5.72)$$

При гауссовском распределении W_{p+1} соотношение (5.71) дает алгоритм оптимальной обработки в следующем виде:

$$Z=\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_1x_{i-1}-\ldots-a_p x_{i-p})(s_i-a_1 s_{i-1}-\ldots-a_p\ s_{i-p}), \qquad (5.73)$$

где

$$a_j=-H^{(p+1)}_{\xi,\,(j+1)1}/H^{(p+1)}_{\xi,\,j1},\ j=\overline{1,\,p}; \qquad (5.74)$$

$||H_{\xi, ij}^{(p+1)}||$ — квадратная матрица порядка $(p+1)$, обратная корреляционной матрице распределения W_{p+1}.

Алгоритм (5.73) является частным случаем (5.63) при

$$x_i^* = x_i - a_1 x_{i-1} - \ldots - a_p x_{i-p}; \tag{5.75}$$

$$s_i^* = s_i - a_1 s_{i-1} - \ldots - a_p s_{i-p}. \tag{5.76}$$

Согласно (5.75) декорреляция помехи осуществляется путем p-кратного вычитания, где p — порядок модели. Из (5.75) следуют алгоритмы декорреляции: при $p = 1$

$$x_i^* = x_i - B_{01} x_{i-1}; \tag{5.77}$$

при $p = 2$

$$x_i^* = x_i - \frac{B_{01}(1 - B_{02})}{1 - B_{01}^2} x_{i-1} + \frac{B_{01}^2 - B_{02}}{1 - B_{01}^2} x_{i-2}, \tag{5.78}$$

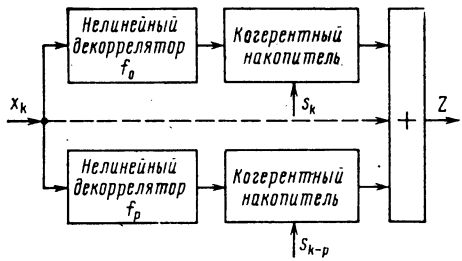


Рис. 5.6. Асимптотически оптимальный обнаружитель когерентного сигнала для марковской модели коррелированной помехи

где $B_{01} = B_{0\xi}(\Delta t)$; $B_{02} = B_{0\xi}(2\Delta t)$; $B_{0\xi}(\tau)$ — нормированная корреляционная функция помехи; Δt — интервал временной дискретизации.

При негауссовском распределении W_{p+1}, учитывая малость отношения сигнал-помеха, разложим $\ln l(s)$ в ряд Тейлора по степеням сигнала. Зафиксировав энергию сигнала, порядок модели и устремив $n \to \infty$, получим алгоритм асимптотически оптимальной обработки в виде [5]

$$Z = \sum_{i=1}^{n} (f_0 s_i + f_1 s_{i-1} + \ldots + f_p s_{i-p}) \equiv \sum_{i=1}^{n} \Delta Z_i, \tag{5.79}$$

где

$$f_k = -\frac{\partial}{\partial x_{i-k}} \ln W(x_i | x_{i-1}, \ldots, x_{i-p}), \; k = \overline{0, p}. \tag{5.80}$$

Функции f_k обладают следующими свойствами [5]:

$$M[f_k(\xi_i, \ldots, \xi_{i-p})] = 0; \quad M[f_l(\xi_i, \ldots, \xi_{i-p}) f_k(\xi_j, \ldots, \xi_{j-p})] = 0 \text{ при } i \neq j. \tag{5.81}$$

Согласно последнему нелинейная обработка f_k декоррелирует выборку ξ_k. Следовательно, канал обработки, соответствующий агоритму (5.79), представляет собой параллельную комбинацию устройств типа нелинейный декоррелятор—когерентный накопитель (рис. 5.6). Структура декорреляторов определяется по формуле (5.80), а когерентные накопители отличаются временным сдвигом весовых функций.

Алгоритм (5.79) можно представить в виде модификации алгоритма (5.18), оптимального при независимых отсчетах помехи. Для этого необходимо плотность вероятности $W(\xi_i|\xi_{i-1}, \ldots, \xi_{i-p})$ разложить в ряд по ортогональным нормированным полиномам с весовой функцией $W_{\xi 1}(\xi)$, являющейся одномерным распределением помехи. Например, при $p = 1$

$$W(\xi_i \mid \xi_{i-1}) = W_{\xi 1}(\xi_i) \sum_{m=0}^{\infty} c_m Q_m(\xi_i) Q_m(\xi_{i-1}), \tag{5.82}$$

где $Q_m(\xi)$ — система ортогональных нормированных полиномов с весом $W_{\xi 1}(\xi)$;

$$c_m = \int_{-\infty}^{\infty}\int W_2(\xi_i, \xi_{i-1}) Q_m(\xi_i) Q_m(\xi_{i-1})\, d\xi_i\, d\xi_{i-1}. \tag{5.83}$$

Подставляя (5.82) в (5.79), получаем

$$Z = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) s_i + \sum_{i=1}^{n} [\lambda_0(x_i, x_{i-1}) s_i + \lambda_1(x_i, x_{i-1}) s_{i-1}], \tag{5.84}$$

где $\lambda_0 = -\dfrac{\partial}{\partial x_i} \ln \sum_{m=0}^{\infty} c_m Q_m(x_i) Q_m(x_{i-1})$;

$$\lambda_1 = -\frac{\partial}{\partial x_{i-1}} \ln \sum_{m=0}^{\infty} c_m Q_m(x_i) Q_m(x_{i-1});$$

$$f(x) = -\frac{d}{dx} \ln W_{\xi 1}(x).$$

Канал обработки, соответствующий (5.84), отличается по структуре от схемы НЭ—СФ дополнительной параллельной цепью, осуществляющей нелинейную декорреляцию и накопление согласно второй сумме в (5.84). При независимых отсчетах ξ_k дополнительная цепь размыкается, так как в этом случае все коэффициенты $c_m = 0$, за исключением первого $c_0 = 1$, в результате чего $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$.

Введем в рассмотрение распределение выборки ξ

$$W_{\xi n}(\xi) = \prod_{i=1}^{n} W(\xi_i \mid \xi_{i-1}, \ldots, \xi_{i-p}).$$

Моменты статистики (5.79) в условиях ее асимптотической оптимальности выражаются через $W_{\xi n}$ по формулам

$$m_{z0} = 0,\ m_{z1} = -\sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{M}\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi_i\, \partial \xi_j} \ln W_{\xi n}(\xi)\right] s_i s_j;$$

$$\sigma_{z0}^2 = \sigma_{z1}^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{M}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_i} \ln W_{\xi n}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j} \ln W_{\xi n}(\xi)\right] s_i s_j.$$

Будем считать, что распределение $W_{\xi n}$ удовлетворяет условию*

$$-M\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j}\ln W_{\xi n}(\xi)\right]=M\left[\frac{\partial}{\partial\xi_i}\ln W_{\xi n}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_j}\ln W_{\xi n}(\xi)\right]. \quad (5.85)$$

При этом для выходного отношения сигнал-помеха (5.3) получаем формулу (5.70).

Представление помехи процессом, порождаемым гауссовским шумом. Остановимся теперь на структуре оптимального обнаружителя и его характеристиках при задании помехи моделью

$$\xi(t)=V[\eta(t)], \quad (5.86)$$

где $\eta(t)$ — гауссовский процесс с характеристиками $M[\eta]=0$; $M[\eta^2]=1$; $M[\eta(t)\eta(t-\tau)]=B_\eta(\tau)$; $V(\eta)$ — монотонная функция, обратная функция которой $Q(x)$ неотрицательна.

Будем считать, что порождающий процесс $\eta(t)$ является p-связным; p — произвольно, но конечно. Данное условие не налагает существенных ограничений на форму корреляции $\eta(t)$.

Алгоритм асимптотически оптимальной обработки при данной модели получаем, подставляя в (5.79) условное распределение $W_\xi(\xi_i|\xi_{i-1},\ldots,\xi_{i-p})$ в виде нелинейно преобразованной нормальной плотности $W_\eta(\eta_i|\eta_{i-1},\ldots,\eta_{i-p})$:

$$W_\xi(\xi_i|\xi_{i-1},\ldots,\xi_{i-p})=W_\eta[Q(\xi_i)|Q(\xi_{i-1}),\ldots,Q(\xi_{i-p})]\frac{dQ(\xi_i)}{d\xi_i}.$$

Алгоритм имеет вид

$$Z=\sum_{i=1}^{n}x_i^*s_i^*+\sum_{i=1}^{n}s_i\Phi(x_i), \quad (5.87)$$

где $x_i^*=h_{\eta,11}^{(p+1)}[Q(x_i)-a_1Q(x_{i-1})-\ldots-a_pQ(x_{i-p})]$;

$$s_i^*=[s_iQ'(x_i)-a_1s_{i-1}Q'(x_{i-1})-\ldots-a_ps_{i-p}Q'(x_{i-p})]; \quad (5.88)$$

$$\Phi(x)=-\frac{d^2}{dx^2}Q(x)\Big/\frac{d}{dx}Q(x);\ Q'=\frac{d}{dx}Q(x);$$

$$a_j=-h_{\eta,(j+1)1}^{(p+1)}/h_{\eta,11}^{(p+1)},\ j=\overline{1,p};$$

$\|h_{\eta,ij}^{(p+1)}\|$ = матрица, обратная нормированной корреляционной матрице $\|B_{0\eta,ij}^{(p+1)}\|$ вектора $(\eta_1,\ldots,\eta_{p+1})$.

Структурная схема канала обработки, соответствующего алгоритму (5.87), показана на рис. 5.7. В схему входят нелинейные элементы $НЭ_1$—$НЭ_3$ с амплитудными характеристиками $Q(x)$, $Q'(x)$, $\Phi(x)$ соот-

* Условие (5.85) аналогично условию регулярности распределения $W_{\xi n}$ в смысле его второй производной, вводимому в математической статистике (см., например, [227]).

ветственно, обеляющие фильтры, весовые накопители. Обратим внимание, что нелинейная обработка определяется исключительно одномерным распределением помехи $W_{\xi 1}$, с которым однозначно связана функция $Q(\xi)$, причем НЭ$_1$ осуществляет нормализацию ξ_k. Обеляющие фильтры рассчитаны на обеление порождающего шума η_k.

При сильной корреляции помехи алгоритм (5.87) можно упростить, опустив вторую сумму, в которой не используется информация о корреляционной функции помехи. Если при этом еще заменить в (5.88) случайные коэффициенты Q' на средние $M[Q'(\xi)]$, то канал обработки примет вид НЭ—обеляющий фильтр—согласованный фильтр, где НЭ имеет нормализующую характеристику. Эффективность такого канала рассматривается в п. 5.6.5.

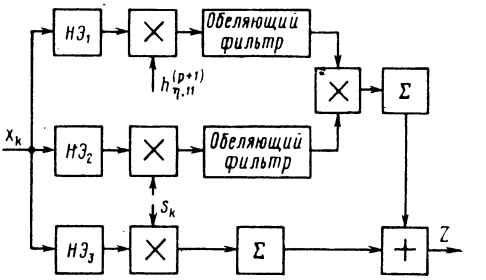


Рис. 5.7. Асимптотически оптимальный обнаружитель когерентного сигнала для негауссовской коррелированной помехи, формируемой из гауссовского шума

Выходное отношение сигнал-помеха в данном случае равно [209, 226]

$$q = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} h^{(n)}_{\eta,ij} s_i s_j + \sum_{i=1}^{n} s_i^2 M\left[\left(\frac{Q''}{Q'}\right)^2\right], \qquad (5.89)$$

где $A_{ij} = M[Q'(\xi_i)Q'(\xi_j)]$. Формула (5.89) следует из (5.70) при подстановке $W_{\xi n}$ в виде

$$W_{\xi n}(\xi) = W_{\eta n}[Q(\xi)] \prod_{i=1}^{n} \frac{dQ(\xi_i)}{d\xi_i},$$

где $W_{\eta n}(\xi)$ — n-мерная нормальная плотность вероятности.

5.4.2. Обнаружение квазидетерминированного сигнала с декорреляцией помехи

Асимптотически оптимальная статистика обнаружения Z детерминированного сигнала согласно выражению (5.79) является суммой некоррелированных и обычно независимых слагаемых:

$$Z = Z(\vartheta_0) = \sum_{i=1}^{n} \Delta Z_i(\vartheta_0). \qquad (5.90)$$

Асимптотическое (при фиксированной энергии сигнала и $n \to \infty$) выражение отношения правдоподобия для квазидетерминированного сигнала $s(\vartheta)$ с неизвестным параметром (или параметрами) ϑ получа-

ем усреднением условного отношения $l(\vartheta) = \exp z(\vartheta)$ по области возможных значений ϑ с априорным распределением $W_\vartheta(\vartheta)$:

$$\Lambda = \int_{\vartheta} \exp\left\{\sum_{l=1}^{n} \Delta Z_l(\vartheta)\right\} W_\vartheta(\vartheta)\, d\vartheta. \tag{5.91}$$

Статистика (5.91) может быть сформирована в многоканальной системе, каждый канал которой настраивается на определенный детерминированный сигнал $s(\vartheta_l)$, $l = \overline{1, m}$, таким образом, чтобы перекрыть с некоторым допустимым шагом всю область значений ϑ. Выходы каналов $Z(\vartheta_l)$ обрабатываются согласно (5.91).

Помимо многоканального метода возможны и другие способы формирования ОП. Рассмотрим некоторые из них.

Выражению (5.91) соответствует рекуррентная форма

$$\Lambda_k = \Lambda_{k-1} \int_{\vartheta} \exp\left[\Delta Z_k(\vartheta)\right] P_{k-1}(\vartheta)\, d\vartheta; \tag{5.92}$$

$$P_k(\vartheta) = \frac{\exp\left[\Delta Z_k(\vartheta)\right] P_{k-1}(\vartheta)}{\int_{\vartheta} \exp\left[\Delta Z_k(\vartheta)\right] P_{k-1}(\vartheta)\, d\vartheta}, \tag{5.93}$$

в чем можно убедиться, подставляя (5.93) в (5.92) и переходя от рекуррентного соотношения к явному выражению Λ_k как функции выборки $\Delta Z_1, \ldots, \Delta Z_k$. Функция $P_k(\vartheta)$ при наличии сигнала в наблюдаемой выборке является апостериорной плотностью вероятности неизвестного параметра ϑ на k-м шаге наблюдения.

Приращения ΔZ_i статистики (5.90) при $n \to \infty$ бесконечно малы в среднеквадратическом, ввиду чего справедливо равенство

$$\ln \int_{\vartheta} \exp\left[\Delta Z_k(\vartheta)\right] P_{k-1}(\vartheta)\, d\vartheta = \int_{\vartheta} \Delta Z_k(\vartheta) P_{k-1}(\vartheta)\, d\vartheta. \tag{5.94}$$

Согласно (5.79)

$$\Delta Z_k(\vartheta) = f_0 s_k(\vartheta) + f_1 s_{k-1}(\vartheta) + \ldots + f_p s_{k-p}(\vartheta).$$

Следовательно,

$$\int_{\vartheta} \Delta Z_k(\vartheta) P_{k-1}(\vartheta)\, d\vartheta = f_0 \widehat{s}_k(\vartheta) + f_1 \widehat{s}_{k-1}(\vartheta) + \ldots + f_p \widehat{s}_{k-p}(\vartheta), \tag{5.95}$$

где $\widehat{s}_{k-i}(\vartheta) = \int_{\vartheta} s_{k-i}(\vartheta) P_{k-1}(\vartheta)\, d\vartheta$—оценка ожидаемого сигнала $s_{k-i}(\vartheta)$, характеризуемая минимальным средним квадратом ошибки.

В условиях высокой апостериорной точности можно положить

$$\widehat{s}_{k-i}(\vartheta) = s_{k-i}(\widehat{\vartheta}_{k-1}), \quad i = \overline{0, p}, \tag{5.96}$$

где $\widehat{\vartheta}_{k-1}$ — координата максимума плотности $P_{k-1}(\vartheta)$, или, иначе говоря, максимально вероятная оценка.

Переходя в (5.92) к $\ln \Lambda = Z$ и учитывая (5.94)—(5.96), получаем алгоритм формирования статистики обнаружения с оценкой неизвестного ϑ

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \Delta Z_i (\widehat{\vartheta}_{i-1}). \tag{5.97}$$

Статистика (5.97) формируется обнаружителем детерминированного сигнала, который на каждом шаге наблюдения подстраивается под сигнал, содержащийся в наблюдаемой смеси, в соответствии с оценкой $\widehat{\vartheta}_{i-1}$ (рис. 5.8).

В том случае, когда интеграл по ϑ в (5.91) берется аналитически, существует еще один вариант оптимального обнаружителя. Такой слу-

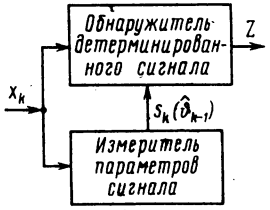


Рис. 5.8. Обнаружитель квазидетерминированного сигнала с оценкой неизвестных параметров

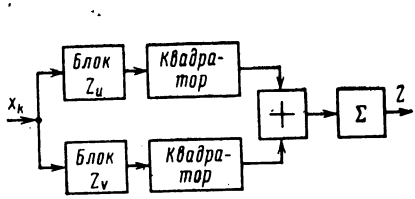


Рис. 5.9. Обнаружитель квазидетерминированного сигнала с двумя квадратурными каналами

чай имеем, например, при обнаружении модулированного радиосигнала

$$s_i(A, \varphi) = A a_i \cos(\omega_0 t_i - \psi_i - \varphi), \tag{5.98}$$

у которого модулирующие функции a_i, ψ_i известны точно, а параметры A и φ случайны. Амплитуда A распределена по закону Рэлея, фаза φ является равновероятной в интервале $(0, 2\pi)$.

Логарифм отношения правдоподобия (5.91) для сигнала (5.98) после усреднения по A и φ принимает вид

$$Z = \sqrt{Z_u^2 + Z_v^2}, \tag{5.99}$$

где Z_u и Z_v — асимптотически оптимальные статистики обнаружения детерминированных сигналов: $s_i^u = a_i \cos(\omega_0 t_i - \psi_i)$; $s_i^{(v)} = a_i \sin(\omega_0 t_i - \psi_i)$. Алгоритму (5.99) соответствуют два квадратурных канала, формирующих сигналы Z_u и Z_v; выходы каналов объединяются для выделения огибающей сигналов Z_u, Z_v (рис. 5.9).

Качество обнаружения квазидетерминированного сигнала $s_i(\vartheta_0)$ по статистике (5.91) зависит от распределения неизвестных параметров сигнала $W(\vartheta)$ и распределения условной статистики $Z(\vartheta) = \sum_{i=1}^{n} Z_i(\vartheta)$. Последняя является асимптотически нормальной с параметрами

$m_{z0}=0$; $m_{z1}=\sum\limits_{i,\,j=1}^{n}\tau_{ij}\,s_i(\vartheta)\,s_j(\vartheta_0)$; $\sigma_{z0}^2=\sigma_{z1}^2=\sum\limits_{i,\,j=1}^{n}\tau_{ij}\,s_i(\vartheta)\,s_j(\vartheta)$, где

$$\tau_{ij}=-M\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j}\ln W_{\xi n}(\xi)\right]. \tag{5.100}$$

Для гауссовской плотности $W_{\xi n}$ с корреляционной матрицей $B_{\xi,\,ij}^{(n)}\|$

$$\tau_{ij}=H_{\xi,\,ij}^{(n)}, \tag{5.101}$$

где $\|H_{\xi,\,ij}^{(n)}\|$ — матрица, обратная $\|B_{\xi,\,ij}^{(n)}\|$.

Учитывая, (5.101), можно сделать вывод: характеристики АО обнаружения квазидетерминированного сигнала на фоне негауссовской помехи с распределением $W_{\xi n}$ совпадают с характеристиками оптимального обнаружения данного сигнала на фоне гауссовской помехи, имеющей корреляционную матрицу $\|B_{\xi,\,ij}\|=\|\tau_{ij}\|^{-1}$, где $\|\tau_{ij}\|^{-1}$ — обратная матрица для $\|\tau_{ij}\|$, определяемой равенством (5.100).

5.4.3. Обнаружение сигналов с компенсацией помехи

Сущность компенсационного метода подавления помех в приемном канале, содержащем аддитивную смесь x_k сигнала s_k, помехи V_k и белого гауссовского шума n_k, заключается в фильтрации помеховой составляющей V_k и вычитании результата фильтрации из принятой смеси x_k.

Рассмотрим оптимальные алгоритмы обнаружения с компенсацией помехи. Начнем с детерминированного сигнала и помехи $V_k(\alpha)$ квазидетерминированного типа, т. е. полагаем, что случайные параметры α постоянны на интервале наблюдения. Оптимальный алгоритм получаем из отношения правдоподобия

$$\Lambda=\frac{\int\limits_{\alpha}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}[x_i-V_i(\alpha)-s_i]^2\right\}W_\alpha(\alpha)\,d\alpha}{\int\limits_{\alpha}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}[x_i-V_i(\alpha)]^2\right\}W_\alpha(\alpha)\,d\alpha}, \tag{5.102}$$

где $W_\alpha(\alpha)$ — априорная плотность вероятности параметров α; σ_n^2 — мощность шума n_k.

Выражению (5.102) соответствует рекуррентная форма

$$\Lambda_k=\Lambda_{k-1}\frac{\int\limits_{\alpha}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}[x_k-V_k(\alpha)-s_k]^2\right\}P_{k-1}(\alpha\mid\vartheta=1)\,d\alpha}{\int\limits_{\alpha}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}[x_k-V_k(\alpha)]^2\right\}P_{k-1}(\alpha\mid\vartheta=0)\,d\alpha}, \tag{5.103}$$

где

$$P_k(\alpha|\vartheta=1)=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}[x_k-V_k(\alpha)-s_k]^2\right\}P_{k-1}(\alpha\,|\,\vartheta=1)}{\int\limits_{\alpha}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}[x_k-V_k(\alpha)-s_k]^2\right\}P_{k-1}(\alpha|\vartheta=1)\,d\alpha};$$

$$P_k(\alpha\,|\,\vartheta=0)=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}[x_k-V_k(\alpha)]^2\right\}P_{k-1}(\alpha\,|\,\vartheta=0)}{\int\limits_{\alpha}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}[x_k-V_k(\alpha)]^2\right\}P_{k-1}(\alpha\,|\,\vartheta=0)\,d\alpha}.$$

Функция $P_k(\alpha|\vartheta)$ является апостериорной плотностью вероятностей параметров помехи при наличии ($\vartheta = 1$) и отсутствии ($\vartheta = 0$) сигнала в наблюдаемых данных.

Применяя теорему о среднем для определенного интеграла, запишем (5.103) в виде

$$\Lambda_k=\Lambda_{k-1}\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}[x_k-V_k(\alpha_{k-1}^1)-s_k]^2\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}[x_k-V_k(\alpha_{k-1}^0)]^2\right\}}. \qquad (5.104)$$

В (5.104) α_{k-1}^1, α_{k-1}^0 — оценки α на $(k-1)$-м шаге наблюдения, удовлетворяющие равенствам

$$P_k(\alpha_{k-1}^0\,|\,\vartheta=0)=P_{k-1}(\alpha_{k-1}^0|\vartheta=0);\ P_k(\alpha_{k-1}^1|\vartheta=1)=P_{k-1}(\alpha_{k-1}^1|\vartheta=1).$$

С ростом индекса «k» функции $P_k(\alpha|\vartheta)$ сжимаются, приближаясь к дельта-функции. При этом точки α_k^0 и α_k^1 сходятся к максимально вероятным оценкам. Это позволяет при измерении параметров помехи с малым апостериорным разбросом использовать в качестве α_k^0, α_k^1 максимально вероятные оценки, формируя α_k^0 по данным x_k, а α_k^1 по разности $(x_k - s_k)$.

Перейдя в (5.104) к $\ln\Lambda_k$ и свернув рекуррентное соотношение, опуская при этом несущественные коэффициенты и члены, не зависящие от x_k, получим статистику обнаружения в виде

$$z_n=\sum_{i=1}^{n}[x_i-V_i(\alpha_{i-1}^1)]\,s_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\{[x_i-V_i(\alpha_{i-1}^0)]^2-[x_i-V_i(\alpha_{i-1}^1)]^2\}. \qquad (5.105)$$

Наиболее значимой в (5.105) является первая сумма, образуемая когерентным накоплением сигнала. Соответствующая ей схема канала обработки показана на рис. 5.10. Обработка с автономным компенсатором помех наиболее эффективна, когда влияние сигнала на фильтрацию помехи незначительно, как, например, при малом отношении сиг-

нал-помеха или больших различиях между сигналом и помехой в частотной или временной области.

Мы начали рассмотрение с помех квазидетерминированного типа, т. е. полагали параметры α постоянными на интервале наблюдения. Аналогичным образом доказывается, что алгоритм (5.105) описывает оптимальный канал обнаружения и при флуктуирующих параметрах помехи. При этом отличие заключается лишь в способе формирования оценок α^1 и α^0. При высокой апостериорной точности данные оценки можно формировать по алгоритмам нелинейной фильтрации [3, 9, 45]. Заметим, что при выводе соотношения (5.105) не налагались, как прежде, ограничения на уровень сигнала, т. е. статистика (5.105) является оптимальной при произвольном отношении сигнал-помеха на входе обнаружителя.

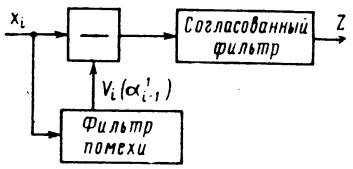


Рис. 5.10. Обнаружитель с компенсацией помехи

Схема на рис. 5.10 соответствует обнаружению детерминированных сигналов. При случайных сигналах вместо согласованного фильтра необходимо использовать устройство обработки, оптимальное в случае обнаружения заданного типа сигнала на фоне белого гауссовского шума.

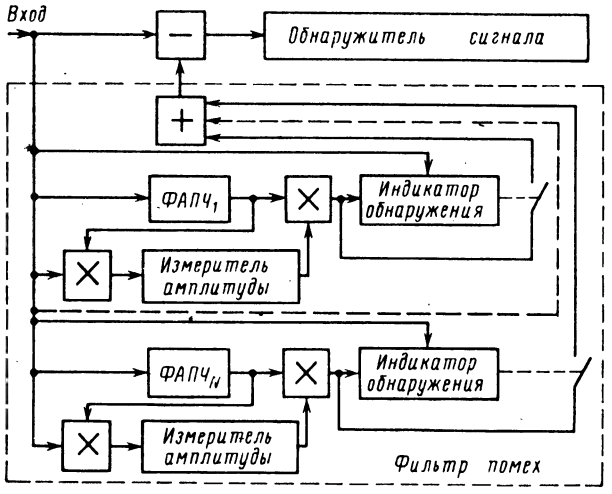


Рис. 5.11. Обнаружитель с компенсатором узкополосных помех

Основные трудности реализации приемного канала с компенсацией помех возникают на пути создания оптимального фильтра помехи V_k. Реальные фильтры удается приблизить к оптимальным лишь при медленных флуктуациях V_k и в особенности, когда V_k — процесс квазидетерминированного типа. Поэтому применение компенсационных методов предпочтительно при медленных флуктуациях помехи.

Схема обнаружителя сигнала с компенсацией набора узкополосных помех показана на рис. 5.11. Фильтр помехи содержит набор устройств фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) с измерителями амплитуды, которые рассредоточены по полосе сигнала. Одна пара ФАПЧ — измеритель амплитуды рассчитывается на фильтрацию одной узкополосной помехи. Включение сигнала компенсации, сформированного одной парой ФАПЧ — измеритель амплитуды, в общий компенсирующий сигнал осуществляется через обнаружитель помехи на частотном участке, обслуживаемом данной ФАПЧ. При обслуживании одним устройством ФАПЧ частотного участка, размеры которого превышают полосу захвата, вводится схема поиска по частоте в пределах отведенного участка. Обнаружитель сигнала рассчитывается на помеху типа белого гауссовского шума.

5.5. Оптимальное обнаружение сигналов на фоне негауссовских помех с полосовым спектром

Модели помех, рассмотренные в § 5.3, 5.4, соответствуют стационарным процессам с широкополосной формой спектра. Помехи с полосовым спектром требуют иного описания. Заметим, что в задачах с гауссовскими помехами модель в виде процесса с независимыми значениями может применяться для описания как широкополосных, так и полосовых помех, спектр которых шире спектра сигнала. Это обусловлено тем, что на выходе полосового фильтра (ПФ), рассчитанного на безыскаженную передачу сигнала, как широкополосные, так и полосовые помехи имеют одинаковый спектр, а спектр является достаточной характеристикой гауссовских помех.

При негауссовских помехах качество обнаружения сигналов определяется распределениями вероятности помехи, которые на выходе ПФ отличаются для широкополосных и полосовых помех. По этой причине последовательность с независимыми элементами нельзя применять для описания полосовых негауссовских помех.

Рассмотрим оптимальное обнаружение детерминированных сигналов на фоне негауссовских помех с полосовым спектром, основываясь на [224, 225]. Спектр помехи полагаем шире спектра сигнала.

Входная смесь сигнала с помехой является узкополосным колебанием

$$x(t) = A_x(t)\cos[\omega_0 t - \varphi_x(t)] = U_x(t)\cos\omega_0 t + V_x(t)\sin\omega_0 t, \qquad (5.106)$$

где $U_x(t) = A_x(t)\cos\varphi_x(t)$; $V_x(t) = A_x(t)\sin\varphi_x(t)$.

Квадратурные компоненты U_x, V_x при наличии обнаруживаемого сигнала ($\vartheta = 1$) и в отсутствие его ($\vartheta = 0$) имеют следующий состав: при $\vartheta = 1$ $U_x(t) = U_s(t) + U_\xi(t)$; $V_x = V_s(t) + V_\xi(t)$; при $\vartheta = 0$ $U_x(t) = U_\xi(t)$; $V_x(t) = V_\xi(t)$,

где U_s, V_s и U_ξ, V_ξ — квадратурные компоненты сигнала и помехи соответственно.

При известной частоте ω_0 достаточными статистиками наблюдения являются медленно меняющиеся процессы $U_x(t)$ и $V_x(t)$. Примем интервал дискретизации процессов $U_x(t)$, $V_x(t)$ в соответствии с теоремой отсчетов исходя из ширины спектра сигнальных компонент $U_s(t)$, $V_s(t)$. При этом отсчеты $U_{\xi i}$, $V_{\xi i}$ будут не коррелированы с $U_{\xi j}$, $V_{\xi j}$ при $i \neq j$ и будем считать эти пары независимыми. Тогда плотность вероятности совокупности $(U_{\xi 1}, V_{\xi 1}; \ldots; U_{\xi n}, V_{\xi n})$ представляется произведением

$$W_{2n}(U_{\xi 1}, V_{\xi 1}; \ldots; U_{\xi n}, V_{\xi n}) = \prod_{i=1}^{n} W_{\xi 2}(U_{\xi i}, V_{\xi i}),$$

где $W_{\xi 2}(U_{\xi i}, V_{\xi i})$ — плотность вероятности квадратурных компонент помехи.

Логарифм отношения правдоподобия для детерминированного сигнала определяется выражением

$$\ln \Lambda = \sum_{i=1}^{n} \ln W_{\xi 2}(U_{xi} - U_{si}, V_{xi} - V_{si}) - \sum_{i=1}^{n} \ln W_{\xi 2}(U_{xi}, V_{xi}). \quad (5.107)$$

Полагаем отношение сигнал-помеха на входе приемника малым и в силу этого разложим (5.107) в ряд Тейлора по степеням сигнала. Ограничившись линейной частью разложения, получим алгоритм АО обнаружителя в виде

$$\ln \Lambda = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial}{\partial U_{xi}} \ln W_{\xi 2}(U_{xi}, V_{xi}) U_{si} + \frac{\partial}{\partial V_{xi}} \ln W_{\xi 2}(U_{xi}, V_{xi}) V_{si} \right\}. \quad (5.108)$$

Введем в рассмотрение плотность вероятности $W_2(A_i, \varphi_i)$ огибающей A и фазы φ узкополосного колебания. Эта плотность выражается через плотность квадратурных компонент $W_2(U_i, V_i)$ соотношением

$$W_2(U_i, V_i) = W_2(A_i, \varphi_i)/A_i. \quad (5.109)$$

Подставляя (5.109) в (5.108), полагая $\partial W_2(A, \varphi)/\partial \varphi = 0$ и учитывая соотношения

$$\frac{\partial}{\partial U} \ln \frac{W_2(A, \varphi)}{A} = \left[\frac{\partial}{\partial A} \ln \frac{W_2(A, \varphi)}{A} \right] \cos \varphi; \quad \frac{\partial}{\partial V} \ln \frac{W_2(A, \varphi)}{A} = \left[\frac{\partial}{\partial A} \ln \frac{W_2(A, \varphi)}{A} \right] \sin \varphi;$$

$$U_{si} = A_{si} \cos \varphi_{si}; \quad V_{si} = A_{si} \sin \varphi_{si},$$

получаем (5.108) в виде

$$\ln \Lambda = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial A_{xi}} \ln \frac{W_{\xi 2}(A_{xi}, \varphi_{xi})}{A_{xi}} \right) A_{si} \cos(\varphi_{xi} - \varphi_{si}), \quad (5.110)$$

где $W_{\xi 2}(A_{\xi i}, \varphi_{\xi i})$ — распределение огибающей и фазы колебания помехи.

Колебание помехи на входе приемника $\xi(t)=A_\xi(t)\cos[\omega_0 t-\varphi_\xi(t)]$ имеет равномерное в интервале $(0, 2\pi)$ распределение фазы, что обусловлено неопределенностью момента времени поступления колебания на вход. При этом значения амплитуды и фазы, рассматриваемые в один момент времени, статистически не связаны, т. е.

$$W_{\xi 2}(A_{\xi i}, \varphi_{\xi i}) = W_A(A_{\xi i})\, W_\varphi(\varphi_{\xi i}), \tag{5.111}$$

где W_A, W_φ — плотности вероятности амплитуды и фазы помехи. С учетом (5.111) логарифм отношения правдоподобия принимает вид

$$\ln\Lambda = \sum_{i=1}^{n} g(A_{xi})\, A_{si} \cos(\varphi_{xi} - \varphi_{si}), \tag{5.112}$$

где

$$g(A) = \frac{d}{dA} \ln \frac{W_A(A)}{A}. \tag{5.113}$$

По алгоритму (5.112) обрабатываются выборки A_{xi}, φ_{xi} из амплитуды и фазы входного колебания (5.106), взятые через интервал времени Δt, превышающий интервал корреляции помехи. Заметим, что, уменьшая интервал времени между выборками, мы можем только улучшить эффективность алгоритма (5.112). Поэтому алгоритм

$$\ln\Lambda = \int_0^T g[A_x(t)]\, A_s(t) \cos[\varphi_x(t) - \varphi_s(t)]\, dt \tag{5.114}$$

будет не хуже (5.112), если принять $n = T/\Delta t$. От алгоритма обработки огибающей и фазы, заданного выражением (5.114), можно перейти к эквивалентным алгоритмам:

$$Z = \ln\Lambda = \int_0^T g[A_x(t)] \cos[\omega_0 t - \varphi_x(t)]\, s(t); \tag{5.115}$$

$$Z = \int_0^T f[x(t)]\, s(t)\, dt, \tag{5.116}$$

где $s(t) = A_s(t)\cos[\omega_0 t - \varphi_s(t)]$; $f(x)$ — такая безынерционная нелинейная обработка, при которой преобразование процесса $x(t)$ дает на частоте ω_0 колебание $g[A_x(t)]\cos[\omega_0 t - \varphi_x(t)]$.

Рассматривая $g(A)$ как коэффициент при первой гармонике в разложении функции $f(A\cos\varphi)$ в ряд Фурье, получаем соотношение, связывающее $f(x)$ и $g(A)$:

$$g(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A\cos\varphi)\cos\varphi d\varphi. \tag{5.117}$$

Последнее можно привести к интегральному уравнению Абеля относительно $\Phi(x) = f(\sqrt{x})$:

$$\int_0^y \frac{\Phi(x)}{\sqrt{y-x}}\,dx = F(y);\ F(y) = \frac{\pi\sqrt{y}}{2}\,g(\sqrt{y}). \qquad (5.118)$$

Решение уравнения (5.118) имеет вид

$$\Phi(x) = \left[\frac{F(0)}{\sqrt{x}} + \int_0^x \frac{dF(y)}{\sqrt{x-y}}\right],$$

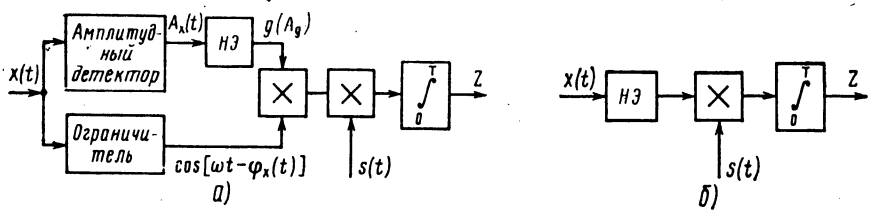


Рис. 5.12. Асимптотически оптимальный обнаружитель детерминированных сигналов на фоне негауссовских помех с полосовым спектром при нелинейной обработке видеочастоты (*а*) и высокой частоты (*б*)

откуда следует

$$f(x) = \left\{\frac{F(0)}{x} + \frac{\pi}{2}\int_0^x \frac{d[Ag(A)]}{\sqrt{x^2-A^2}}\right\},\ x \geqslant 0;\ f(-x) = -f(x). \qquad (5.119)$$

Формула (5.119) при подстановке функции $g(A)$ в виде (5.113) дает характеристику НЭ в алгоритме (5.116). Алгоритмам (5.115), (5.116) соответствуют схемы обработки, показанные на рис. 5.12, *а* и *б* соответственно. В схеме рис. 5.12, *а* специальная нелинейная обработка производится на видеочастоте, а амплитудная характеристика нелинейного элемента $g(A)$ определяется распределением огибающей помехового колебания по (5.113). В схеме рис. 5.12, *б* нелинейная обработка производится на высокой частоте. Амплитудная характеристика нелинейного элемента $f(x)$ определяется по (5.119).

Таким образом, АО обнаружитель при полосовом спектре помехи структурно совпадает с АО обнаружителем при помехе с широкополосной формой спектра, отличаясь лишь видом характеристики НЭ, стоящего на входе. Отношение сигнал-помеха после обработки, определяемой алгоритмом (5.116), выражается соотношением

$$q = \mu q_r, \qquad (5.120)$$

где q_r — отношение сигнал-помеха на выходе согласованного фильтра (СФ), когда на входе действует смесь сигнала с белым гауссовским шумом; μ — коэффициент повышения отношения сигнал-помеха в схеме

НЭ—СФ по сравнению с величиной $q_г$, когда помеха на входе НЭ негауссовская.

В п. 5.6.3 показано, что при характеристике НЭ в виде (5.119) коэффициент

$$\mu = \frac{\sigma_\xi^2}{2} \int_0^\infty \left[\frac{d}{dA} \ln \frac{W_A(A)}{A} \right]^2 W_A(A)\, dA. \qquad (5.121)$$

Заметим, что коэффициент улучшения отношения сигнал-помеха при полосовых помехах больше, чем при широкополосных. Одномерные распределения мгновенных значений помех при таком сравнении считаются одинаковыми. Объясняется это особенностью нелинейного преобразования процессов с полосовым спектром, рассеивающего мощность входного процесса по гармоникам несущей частоты. При таком рассеивании мощность помехи на выходе НЭ, попадающая в полосу СФ, меньше, чем при нелинейной обработке помех с неполосовым спектром. В подтверждение этого факта на рис. 5.13 показаны зависимости коэффициента μ для частотно-модулированных помех вида (5.207) (см. ниже, п. 5.6.7). График *1* вычислен по (5.121) и, следовательно, соответствует помехам с полосовым спектром. График *2* получен по (5.24) для помех с широкополосным спектром.

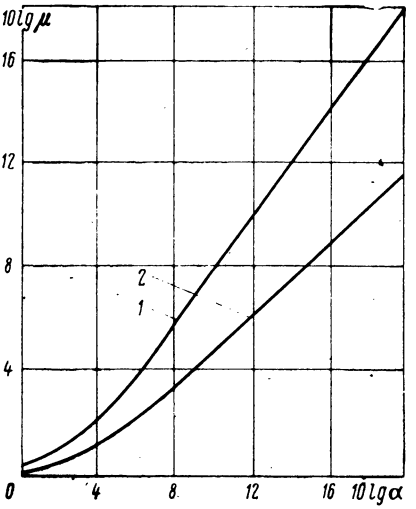


Рис. 5.13. Эффективность нелинейной обработки для помех с полосовым спектром

5.6. Защита типовых трактов обработки сигнала от негауссовских помех в когерентных и некогерентных обнаружителях

Обработка сигналов в системах обнаружения, рассчитанных на гауссовскую помеху, выполняется в корреляционно-фильтровых каналах, включенных до амплитудного детектора (АД) в когерентных и после АД в некогерентных обнаружителях [231].

Результаты статистического синтеза устройств обнаружения сигналов на фоне негауссовских помех показывают, что кроме накопления сигнала, осуществляемого корреляционно-фильтровыми каналами, существенными элементами оптимальной обработки являются нелинейное преобразование и декорреляция. Данный раздел посвящен исследованиям помехозащищенности корреляционно-фильтровых каналов обработки, дополненных нелинейными безынерционными элементами (НЭ) и обеляющими фильтрами (ОФ). При этом рассматриваются ко-

герентные и некогерентные, широкополосные и полосовые тракты обработки. Подавление помех в НЭ будем трактовать как амплитудное, а в ОФ — как частотное. Материалы параграфа основываются на [225, 228].

5.6.1. Амплитудное подавление помех в когерентном широкополосном тракте

Здесь под широкополосными подразумеваются тракты, рассчитанные на сигналы, для которых не применимы квазигармонические представления. К таким относятся сигналы в радиотехнических системах после детектора, в электросвязных и акустических системах. В рамках данного раздела полезный сигнал считаем полностью известным. Рассматриваем обработку сигнала по схеме рис. 5.14, *а* , где НЭ — безы-

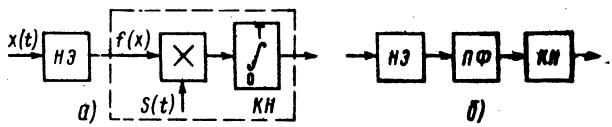


Рис. 5.14. Широкополосный (*а*) и полосовой (*б*) тракты обнаружителя

нерционный нелинейный элемент с амплитудной характеристикой $f(\xi)$, когерентный накопитель (КН) выполняется в фильтровом или корреляционном варианте. Отношение сигнал-помеха на входе НЭ считаем $q_{вх} \ll 1$. Ввиду этого условия процесс на выходе НЭ представляем разложением

$$f(x = \xi + s) \approx f(\xi) + sf'(\xi), \qquad (5.122)$$

где $f'(\xi) = df(\xi)/d\xi$. К сигналу относим среднее $M[f(x = \xi + s)] = sM[f'(\xi)]$, сохраняющее структуру сигнала, а к помехе — $f(\xi)$. Будем считать, что $\langle f(\xi) \rangle = 0$.

Отношение сигнал-помеха на выходе НЭ определяем по формуле

$$q_к^ш = p_с \{M[f'(\xi)]\}^2 / M[f^2(\xi)], \qquad (5.123)$$

где $p_с = s^2$ — мощность сигнала на входе НЭ. Нелинейный элемент изменяет отношение сигнал-помеха в $\mu_к^ш$ раз, где

$$\mu_к^ш = q_к^ш / q_{вх} = p_п \{M[f'(\xi)]\}^2 / M[f^2(\xi)]; \qquad (5.124)$$

$q_{вх} = p_с/p_п$; $p_п$ — мощность помехи.

Величина (5.124) зависит от характеристики НЭ и от плотности вероятности помехи $W(\xi)$. Найдем характеристику НЭ, при которой для заданного $W(\xi)$ достигается максимум коэффициента ослабления (5.124). Представим среднее значение в числителе (5.124) в виде

$$M[f'(\xi)] = \int_a^b f'(\xi) W(\xi)\, d\xi =$$

$$= f(\xi) W(\xi) \Big|_a^b - \int_a^b f(\xi) [W'(\xi)/W(\xi)] W(\xi)\, d\xi, \qquad (5.125)$$

где a, b — границы интервала значений ξ, на котором определена плотность $W(\xi)$. Введем условие

$$f(\xi)\, W(\xi)\,|_a^b = 0, \tag{5.126}$$

которое практически не вносит ограничений на вид функций $f(\xi)$ и $W(\xi)$. С учетом (5.125), (5.126) формула (5.124) принимает вид

$$\mu_{\text{к}}^{\text{ш}} = \frac{\left(\int\limits_a^b f(\xi)\,[-W'(\xi)/W(\xi)]\, W(\xi)\, d\xi\right)^2}{\int\limits_a^b f^2(\xi)\, W(\xi)\, d\xi}. \tag{5.127}$$

Используя неравенство Буняковского—Коши получаем: максимум функционала (5.127) достигается при

$$f(\xi) = f_{\text{к}}^{\text{ш}}(\xi) = c\,\frac{W'(\xi)}{W(\xi)} = c\,\frac{d}{d\xi}\ln W(\xi),\ c \neq 0, \tag{5.128}$$

и равняется

$$\max \mu_{\text{к}}^{\text{ш}} = p_{\text{п}}\, M\,[(W'(\xi)/W(\xi))^2]. \tag{5.129}$$

Учитывая (5.126), заключаем, что оптимальное решение существует, если плотность $W(\xi)$ удовлетворяет условию $W'(a) = W'(b)$. Было доказано ранее [210], что $\max \mu_{\text{к}}^{\text{ш}} \geqslant 1$, причем знак равенства соответствует нормальной плотности. Следовательно, при негауссовской помехе любого вида оптимальный НЭ оказывает помехоослабляющее действие.

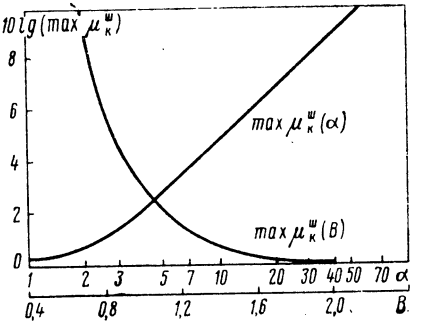


Рис. 5.15. Эффективность амплитудного подавления негауссовских помех в широкополосном тракте

На рис. 5.15 представлены зависимости $\max \mu_{\text{к}}^{\text{ш}}$ для частотно-модулированных помех вида (5.207), имеющих распределение вероятности (5.208) (см. ниже, п. 5.6.7) и помех с обобщенным гауссовским распределением:

$$W(\xi) = \frac{B}{2\sqrt{2}\,\sigma\Gamma(1/B)} \exp\left(-\frac{|\xi|^B}{2^{B/2}\sigma^B}\right), \tag{5.130}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция. При $B = 2$ распределение (5.130) переходит в нормальное, а при $B < 2$ характеризуется положительным эксцессом, что является особенностью помех импульсного типа. Рисунок 5.15 показывает, что максимально возможный эффект нелинейного ослабления помех весьма ощутим.

На рис. 5.16, *а* и *б* показаны амплитудные характеристики оптимальных НЭ. По форме этих характеристик можно дать следующее толкование «механизма» нелинейного ослабления помех. Ослабление помех осуществляется вследствие неравномерной передачи разных участков амплитудного диапазона. Участки, на которые выпадают значения сме-

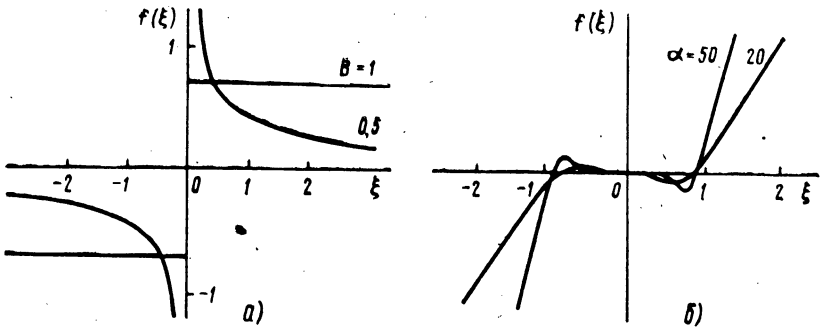


Рис. 5.16. Амплитудные характеристики оптимального НЭ в широкополосном тракте для помехи с распределением (5.130) (*а*) и (5.208) (*б*)

си сигнала с помехой преимущественно из-за действия помех, передаются с малым коэффициентом передачи; участки, где наличие сигнала проявляется наиболее заметно, имеют высокий коэффициент передачи.

5.6.2. Амплитудное подавление помех в некогерентном широкополосном тракте

Рассматриваем обработку сигнала по схеме рис. 5.17. За НЭ включен некогерентный накопитель (НН), например равновесный. Полезный сигнал $s_c(t)$ полагаем стационарным случайным процессом с нулевым математическим ожиданием. Считаем также, что сигнал не зависит от помехи $\xi(t)$. Отношение сигнал-помеха на входе НЭ $q_{вх} \ll 1$. Процесс на выходе НЭ представим разложением

$$f(x = \xi + s) \approx f(\xi) + sf'(\xi) + 0{,}5s^2 f''(\xi).$$

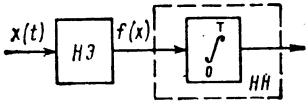


Рис. 5.17. Некогерентный широкополосный тракт обнаружителя

Полагаем $M[f(\xi)] = 0$. Наличие сигнала на выходе НЭ приводит к $M[f(x = \xi + s)] \neq 0$. Отнесем к сигналу на выходе НЭ величину

$$M[f(x = \xi + s)] = 0{,}5M[s^2]M[f''(\xi)] = p_c M[f''(\xi)]/2,$$

где $p_c = M[s^2]$ — мощность сигнала на входе НЭ, а к помехе — $f(\xi)$. Отношение сигнал-помеха на выходе НЭ определяем по формуле

$$q_{нк}^{ш} = (p_c^2/4)\{M[f''(\xi)]\}^2/M[f^2(\xi)]. \qquad (5.131)$$

Найдем вид характеристики НЭ, при которой достигается максимум величины (5.131).

Представим среднее значение $M[f'']$ в следующем виде:

$$M[f''(\xi)] = \int_a^b \frac{d^2}{d\xi^2} f(\xi)\, W(\xi)\, d\xi = f'(\xi)\, W(\xi)\Big|_a^b -$$

$$-f(\xi)\, W'(\xi)\Big|_a^b + \int_a^b f(\xi)\left[\frac{W''(\xi)}{W(\xi)}\right] W(\xi)\, d\xi. \qquad (5.132)$$

Введем условия

$$f'(\xi)\, W(\xi)\Big|_a^b - f(\xi)\, W'(\xi)\Big|_a^b = 0. \qquad (5.133)$$

С учетом (5.132), (5.133) отношение (5.131) принимает вид

$$q_{\text{нк}}^{\text{ш}} = \frac{p_c^2}{4} \frac{\left(\int_a^b f(\xi)\,[W''(\xi)/W(\xi)]\, W(\xi)\, d\xi\right)^2}{\int_a^b f^2(\xi)\, W(\xi)\, d\xi}. \qquad (5.134)$$

Аналогично максимизации функционала (5.127) получаем: максимум (5.134) достигается при

$$f(\xi) = f_{\text{нк}}^{\text{ш}}(\xi) = c\,(W''(\xi)/W(\xi)),\ c \neq 0, \qquad (5.135)$$

и равняется

$$\max q_{\text{нк}}^{\text{ш}} = (p_c^2/4)\, M[(W''(\xi)/W(\xi))^2]. \qquad (5.136)$$

Учитывая (5.133), заключаем, что оптимальное решение существует, если плотность $W(\xi)$ удовлетворяет условиям

$$W'''(b) = W'''(a);\ W''(\xi)\, W'(\xi)/W(\xi)\Big|_a^b = 0. \qquad (5.137)$$

Для гауссовской плотности $W(\xi)$ с дисперсией σ_ξ^2 из (5.135) получаем

$$f_{\text{нк}}^{\text{ш}}(\xi) = c\,(\xi^2/\sigma_\xi^2 - 1), \qquad (5.138)$$

а из (5.136) следует

$$\max q_{\text{нк}}^{\text{ш}} = q_{\text{кв г}} = 0{,}5 q_{\text{вх}}^2,$$

где $q_{\text{кв г}}$ — отношение сигнал-помеха на выходе квадратичного элемента при гауссовской помехе. Таким образом, при гауссовской помехе оптимальный НЭ в некогерентном тракте является квадратичным.

Использование квадратичного накопителя при негауссовской помехе приводит к отношению сигнал-помеха на выходе квадратичного элемента (5.138), равному

$$q_{\text{кв, нг}} = 0{,}5 q_{\text{вх}}^2 \nu, \qquad (5.139)$$

где

$$\nu = 2/[m_4/m_2^2 - 1]; \qquad (5.140)$$

m_2, m_4 — начальные моменты распределения $W(\xi)$.

Коэффициент $\nu < 1$ для помех с положительным эксцессом (помехи импульсного типа) и $\nu > 1$ для помех с отрицательным эксцессом (помехи синусоидального типа). Применение при негауссовской помехе вместо квадратичного НЭ оптимального с характеристикой (5.135) дает приращение отношения сигнал-помеха в $\max \mu^{ш}_{нк}$ раз, где

$$\max \mu^{ш}_{нк} = \frac{\max q^{ш}_{нк}}{q_{кв,нг}} = \frac{p^2_п}{2}\frac{1}{\nu} M\left[\left(\frac{W''(\xi)}{W(\xi)}\right)^2\right]. \qquad (5.141)$$

Используя неравенство Буняковского—Коши, доказываем, что при выполнении дополнительных, но мало ограничиваю-

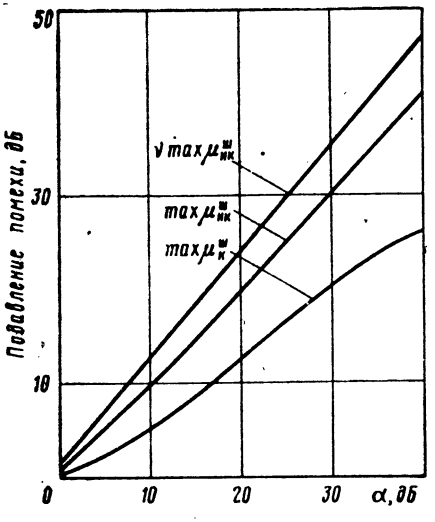


Рис. 5.18. Эффективность амплитудного подавления негауссовской помехи в некогерентном широкополосном тракте

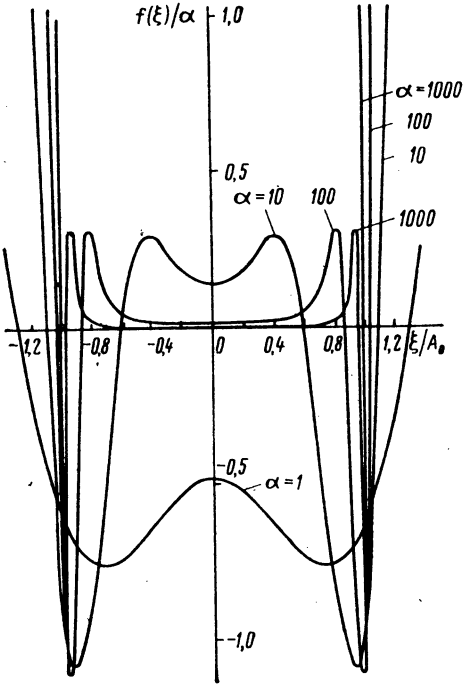


Рис. 5.19. Амплитудные характеристики оптимального НЭ в некогерентном широкополосном тракте

щих условий типа (5.137) на вид распределения помехи $W(\xi)$, имеет место соотношение

$$\nu \max \mu^{ш}_{нк} \geqslant (\max \mu^{ш}_{к})^2 \geqslant 1. \qquad (5.142)$$

Соотношение (5.142) показывает, что эффект от оптимизации нелинейной обработки в некогерентном тракте может быть выше, чем в когерентном тракте. При этом указанный эффект всегда выше для импульсных помех ($\nu < 1$). Знак равенства в (5.142) достигается для гауссовской плотности $W(\xi)$, когда $\nu \max \mu^{ш}_{нк} = \max \mu^{ш}_{к} = 1$.

Заметим, что в общем случае $(W'(\xi)/W(\xi))^2 \neq W''(\xi)/W(\xi)$ и, следовательно, включение НЭ, оптимального для когерентного тракта,

перед квадратичным НЭ в некогерентном тракте не даст максимально возможного ослабления помехи.

На рис. 5.18 приведены зависимости величин (ν max $\mu_{\text{нк}}^{\text{ш}}$), max $\mu_{\text{нк}}^{\text{ш}}$, max $\mu_{\text{к}}^{\text{ш}}$ для частотно-модулированной помехи вида (5.207), имеющей распределение вероятностей (5.208) (см. ниже, п. 5.6.7). Аргументом кривых на рис. 5.18 служит параметр α распределения (5.208). Расчет подтверждает соотношение (5.142).

На рис. 5.19 показаны характеристики оптимального НЭ, соответствующего распределению (5.208). Оптимальный НЭ существенно отличается от квадратичного и имеет зону нечувствительности такой же протяженности, что и НЭ в когерентном тракте.

5.6.3. Амплитудное подавление помех в когерентном полосовом тракте

Рассмотрим обработку сигнала по схеме рис. 5.14, *б*. Сигнал и помеха считаются полосовыми процессами со средней частотой ω_0. Вследствие узкополосности спектра помехи процесс $f[\xi(t)]$ является многополосовым, мощность которого рассредоточена по отдельным полосам на частотах $n\omega_0$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$ За НЭ на рис. 5.14, *б* включен полосовой фильтр (ПФ), пропускающий без искажений спектр сигнала и часть спектра помехи на выходе НЭ, которая соответствует полосе частоты ω_0. Мощность помехи на выходе ПФ обозначим через $M[f^2]_{\omega_0}$. Отношение сигнал-помеха на выходе ПФ определим отношением, аналогичным (5.123):

$$q_{\text{к}}^{\text{п}} = p_{\text{с}} \frac{(M[f'(\xi)])^2}{M[f^2(\xi)]_{\omega_0}}. \tag{5.143}$$

Знаменатель в (5.143) можно выразить так:

$$M[f^2(\xi)]_{\omega_0} = 0{,}5M[g^2(A)], \tag{5.144}$$

где

$$g(A) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(A\cos\psi)\cos\psi d\psi \tag{5.145}$$

— амплитудная характеристика НЭ по первой гармонике;

$$M[g^2(A)] = \int_0^{\infty} g^2(A)\, W_A(A)\, dA,$$

где $W_A(A)$ — распределение огибающей колебания помехи.

Среднее $M[f']$ можно тоже выразить через характеристики $g(A)$ и W_A. При независимости огибающей и фазы помехи в совпадающие моменты времени, а также равномерном распределении фазы доказываем равенство

$$M[f'(\xi)] = 0{,}5M[dg(A)/dA + g(A)/A]. \tag{5.146}$$

С учетом (5.144) и (5.146) отношение (5.143) представляется в виде

$$q_{\text{к}}^{\text{п}} = q_{\text{вх}}\,\mu_{\text{к}}^{\text{п}},$$

где

$$\mu_{\text{к}}^{\text{п}} = \frac{p_{\text{п}}}{2}\,\frac{\left\{\int\limits_0^\infty \left[\frac{g(A)}{A} + g'(A)\right] W_A(A)\,dA\right\}^2}{\int\limits_0^\infty g^2(A)\,W_A(A)\,dA}. \qquad (5.147)$$

Вычисляя интеграл в числителе (5.147) по частям, при условии

$$g(A)\,W_A(A)\big|_0^\infty = 0 \qquad (5.148)$$

получаем

$$\int\limits_0^\infty \left[\frac{g(A)}{A} + g'(A)\right] W_A(A)\,dA = \int\limits_0^\infty g(A)\left[\frac{1}{A} - \frac{W_A'(A)}{W_A(A)}\right] W_A(A)\,dA. \qquad (5.149)$$

После подстановки (5.149) в (5.147), применяя неравенство Буняковского—Коши ,доказываем, что функционал (5.147) достигает максимума при

$$g(A) = g_0(A) = c\left[\frac{1}{A} - \frac{W_A'(A)}{W_A(A)}\right] = c\,\frac{d}{dA}\ln\frac{W_A(A)}{A},\ c \neq 0. \qquad (5.150)$$

Максимум (5.147) равняется

$$\max \mu_{\text{к}}^{\text{п}} = \frac{p_{\text{п}}}{2}\,M\left[\left(\frac{d}{dA}\ln\frac{W_A(A)}{A}\right)^2\right]. \qquad (5.151)$$

С учетом (5.148) заключаем, что оптимальное решение в виде (5.150), (5.151) существует, если плотность $W_A(A)$ удовлетворяет условиям

$$\left[\frac{1}{A}\,W_A(A) - W_A'(A)\right]\Big|_0^\infty = 0. \qquad (5.152)$$

Заметим, что из определения отношений $q_{\text{к}}^{\text{ш}}$, $q_{\text{к}}^{\text{п}}$ следует, что $\max \mu_{\text{к}}^{\text{п}} > \max \mu_{\text{к}}^{\text{ш}}$, т. е. применение НЭ в полосовом тракте дает больший эффект, чем в широкополосном. Из этого, в частности, следует, что включение НЭ до детектора выгоднее, чем после него.

Графики $\max \mu_{\text{к}}^{\text{п}}$, $\max \mu_{\text{к}}^{\text{ш}}$ для помехи вида (5.207), имеющей распределение мгновенных значений (5.208) (см. ниже, п. 5.6.7) и распределение огибающей по закону Райса [188], показаны на рис. 5.13 кри-

выми *1* и *2* соответственно. Графики подтверждают соотношение $\max \mu_к^{п} > \max \mu_к^{ш}$ и показывают, что оптимальный НЭ полосового тракта ослабляет синусоидальную составляющую помехи (5.207) до уровня шума.

Оптимальная характеристика НЭ для полосового тракта находится решением интегрального уравнения (5.145) и определяется по формуле (5.119) для функции $g(A)$, заданной выражением (5.150). Оптимальный НЭ для полосового тракта отличается от оптимального НЭ для широкополосного тракта.

На рис. 5.20 показаны характеристики оптимального НЭ для полосового тракта, соответствующие частотно-модулированной помехе.

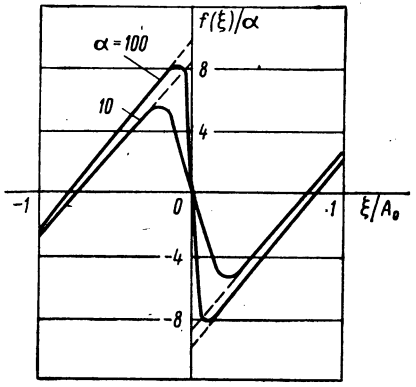


Рис 5.20. Амплитудные характеристики оптимального НЭ в когерентном полосовом тракте

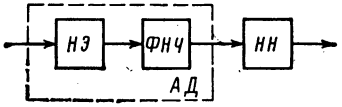


Рис. 5.21. Некогерентный полосовой тракт обнаружителя

Расчеты показывают, что НЭ с линейно-ломаной характеристикой, показанной на рис. 5.20 штриховой линией, имеет такую же эффективность, что и оптимальный НЭ.

5.6.4. Амплитудное подавление помех в некогерентном полосовом тракте

Рассматривается обработка сигнала по схеме рис. 5.21, заключающаяся в амплитудном детектировании и накоплении. Амплитудный детектор (АД) содержит НЭ с характеристикой $f(\xi)$ и низкочастотный фильтр (ФНЧ), рассчитанный на безыскаженную передачу низкочастотной части спектра процесса $f[\xi(t)]$. Отношение сигнал-помеха на выходе ФНЧ определяем с учетом (5.131) в виде

$$q_{нк}^{п} = \frac{p_c^2}{4} \frac{(M[f'(\xi)])^2}{M[f^2(\xi)]_{нч}}, \qquad (5.153)$$

где $[f^2(\xi)]_{нч}$ — обозначает мощность помехи на выходе ФНЧ. Эту мощность можно выразить через распределение огибающей $W_A(A)$ помехи

$$M[f^2(\xi)]_{нч} = 0{,}25M[h^2(A)], \qquad (5.154)$$

где

$$h(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A\cos\psi)\, d\psi \qquad (5.155)$$

— амплитудная характеристика НЭ по низкой частоте или, иначе говоря, характеристика детектирования;

$$\mathrm{M}[h^2(A)] = \int_0^\infty h^2(A)\, W_A(A)\, dA. \qquad (5.156)$$

Среднее в числителе (5.153) также выражается через характеристики $h(A)$ и W_A. При независимости огибающей и фазы в совпадающие моменты времени, а также равномерном распределении фазы получаем

$$\mathrm{M}[f''(\xi)] = 0{,}5\mathrm{M}[h'(A)/A + h''(A)]. \qquad (5.157)$$

С учетом (5.154), (5.157) отношение (5.153) принимает вид

$$q_{\text{нк}}^{\text{п}} = \frac{p_c^2}{4}\,\frac{\{\mathrm{M}[h'(A)/A + h''(A)]\}^2}{\mathrm{M}[h^2(A)]}. \qquad (5.158)$$

Интегрированием по частям числитель в (5.158) представляем в виде

$$\mathrm{M}\left[\frac{1}{A}h'(A) + h''(A)\right] = \left\{\frac{1}{A}h(A)\,W_A(A) + h'(A)\,W_A(A) - \right.$$

$$\left. - h(A)\,W_A'(A)\right\}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty h(A)\left\{\frac{W_A''(A)}{W_A(A)} - \frac{1}{A}\,\frac{d}{dA}\ln\frac{W_A(A)}{A}\right\}\times$$

$$\times\, W_A(A)\, dA. \qquad (5.159)$$

Принимая условие

$$\{(1/A)\,h(A)\,W_A(A) + h'(A)\,W_A(A) - h(A)\,W_A'(A)\}\,|_0^\infty = 0, \qquad (5.160)$$

после подстановки (5.159) в (5.158), применяя неравенство Буняковского—Коши, доказываем, что максимум функционала (5.158) достигается при

$$h(A) = h_0(A) = \frac{W_A''(A)}{W_A(A)} - \frac{1}{A}\,\frac{d}{dA}\ln\frac{W_A(A)}{A} \qquad (5.161)$$

и равняется

$$\max q_{\text{нк}}^{\text{п}} = \frac{p_c^2}{4}\,\mathrm{M}\left[\left(\frac{W_A''(A)}{W_A(A)} - \frac{1}{A}\,\frac{d}{dA}\ln\frac{W_A(A)}{A}\right)^2\right]. \qquad (5.162)$$

Заметим, что оптимальные решения (5.161), (5.162) существуют, если плотность вероятности $W(A)$ огибающей помехи удовлетворяет условиям, вытекающим из (5.160) с учетом (5.161).

Формула (5.161) дает оптимальную характеристику детектирования, выраженную через распределение огибающей помехи. Характеристика

НЭ, которой соответствует оптимальная характеристика детектирования, находится из интегрального уравнения (5.155) при подстановке в левую часть уравнения выражения $h(A)$ по формуле (5.161). Решение этого уравнения находим в виде

$$f^{\text{п}}_{\text{нк}}(\xi) = F(0) + \xi \int_0^{\xi^2} \frac{dF(z)}{\sqrt{\xi^2 - z}}, \qquad (5.163)$$

где $F(z) = h_0(\sqrt{z})$.

Для рэлеевского распределения

$$W_A(A) = (A/\sigma^2) \exp[-A^2/(2\sigma^2)]$$

оптимальная характеристика детектирования

$$h_0(A) = A^2/\sigma^4 - 2/\sigma^2; \qquad (5.164)$$

отношение сигнал-помеха на выходе детектора

$$\max q^{\text{п}}_{\text{нк}} = q^{\text{п}}_{\text{кв.г}} = (p_{\text{с}}/\sigma^2)^2 = q^2_{\text{вх}}, \qquad (5.165)$$

где $q_{\text{вх}} = p_{\text{с}}/\sigma^2$ — отношение сигнал-помеха на входе детектора;

характеристика оптимального НЭ

$$f^{\text{п}}_{\text{нк}}(\xi) \sim \xi^2 - \sigma^2.$$

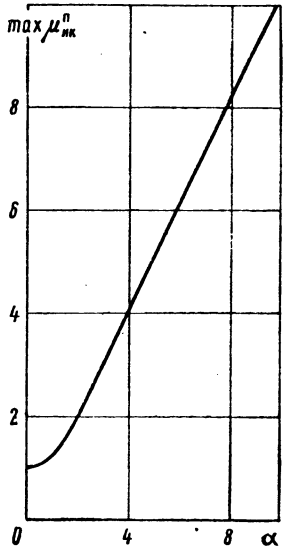


Рис. 5.22. Эффективность амплитудного подавления негауссовской помехи в некогереитном полосовом тракте

Квадратичный детектор, оптимальный при гауссовской помехе, неоптимален при действии помех с распределениями, отличающимися от нормального. Применение квадратичного детектора при негауссовских помехах приводит к отношению сигнал-помеха на выходе детектора, вычисленному по формуле (5.158),

$$q^{\text{п}}_{\text{нк}} = q^{\text{п}}_{\text{кв.нг}} = q^2_{\text{вх}} \nu^{\text{п}}, \qquad (5.166)$$

где

$$\nu^{\text{п}} = (M[A^4]/\{M[A^2]\}^2 - 1)^{-1}. \qquad (5.167)$$

Применение детектора с произвольной характеристикой $h(A)$, удовлетворяющей условию $M[h(A)] = 0$, изменяет отношение сигнал-помеха на выходе детектора по отношению к квадратичному в $\mu^{\text{п}}_{\text{нк}}$ раз, где

$$\mu^{\text{п}}_{\text{нк}} = q^{\text{п}}_{\text{нк}}/q^{\text{п}}_{\text{кв.нг}} = \frac{M[A^4] - (M[A^2])^2}{16} = \frac{(M[h'(A)/A + h''(A)])^2}{M[h^2(A)]}. \qquad (5.168)$$

Применение оптимального детектора $h_0(A)$ вместо квадратичного позволяет получить энергетический выигрыш, равный

$$\max \mu^{\text{п}}_{\text{нк}} = \max q^{\text{п}}_{\text{нк}}/q^{\text{п}}_{\text{кв.нг}} = (p^2_{\text{п}}/4\nu^{\text{п}}) M[h^2_0(A)]. \qquad (5.169)$$

На рис. 5.22 показана зависимость $\max \mu^{\text{п}}_{\text{нк}}$ для помех вида (5.207) (см. п. 5.6.7) с распределением огибающей по закону Райса. Зависи-

мость дана от параметра распределения $\alpha = A_0^2/(2\sigma^2)$. При больших значениях $\alpha \gg 1$ имеем

$$\max \mu_{\text{нк}}^{\text{п}} = \alpha. \qquad (5.170)$$

Этот результат получаем аналитически, применяя аппроксимацию закона Райса нормальным с параметрами $(A_0, \sqrt{2}\sigma)$. График на рис. 5.22 совпадает с аналогичной зависимостью, рассчитанной для широкополосного некогерентного тракта, приведенной на рис. 5.18. Следовательно, энергетический выигрыш от оптимизации НЭ в полосовом и широкополосном некогерентных трактах одинаков.

5.6.5. Эффективность совместного амплитудного и частотного подавления помех

Рассмотрим эффективность совместного применения НЭ и ОФ в целях защиты фильтровых или корреляционных каналов обработки, рассчитанных на гауссовскую помеху, от коррелированных негауссовских помех при малом отношении сигнал-помеха на входе НЭ. Рассмотрение проведем на примере широкополосного когерентного тракта. При совместном применении НЭ и ОФ эффективность защиты зависит от последовательности включения НЭ и ОФ до согласованного фильтра (СФ) или типовой корреляционной обработки. Ввиду этого рассматриваются различные варианты включения.

Частотно-амплитудное подавление. Рассматривается дискретная обработка сигнала в широкополосном когерентном тракте по схеме ОФ-НЭ-СФ. Обеляющий фильтр задан матрицей преобразования $\|A_{ij}\|$, которая связана с корреляционной матрицей помехи $\|B_{\xi ij}\|$ и обратной корреляционной матрицей $\|B_{\xi ij}^{-1}\|$ матричными уравнениями [см. (5.66), (5.67)]

$$ABA^{+} = I; \; A^{+}A = B^{-1}. \qquad (5.171)$$

На вход ОФ подается смесь $x_l = s_l + \xi_l$ сигнала s_l и помехи ξ_l. На выходе ОФ имеем:

$$x_m^* = \sum_{l=1}^{n} A_{ml} x_l; \qquad (5.172)$$

$$s_m^* = \sum_{l=1}^{n} A_{ml} s_l. \qquad (5.173)$$

Уровень помехи на выходе ОФ считаем существенно выше уровня сигнала.

Нелинейный элемент, стоящий за ОФ, рассчитывается на максимум подавления помехи на выходе ОФ и, следовательно, имеет характеристику

$$f(x^*) = \frac{d}{dx} \ln W_{\xi 1}^*(x^*),$$

где $W_{\xi 1}^*$ — одномерная плотность вероятности помехи на выходе ОФ.

На выходе СФ имеем статистику

$$Z = \sum_{m=1}^{n} f(x_m^*)\, s_m^*, \tag{5.174}$$

которую характеризуем отношением сигнал-помеха по формуле (5.3):

$$q = \mu(W_{\xi 1}^*) \sum_{i=1}^{n} (s_i^*)^2/\sigma_*^2, \tag{5.175}$$

где

$$\mu(W_{\xi 1}^*) = \sigma_*^2 \mathrm{M}\left[\left(\frac{d}{d\xi} \ln W_{\xi 1}^*(\xi)\right)^2\right], \tag{5.176}$$

σ_*^2 — дисперсия распределения $W_{\xi 1}^*$.

С учетом равенств (5.171):

$$\sum_{i=1}^{n} (s_i^*)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} s_{j1}\right)^2 = \sum_{i,\, j=1}^{n} B_{\xi ij}^{-1} s_i s_j; \tag{5.177}$$

$$\sigma_*^2 = \mathrm{M}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \xi_j\right)^2\right] = 1. \tag{5.178}$$

В результате

$$q = \mu(W_{\xi 1}^*) \sum_{i,\, j=1}^{n} B_{\xi ij}^{-1}\, s_i s_j. \tag{5.179}$$

Формула (5.179) выражает отношение сигнал-помеха на выходе канала ОФ—НЭ—СФ. Коэффициент $\mu(W_{\xi 1}^*)$ характеризует эффективность включения НЭ после обеляющего фильтра. Оценим его величину.

Декорреляция (обеление) осуществляется по правилу

$$\xi_i^* = \xi_i - a_1 \xi_{i-1} - \ldots - a_p \xi_{i-p}. \tag{5.180}$$

Величина $\mu(W_{\xi 1}^*)$ пропорциональна количеству информации Фишера

$$I(W_{\xi 1}^*) = \mathrm{M}\left[\left(\frac{d}{d\xi} \ln W_{\xi 1}^*(\xi)\right)^2\right], \tag{5.181}$$

содержащейся в распределении $W_{\xi i}^*$. Известно [32], что если плотность вероятности $\widetilde{W}$ представляет собой свертку W_1 с произвольной плотностью, то

$$I(\widetilde{W}) \leqslant I(W_1).$$

Следовательно, если бы отсчеты $\xi_i, \ldots, \xi_{i-p}$ в (5.180) были независимы, то распределение $\widetilde{W}$ статистики ξ_i^*, равное свертке $W_{\xi 1}$ с плотностью комбинации $(-a_1\xi_{i-1} - \ldots - a_p\xi_{i-p})$, удовлетворяло бы условию $\mu(\widetilde{W}) \leqslant \mu(W_{\xi 1})$.

Действительные значения $\xi_i, \ldots, \xi_{i-p}$ зависимые, и поэтому

$$I(\widetilde{W}) \leqslant I(W_{\xi 1}^*) \leqslant I(W_{\xi 1}),$$

а соответственно

$$\mu(\widetilde{W}) \leqslant \mu(W_{\xi 1}^*) \leqslant \mu(W_{\xi 1}). \tag{5.182}$$

Границы неравенства (5.182) сближаются с ослаблением корреляции между $\xi_i, \ldots, \xi_{i-p}$, и когда эти отсчеты действительно независимы $\mu(W^*_{\xi 1}) = \mu(W_{\xi 1})$. С усилением корреляции между $\xi_i, \ldots, \xi_{i-p}$ оценочный интервал расширяется, но при этом $\mu(W^*_{\xi 1})$ приближается к $\mu(W_{\xi 1})$. Последнее объясняется дружными флуктуациями отсчетов $\xi_i, \ldots, \xi_{i-p}$, при которых распределение $W^*_{\xi 1}$ мало отличается от $W_{\xi 1}$ по форме.

Оценка величины $\mu(W^*_{\xi 1})$ неравенством (5.182) удобна тем, что использует только одномерное распределение помехи $W_{\xi 1}$. Плотность $\widetilde{W}$ наиболее просто выражается через $W_{\xi 1}$ по формулам

$$\widetilde{W}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(v)\,\theta(-a_1 v) \ldots \theta(-a_p v)\, e^{iv\xi}\, dv, \qquad (5.183)$$

где

$$\theta(v) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi 1}(\xi)\, e^{iv\xi}\, d\xi$$

— характеристическая функция, соответствующая $W_{\xi 1}$.

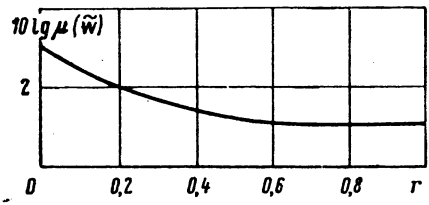


Рис. 5.23. Эффективность амплитудного подавления негауссовской помехи после обеляющего фильтра

В качестве примера оценим с помощью неравенства (5.182) коэффициент $\mu(W^*_{\xi 1})$ при

$$W_{\xi 1}(\xi) = 0{,}5\, e^{-|\xi|};\ B_\xi(\tau) = e^{-\alpha}$$

Алгоритм (5.180) при экспоненциальной форме корреляции помехи принимает простейший вид $\xi_i^* = \xi_i - r\xi_{i-1}$, где $r = B_\xi(\Delta t)$.

Характеристическая функция, соответствующая заданному $W_{\xi 1}$, равна $\theta(v) = 1/(1 + v^2)$. По (5.183) находим

$$\widetilde{W}(\xi) = \left(e^{-|\xi|} - re^{-\frac{|\xi|}{r}}\right) \Big/ [2(1-r^2)].$$

По формуле (5.176) получаем $\mu(W_{\xi 1}) = 2$, а

$$\mu(\widetilde{W}) = 2\frac{1+r^2}{1-r^2} \sum_{k=0}^{\infty} r^{k+1} \left(\frac{1}{r + k(1-r)} - \frac{2}{1 + k(1-r)} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(2-r) + k(1-r)} \right).$$

График зависимости $\mu(\widetilde{W})$ от r показан на рис. 5.23. Нижняя граница $\mu(\widetilde{W})$ приближается к истинному значению коэффициента эффективности $\mu(W^*_{\xi 1})$ с уменьшением коэффициента корреляции r.

Обработка в канале ОФ-НЭ-СФ близка по эффективности к оптимальной обработке при сильной и слабой корреляции помехи.

При сильной корреляции помеха подавляется в основном обеляющим фильтром, а при слабой — нелинейным элементом. При про-

межуточной корреляции помехи включение ОФ на входе нежелательно ввиду его нормализующего действия, снижающего эффект последующего нелинейного подавления. Кроме этого, после ОФ возрастает отношение сигнал-помеха, что также приводит к снижению эффективности НЭ, рассчитанного на малые отношения сигнал-помеха.

Амплитудно-частотное подавление. Исследуем обработку по схеме НЭ-ОФ-СФ. Такая обработка реализуется на базе канала, оптимального к гауссовским коррелированным помехам. Будем считать, что ОФ имеет матрицу преобразования $\|A_{ij}\|$, удовлетворяющую соотношению

$$\sum_{i=1}^{n} A_{il} A_{im} = B_{0\,f,\,lm}^{-1},$$

где $\|B_{0\,f,\,lm}^{-1}\|$ — матрица, обратная $B_{0\,f,\,lm}$ — нормированной корреляционной матрице помехи на выходе НЭ. Характеристика НЭ

$$f(x) = \frac{d}{dx} \ln W_{\xi 1}(x). \tag{5.184}$$

Рассматриваемый канал обработки описывается алгоритмом

$$Z = \sum_{i=1}^{n} x_i^* s_i^*, \tag{5.185}$$

где $x_i^* = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} f(x_j)$; $s_i^* = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} s_j$.

Статистика (5.185) имеет среднее $m_{z\Phi}$ и дисперсию $\sigma_{z\Phi}^2$:

$$m_{z0} = 0;\ m_{z1} = (M[f'(\xi)]) \sum_{i,\,j=1}^{n} B_{0\,f,\,ij}^{-1} s_i s_j;\ \sigma_{z0}^2 = \sigma_{z1}^2 = (M[f^2(\xi)]) \times$$

$$\times \sum_{i,\,j=1}^{n} B_{0\,f,\,ij}^{-1} s_i s_j.$$

Отношение сигнал-помеха на выходе канала НЭ-ОФ-СФ равно

$$q = \frac{m_{z1}^2}{\sigma_{z0}^2} = \mu \frac{1}{\sigma_\xi^2} \sum_{i,\,j=1}^{n} B_{0\,f,\,ij}^{-1} s_i s_j, \tag{5.186}$$

где $\mu = \sigma_\xi^2 M[f^2(\xi)]$.

Если НЭ в канале обработки отсутствует, то

$$q = \frac{1}{\sigma_\xi^2} \sum_{i,\,j=1}^{n} B_{0\,\xi,\,ij}^{-1} s_i s_j.$$

Следовательно, включение НЭ на входе канала, оптимального к гауссовской коррелированной помехе, увеличивает отношение сигнал-помеха на выходе канала в $\tilde{\mu}$, раз, где

$$\tilde{\mu} = \mu \sum_{i,\,j=1}^{n} B_{0\,f,\,ij}^{-1} s_i s_j \Big/ \sum_{i,\,j=1}^{n} B_{0\,\xi,\,ij}^{-1} s_i s_j. \tag{5.187}$$

С учетом (5.187) формулу (5.186) можно записать в виде

$$q=\widetilde{\mu}\sum_{i,\,j=1}^{n}B_{\xi,}^{-1}{}_{ij}\,s_i\,s_j. \tag{5.188}$$

Сравнивая (5.188) с (5.179) заключаем, что эффективность канала НЭ-ОФ-СФ по отношению к ОФ-НЭ-СФ выражается величиной $\widetilde{\mu}/\mu$ $(W^{*}_{\xi 1})$. Численные расчеты показывают, что в области промежуточной корреляции $\widetilde{\mu}\approx\mu$, а $\mu\,(W^{*}_{\xi 1})<\mu$. Следовательно, включение НЭ до ОФ выгоднее, чем после ОФ.

Если канал НЭ-ОФ-СФ применяется в обнаружителе сигнала, то при выборе характеристики НЭ следует учитывать дополнительные соображения. Допустим, на канал НЭ-ОФ-СФ действуют помехи импульсного типа и накопление в СФ недостаточно для удовлетворительной нормализации статистики обнаружения. В этом случае статистика обнаружения будет характеризоваться значительным положительным эксцессом. Распределение такой статистики имеет более высокие и длинные «хвосты» по сравнению с кривой Гаусса. При этом «порог», соответствующий малой вероятности ложной тревоги, располагается дальше от моды распределения, чем при гауссовском законе.

С появлением обнаруживаемого сигнала распределение статистики обнаружения смещается на среднее m_{z1}. Однако в случае распределения с положительным эксцессом это смещение вызывает меньшее приращение площади под кривой распределения правее порога, чем при гауссовском законе, т. е. возникают потери в вероятности правильного обнаружения. Для устранения этих потерь выгоднее вместо НЭ с характеристикой (5.184) включать НЭ с нормализующей амплитудной характеристикой. При заданной плотности вероятности помехи $W_{\xi 1}$ НЭ с нормализующей характеристикой $f_{\text{н}}(\xi)$ находится из уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{f^2_{\text{н}}(\xi)}{2}}\frac{df_{\text{н}}(\xi)}{d\xi}-W_{\xi 1}(\xi)=0. \tag{5.189}$$

Отношение сигнал-помеха на выходе НЭ с нормализующей характеристикой изменяется в $\mu_{\text{н}}$ раз, где

$$\mu_{\text{н}}=\sigma^2_{\xi}\frac{\left(\text{M}\left[\dfrac{df_{\text{н}}(\xi)}{d\xi}\right]\right)^2}{\text{M}[f^2_{\text{н}}(\xi)]}; \tag{5.190}$$

σ^2_{ξ} — дисперсия помехи на входе НЭ.

Величина $\mu_{\text{н}}$ меньше максимальной $\max\mu^{\text{ш}}_{\text{к}}$, достигаемой при НЭ с характеристикой (5.184). Однако вследствие устранения потерь в вероятности правильного обнаружения, вызываемых неудовлетворительной нормализацией статистики обнаружения, эффект в целом может быть значительным, особенно при малых вероятностях ложной тревоги, когда отличие статистики обнаружения от гауссовской ощутимее.

Покажем эффективность применения нелинейной нормализации на примере помехи с логонормальным распределением

$$\xi\,(t)=\exp\,[\eta\,(t)], \tag{5.191}$$

где $\eta\,(t)$ — гауссовский процесс с нулевым средним и корреляционной функцией $B_{\eta}(\tau)=\sigma^2_{\eta}e^{-\alpha|\tau|}$.

Канал НЭ-ОФ-СФ с нелинейной нормализацией для заданного $\xi\,(t)$ описывается алгоритмом

$$Z=\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-r_{\eta}\ln x_{i-1})\,(s_i-r_{\eta}\,s_{i-1}), \tag{5.192}$$

где $r_\eta = \exp(-\alpha\Delta t)$. В данном случае

$$f_н(\xi) = \ln \xi;\ \mu_н = e^{2\sigma_\eta^2}\left(e^{\sigma_\eta^2} - 1\right)/\sigma_\eta^2 > 1;$$

$$\max \mu_к^ш = \frac{1}{\sigma_\eta^2} e^{3\sigma_\eta^2}\left(e^{\sigma_\eta^2} - 1\right)(1+\sigma_\eta^2);\ \max \mu_к^ш/\mu_н = e^{\sigma_\eta^2}(1+\sigma_\eta^2).$$

На рис. 5.24 представлены характеристики обнаружения для двух значений вероятности ложной тревоги α: сплошными линиями — соответствующие алгоритму (5.192), штриховыми — соответствующие линейному алгоритму

$$z = \sum_{i=1}^{n} (x_i - r_\xi x_{i-1})(s_i - r_\xi s_{i-1}), \qquad (5.193)$$

где $r_\xi = \left(e^{\sigma_\eta^2 r_\eta} - 1\right)/\left(e^{\sigma_\eta^2} - 1\right)$

— коэффициент корреляции соседних отсчетов помехи. Сплошные кривые получены расчетным путем, а штриховые—методом Монте-Карло при моделировании статистики (5.193) на ЭВМ. В расчетах и моделировании принято $r_\eta = 0{,}9$; $\sigma_\eta^2 = 0{,}5$; $n = 50$. Сигнал рассматривался в виде последовательности чисел $s_1 = s$, $s_2 = 0$, $s_3 = s$, ... Аргументом характеристик служит отношение сигнал-помеха $q_{вх} = s^2/\sigma_\xi^2$, где σ_ξ^2 — дисперсия помехи.

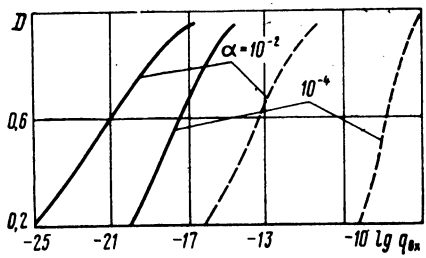


Рис. 5.24. Характеристики обнаружения

Рисунок 5.24 свидетельствует о существенной эффективности нелинейной нормализации, особенно при малой вероятности ложной тревоги.

Рассмотрим канал обработки без ОФ. Схема НЭ-СФ описывается алгоритмом

$$Z = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, s_i. \qquad (5.194)$$

Исследуем его помехоустойчивость при действии коррелированной негауссовской помехи с корреляционной матрицей $\|B_{\xi,\,ij}\| = \sigma_\xi^2 \|B_{0\xi,\,ij}\|$.

Считаем нелинейную обработку $f(x)$ произвольной, полагая $M[f(\xi)] = 0$. Средние m_{z0}, m_{z1} и дисперсии σ_{z0}^2 σ_{z1}^2 статистики (5.194) при условии малости отношения сигнал-помеха на входе НЭ равны

$$m_{z0} = 0;\ m_{z1} = M[f'(\xi)] \sum_{i=1}^{n} s_i^2;\ \sigma_{z0}^2 = \sigma_{z1}^2 = M[f^2(\xi)] \sum_{i,\,j=1}^{n} B_{0f,\,ij}\, s_i\, s_j,$$

где $\|B_{0f,\,ij}\|$ — нормированная корреляционная матрица помехи на выходе НЭ.

Отношение сигнал-помеха на выходе СФ

$$q = m_{z1}^2/\sigma_{z1}^2 = \mu_к^ш\, q_{СФ}\, \delta_{НЭ\text{-}СФ}, \qquad (5.195)$$

$$\mu_к^ш = \frac{(M[f'(\xi)])^2}{M[f^2(\xi)]}\,\sigma_\xi^2;\ q_{сф} = \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i^2}{\sigma_\xi^2},$$

$$\delta_{\text{НЭ-СФ}} = \sum_{i=1}^{n} s_i^2 \Big/ \sum_{i,\,j=1}^{n} B_{0f,\,ij}\, s_i\, s_j \leqslant 1$$

— коэффициент потерь от корреляции помехи в схеме НЭ-СФ.

В отсутствие НЭ и ОФ каналом формируется статистика $Z = \sum_{i=1}^{n} x_i s_i$, характеризуемая отношением сигнал-помеха на выходе

$$q = q_{\text{СФ}}\, \delta_{\text{СФ}}, \tag{5.196}$$

где $\delta_{\text{сф}} = \sum_{i=1}^{n} s_i^2 \Big/ \sum_{i,\,j=1}^{n} B_{0\xi,\,ij}\, s_i\, s_j$

— коэффициент потерь от корреляции помехи для СФ.

Из сравнения формул (5.195), (5.196) определяем коэффициент эффективности нелинейной обработки в схеме НЭ-СФ при коррелированных помехах:

$$\tilde{\mu}_{\text{к}}^{\text{ш}} = \mu_{\text{к}}^{\text{ш}} \sum_{i,\,j=1}^{n} B_{0f,\,ij}\, s_i\, s_j \Big/ \sum_{i,\,j=1}^{n} B_{0\xi,\,ij}\, s_i\, s_j.$$

Вычисления показывают, что $\tilde{\mu}_{\text{к}}^{\text{ш}} \approx \mu_{\text{к}}^{\text{ш}}$, т. е. эффект нелинейной обработки слабо зависит от корреляционных свойств помехи.

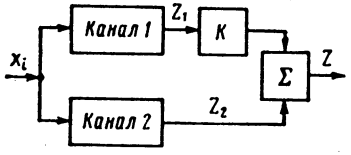


Рис. 5.25. Тракт обнаружителя с амплитудно-частотной защитой от помех

Каналы обработки с параллельно-последовательным включением НЭ и ОФ. Рассмотрим помехоустойчивость канала обработки, построенного по схеме рис. 5.25, где каждый из каналов *1* и *2* представляет собой СФ, защищенный на входе безынерционным нелинейным элементом и (или) обеляющим фильтром. Ожидаемая помехоустойчивость такой обработки выше, чем при последовательной схеме НЭ-ОФ-СФ, которая является частным случаем рассматриваемой схемы.

Результатом обработки входного сигнала является статистика

$$Z = KZ_1 + Z_2, \tag{5.197}$$

где Z_1 и Z_2 — статистики, формируемые в ветвях *1* и *2*; K — весовой коэффициент.

Помехоустойчивость будем характеризовать отношением

$$q = m_z^2/\sigma_z^2, \tag{5.198}$$

где m_z — приращение математического ожидания статистики Z, вызванное наличием полезного сигнала; σ_z^2 — дисперсия статистики z, не зависящая от наличия или отсутствия полезного сигнала, если он слабый или каналы *1* и *2* линейные.

Отношение (5.198) можно записать в следующем виде:

$$q = (m_1 K + m_2)^2 / (\sigma_1^2 K^2 + \sigma_2^2 + 2KB_{12}\sigma_1\sigma_2), \tag{5.199}$$

где B_{12} — коэффициент корреляции статистик Z_1 и Z_2; $m_1\sigma_1$, $m_2\sigma_2$ — характеристики статистик Z_1 и Z_2.

Для наилучшего подавления помехи регулируемые параметры защитных устройств и весовой коэффициент K должны устанавливаться такими, при которых обеспечивается максимум отношения (5.199). Наилучшие значения параметров сложным образом зависят от характеристик помехи и вида сигнала. Практически удобнее раздельное согласование НЭ только с одномерным распределением помехи, а ОФ — только с корреляционной функцией помехи на входе ОФ. При фиксированных параметрах каналов *1* и *2* весовой коэффициент $K = K^*$, доставляющий максимум отношения (5.199), равен

$$K^* = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{B_{12} m_2/\sigma_2 - m_1/\sigma_1}{B_{12} m_1/\sigma_1 - m_2/\sigma_2} \ . \ . \qquad (5.200)$$

При этом

$$q = [q_1 + q_2 - 2|B_{12}|\sqrt{q_1 q_2}]/(1 - B_{12}^2), \qquad (5.201)$$

где q_1 и q_2 — отношения типа (5.198) для каждого из каналов *1* и *2* схемы рис. 5.25.

5.6.6. Защита от прямошумовых помех

Рассмотрим прямошумовые помехи радиопротиводействия, образуемые прямым усилением шумов первичных источников. Шумы первичных источников можно считать гауссовскими. С целью увеличения эффективной мощности прямошумовой помехи оконечные каскады усилителей мощности работают в режиме ограничения больших шумовых выбросов. Ограничение приводит к отклонению закона распределения помехи от гауссовского.

Аппроксимируя амплитудную характеристику усилителя мощности логарифмической функцией, можно процесс формирования прямошумовой помехи отобразить выражением

$$V(\eta) = \begin{cases} \ln[1 + a\eta(t)] \text{ при } \eta \geqslant 0; \\ -\ln[1 - a\eta(t)] \text{ при } \eta < 0, a > 0, \end{cases} \qquad (5.202)$$

где $\eta(t) = \int_0^t n(t_1) h(t - t_1) dt_1$ — шум на выходе линейной части усилителя мощности; $h(t)$ — импульсная характеристика линейной части усилителя мощности; $n(t)$ — белый гауссовский шум на входе усилителя мощности.

Проведем сравнение по помехоустойчивости широкополосных когерентных каналов обработки сигнала, содержащих нелинейный элемент НЭ, обеляющий фильтр ОФ и согласованный фильтр СФ, включенных в различных сочетаниях, с оптимальным каналом, работающим по алгоритму (5.87). Амплитудную характеристику НЭ считаем оптимальной, т. е. согласованной с распределением помехи на его входе по формуле (5.19). За показатель помехоустойчивости примем энергетический параметр q, характеризующий отношение сигнал-помеха на выходе канала обработки. Для оптимального канала указанный параметр

вычисляется по формуле (5.89), а для канала с согласованным фильтром — по формулам (5.179), (5.188), (5.195), (5.196).

Определим характеристики, входящие в перечисленные формулы. Для прямошумовой помехи, определенной выражением (5.202),

$$Q(\xi)=\frac{1}{a}\begin{cases}e^{\xi}-1 & \text{при } \xi\geqslant 0;\\ -(e^{-\xi}-1) & \text{при } \xi<0;\end{cases}$$

$$Q'(\xi)=\frac{1}{a}e^{|\xi|};\quad \left(\frac{Q''(\xi)}{Q'(\xi)}\right)^2=1.$$

В результате несложных вычислений находим

$$A_{ij}=M[Q'(\xi_i)Q'(\xi_j)]=M\left[\left(\frac{1}{a}+|\eta_i|\right)\left(\frac{1}{a}+|\eta_j|\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{a\sqrt{2\pi}}+\frac{2}{\pi}\left(B_{0\eta,\,ij}\arcsin B_{0\eta,\,ij}+\sqrt{1-B_{0\eta,\,ij}^2}\right).$$

В частности,

$$M[(Q'(\xi))^2]=1/a^2+4/(a\sqrt{2\pi})+1.$$

Коэффициент амплитудного подавления помехи при оптимальной нелинейной обработке, определяемый по (5.25), равен

$$\mu=(2+4/(a\sqrt{2\pi})+1/a^2)\sigma_{\xi}^2,$$

где

$$\sigma_{\xi}^2=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\ln^2(1+a\eta)\,e^{-\eta^2/2}\,d\eta.$$

Для расчетов по (5.188), (5.195) необходимо знать корреляционную функцию $B_f(\tau)$ помехи на выходе НЭ, т. е. процесса

$$f(t)=-\frac{\partial}{\partial\xi}\ln W_{\xi 1}[\xi(t)], \tag{5.203}$$

где $W_{\xi 1}$ — распределение помехи (5.202). Процесс (5.203) можно представить в следующем виде:

$$f(t)=\pm\left[\frac{1}{a^2}(e^{|\xi(t)|}-1)\,e^{|\xi(t)|}-1\right]=\pm\left[\eta^2(t)+\frac{1}{a}|\eta(t)|-1\right],$$

где

$$(+)\text{ при }\eta,\ \xi\geqslant 0;\ (-)\text{ при }\eta,\ \xi<0. \tag{5.204}$$

Представление (5.204) определяет $f(t)$ как результат нелинейного безынерционного преобразования нормального процесса $\eta(t)$. Это позволяет известными методами найти $B_f(\tau)$ в виде

$$B_f(\tau)\approx\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}+\frac{1}{a}\right)^2 B_{0\eta}(\tau)+\frac{3}{\pi}B_{0\eta}^3(\tau)+\frac{5}{12\pi}B_{0\eta}^5(\tau)+$$

$$+\frac{7}{40\pi}B_{0\eta}^7(\tau). \tag{5.205}$$

Формула (5.205 задает B_f с точностью не хуже 10 %.

В формулу (5.179) входит коэффициент $\mu(W^*_{\xi 1})$, характеризующий эффективность оптимальной нелинейной обработки после ОФ. Зависимость $\mu(W^*_{\xi 1})$ от коэффициента корреляции B_ξ определялась методом Монте-Карло для экспоненциально-коррелированного $\eta(t)$. Эта зависимость показана на рис. 5.26 для нескольких значений параметра помехи a.

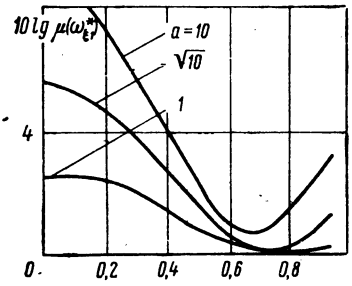


Рис. 5.26. Эффективность амплитудного подавления прямошумовой помехи после обеляющего фильтра

Все последующие расчеты выполнены для сигнала типа колоколообразный импульс $s(t) = e^{-(\beta t)^2}$ и для помехи с нормированной корреляционной функцией $B_\xi(\tau) \approx B_\eta(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$. Сигнал представлялся последовательностью отсчетов

$$s_k = e^{-0{,}25(k-5)^2},\ k = 1, 2, \ldots, 10.$$

Графики зависимостей отношения $q/q_{вх}$, где $q_{вх} = 1/\sigma^2_\xi$, от $\Delta\omega_\xi/\Delta\omega_c$ ($\Delta\omega_\xi$ — энергетическая ширина спектра помехи; $\Delta\omega_c$ — эффективная ширина амплитудного спектра сигнала), соответствующие различным каналам, представлены на рис. 5.27. Графики показывают, во сколько раз можно увеличить отношение сигнал-шум по сравнению с $q_{вх}$, применяя тот или иной канал обработки.

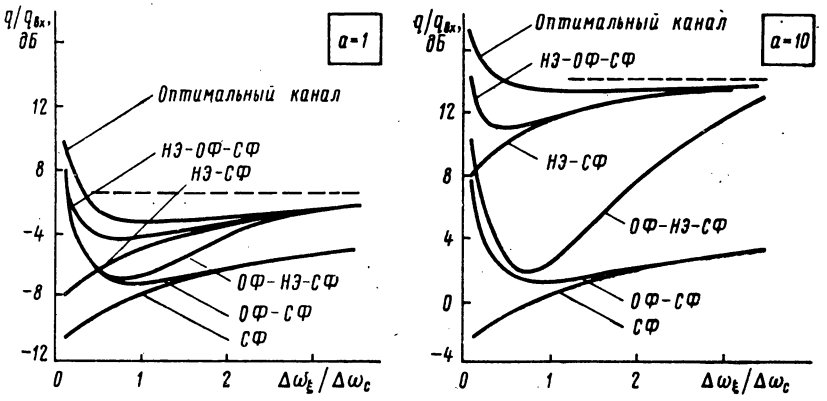


Рис. 5.27. Эффективность амплитудно-частотного подавления прямошумовой помехи

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы. Имеется большой резерв повышения помехозащищенности канала обработки, построенного только на СФ. Обработка в схеме НЭ-ОФ-СФ незначительно уступает оптимальной и почти реализует потенциальную помехоустойчивость. Канал НЭ-СФ является достаточным, когда помеха по спектру не уже сигнала. Применение НЭ после ОФ малоэффек-

тивно. Линейный канал ОФ-СФ может быть достаточно помехоустойчивым только при существенно узкополосной помехе. Подчеркнем, что эти выводы практически справедливы при отношении сигнал-шум на входе нелинейных элементов, существенно меньшем единицы.

5.6.7. Защита от частотно-модулированных помех

Здесь рассматриваются помехи радиопротиводействия, образуемые модуляцией колебаний высокой частоты шумом по частоте или фазе [206—208]. При фазовой или частотной модуляции имеем помеховый сигнал вида

$$V(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \Phi(t)], \tag{5.206}$$

где при фазовой модуляции $\Phi(t) = k_\Phi \eta(t)$, а при частотной $\Phi(t) = k_ч \int_0^t \eta(t_1)\,dt_1$; $\eta(t)$ — модулирующий шум, который будем считать нормальным; k_Φ, $k_ч$ — крутизна модуляционной характеристики при фазовой и частотной модуляции соответственно.

В точке приема внешняя помеха (5.206) складывается с белым гауссовским шумом — внутренним шумом приемника $n(t)$, образуя мешающий фон

$$\xi(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \Phi(t) + \theta] + n(t), \tag{5.207}$$

где θ — начальная фаза, распределенная равномерно в интервале $(0, 2\pi)$. Процесс (5.207), отнесенный к A_0, имеет одномерное распределение:

$$W(\xi) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \exp[-\alpha(\xi - \cos\varphi)^2]\,d\varphi, \tag{5.208}$$

где параметр распределения $\alpha = A_0^2/2\sigma_n^2$ является отношением мощности модулированной составляющей в смеси (5.207) к мощности внутреннего шума приемника σ_n^2. Если процесс (5.207) является узкополосным, то его огибающая распределена по закону Райса.

Оценим помехозащищенность широкополосных когерентных каналов обработки сигнала, содержащих согласованные фильтры или корреляторы, нелинейные элементы и обеляющие фильтры, включенные в различных сочетаниях в схему рис. 5.25. Помеха описывается выражением (5.207). За показатель помехоустойчивости принимается энергетический параметр q, определяемый формулой (5.201).

Для вычисления q_1, q_2, B_{12}, входящих в (5.201), необходимо знать корреляционные свойства помехи до и после НЭ. Функция корреляции процесса (5.207), отнесенного к A_0,

$$B_{\xi,\,ij} = \langle \xi_i \xi_j \rangle = \begin{cases} 1/2 + 1/(2\alpha) \text{ при } i = j; \\ B_{v,\,ij} \text{ при } i \neq j, \end{cases}$$

где $B_{v,\,ij}$ — корреляционная функция модулированной составляющей (5.206), параметр α определен в (5.208). Вид функции $B_{v,\,ij}$ зависит от режима модуляции. При медленном изменении частоты, когда $\gamma = \Delta\omega/\Omega_м \gg 1$, где $\Delta\omega = k_ч\sigma_n$ — девиация частоты; σ_η^2 и $\Omega_м$ — мощность и наивысшая частота модулирующего шума, корреляционная функция модулированной составляющей

$$B_{v.\,ij} = B_v(\tau) = \frac{1}{2}\,e^{-\,0{,}5\psi(\tau)}\cos\omega_0\tau,\ \tau = t_i - t_j, \qquad (5.209)$$

где $\psi(\tau) = \Delta\omega^2\tau^2$.

При быстром изменении частоты, когда $\gamma \ll 1$ и спектр модулируемого шума равномерен в широкой полосе частот, функция $B_v(\tau)$ определяется по формуле (5.209) при $\psi(\tau) = \pi\gamma^2\Omega_м|\tau|$.

Характеристику нелинейного элемента примем в виде кубической параболы:

$$f(\xi) = \xi + a\xi^3 \qquad (5.210)$$

при

$$a = (3m_2^2 - m_4)/(m_6 - 3m_2m_4),$$

где m_2, m_4, m_6 — моменты процесса (5.207), отнесенного к A_0. Показано [225], что кубическая парабола (5.210) при указанном согласовании с распределением помехи дает практически такой же эффект подавления, что и оптимальное нелинейное преобразование.

Функция корреляции процесса (5.207), пропущенного через НЭ с характеристикой (5.210), равна

$$B_{f,ij} = M[f(\xi_i)f(\xi_j)] = M[\xi_i\xi_j] + 2aM[\xi_i\xi_j^3] + a^2M[\xi_i^3\xi_j^3]. \qquad (5.211)$$

Вычисляя смешанные моменты, входящие в (5.211), окончательно получаем

$$B_{f,\,ij} = \begin{cases} \sigma_f^2 = m_2 + 2am_4 + a^2m_6, & i = j; \\ F_1(\tau)\cos\omega_0\tau + F_2(\tau)\cos 3\omega_0\tau, & i \neq j, \end{cases}$$

где

$$F_1(\tau) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{3}{2}\,a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}\right)\right]^2 e^{-\frac{1}{2}\psi(\tau)};$$

$$F_2(\tau) = \frac{a^2}{32}\exp\left\{-\frac{9}{2}\,\psi(\tau)\right\}.$$

Анализу подлежат следующие каналы обработки сигнала:

последовательные ($K = 0$): 1) СФ, 2) НЭ-СФ, 3) ОФ-СФ, 4) НЭ-ОФ-СФ;

последовательно-параллельные ($K \neq 0$): 5) НЭ-СФ||ОФ-СФ, 6) НЭ-ОФ-СФ||ОФ-СФ.

Во всех случаях характеристика НЭ соответствует (5.210), а ОФ считается идеальным. В расчетах принято $\omega_0 = 0$, что соответствует рассмотрению тракта обработки после когерентного детектора.

Показатель помехоустойчивости (5.198), отнесенный к $q_{вх}$, для последовательных схем приема 1)—4) определяется следующими формулами:

для согласованного фильтра (с сигналом s_i)

$$q^{(1)}/q_{вх} = \left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{s}_i^2\right)^2 \Big/ \sum_{i,\,j=1}^{n} B_{\xi,\,ij}\,\tilde{s}_i\,\tilde{s}_j,$$

где $\tilde{s} = s_i/\sqrt{q_{вх}}$; $q_{вх} = A_s^2/A_0^2$; A_s — максимальное значение сигнала s_i;

для схемы НЭ-СФ

$$q^{(2)}/q_{вх} = (1+3am_2)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{s}_i^2\right)^2 \Big/ \sum_{i,\,j=1}^{n} B_{f,\,ij}\,\tilde{s}_i\,\tilde{s}_j;$$

для схемы ОФ-СФ

$$q^{(3)}/q_{вх} = \sum_{i,\,j=1}^{n} H_{\xi,\,ij}\,\tilde{s}_i\,\tilde{s}_j;$$

для схемы НЭ-ОФ-СФ

$$q^{(4)}/q_{вх} = (1+3am_2)^2 \sum_{i,\,j=1}^{n} H_{f,\,ij}\,\tilde{s}_i\,\tilde{s}_j.$$

Коэффициент корреляции B_{12} для параллельных схем 5) и 6) соответственно равен:

$$B_{12}^{(5)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{s}_i^2 + a \sum_{i,\,j,\,l=1}^{n} \mathrm{M}[\xi_i\,\xi_l^3]\,H_{\xi,\,ij}\,\tilde{s}_l\,\tilde{s}_j}{\sqrt{\sum_{i,\,j=1}^{n} B_{f,\,ij}\,\tilde{s}_i\,\tilde{s}_j \sum_{i,\,j=1}^{n} H_{\xi,\,ij}\,\tilde{s}_i\,\tilde{s}_j}};$$

$$B_{12}^{(6)} = \frac{\sum_{i,\,j=1}^{n} H_{f,\,ij}\,\tilde{s}_i\,\tilde{s}_j + a \sum_{i,\,j,\,p,\,l=1}^{n} H_{f,\,ij}\,H_{\xi,\,pl}\,\mathrm{M}[\xi_l^3\,\xi_p]\,\tilde{s}_j\,\tilde{s}_l}{\sqrt{\sum_{i,\,j=1}^{n} H_{f,\,ij}\,\tilde{s}_i\,\tilde{s}_j \sum_{i,\,j=1}^{n} H_{\xi,\,ij}\,\tilde{s}_i\,\tilde{s}_j}}.$$

Расчеты были выполнены для сигнала типа колоколообразный импульс. Результаты расчетов представлены на рис. 5.28, *а* для режима медленного изменения частоты помехи и на рис. 5.28, *б* для режима быстрого изменения частоты. Аргументом кривых служит отношение энергетической ширины спектра ЧМ помехи $\Delta\omega_м$ к эффективной ширине амплитудного спектра сигнала $\Delta\omega_с$.

Из рис. 5.28 видно, что наибольшей помехоустойчивостью обладает параллельная схема обработки вида 6). Однако последовательная схема вида 4) уступает ей практически несущественно. Канал вида

НЭ-СФ существенно уступает более сложным схемам лишь при $\Delta\omega_м/\Delta\omega_с < 0{,}5$. Канал ОФ-СФ устойчив в отношении узкополосных помех, причем его эффективность существенно зависит от режима модуляции частоты ЧМ помехи и уровня ЧМ помехи по отношению к внутреннему шуму приемника.

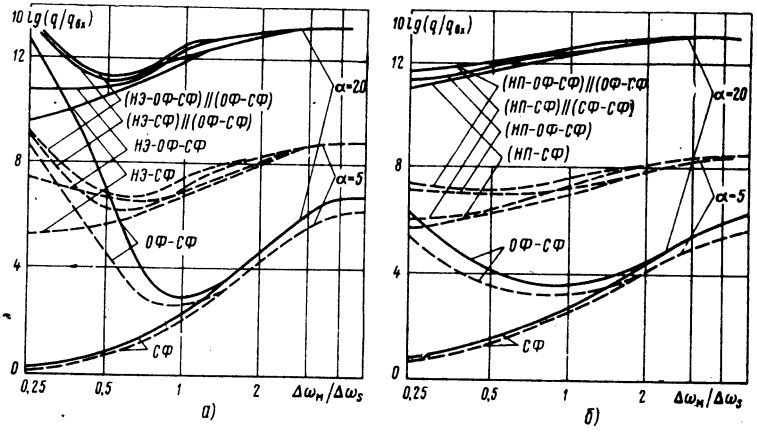


Рис. 5.28. Эффективность амплитудно-частотного подавления помех с угловой модуляцией

Выводы, сделанные на широкополосных трактах, характеризуют также возможности совместной амплитудной и частотной защиты полосовых трактов.

Глава 6

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ОБНАРУЖИТЕЛИ СИГНАЛОВ ПРИ КОНЕЧНОМ ЧИСЛЕ НАБЛЮДЕНИЙ

6.1. Основные виды непараметрических тестов

Для современных радиотехнических систем различного назначения характерна работа в сложной помеховой обстановке. При проектировании систем связи, радиолокации и других все чаще приходится сталкиваться с задачей обнаружения сигналов в шумах, когда их статистические характеристики заранее неизвестны либо подвержены изменениям.

В настоящее время обнаружение сигнала общепринято трактовать как статистическую задачу с априорной неопределенностью, выражающейся в том, что ряд параметров, а иногда и вид функции распределения шумов $F_0(x)$ и смеси сигнала с шумом $F_1(x)$ неточно известны и могут изменяться в процессе наблюдения*. В этих условиях классц-

* В этой главе будем пользоваться как функциями распределения наблюдаемых величин $F_i(x)$, так и плотностями $W_i(x)$, $i=0; 1$.

ческие алгоритмы обнаружения, «специализированные», как правило, на нормальный шум, могут оказаться неэффективными. При отклонении закона распределения шума от нормального такие обнаружители утрачивают свою оптимальность, а при изменении только параметра нормального шума (дисперсии), оставаясь структурно оптимальными, не обеспечивают расчетных показателей обнаружения.

Один из путей преодоления априорной неопределенности состоит в разработке адаптивных алгоритмов, структура и параметры которых могут изменяться в соответствии с результатами анализа входных данных. В тех случаях, когда неизвестным или изменяющимся является сравнительно легко контролируемый параметр сигнала или шума, удается преодолеть априорную неопределенность в результате подстройки (адаптации) параметров обнаружителя в ходе наблюдения. Именно этот путь используется в адаптивном последовательном обнаружителе (см. гл. 4). Задача адаптации обнаружителя существенно усложняется, когда неизвестны несколько параметров или вид функций распределения $F_0(x)$ и $F_1(x)$. Поэтому такие алгоритмы оказываются весьма сложными и нереализуемыми для работы в реальном масштабе времени.

Другой путь преодоления априорной неопределенности состоит в разработке алгоритмов, нечувствительных или слабо чувствительных к статистическим характеристикам сигналов и шумов. Когда неизвестны параметры распределений шума и смеси сигнала с шумом, этот путь приводит к подобным и инвариантным алгоритмам (см. гл. 2), когда неизвестны виды распределений — к непараметрическим алгоритмам.

В связи с этим в последнее время в задачах обнаружения сигналов все чаще привлекают внимание непараметрические методы. Статистический метод называется непараметрическим, если его применение не предполагает знания функционального вида распределений. В теории обнаружения обнаружитель принято называть непараметрическим, если при отсутствии сигнала (наличии только шума) распределение вероятностей его решающей статистики не зависит от распределения шума [1, 232]. Это значит, что такой обнаружитель обеспечивает постоянную вероятность ложного обнаружения независимо от статистических характеристик шума. Качество обнаружителя определяется двумя показателями — вероятностью ложного обнаружения (ложной тревоги) α и вероятностью пропуска полезного сигнала β (или вероятностью правильного обнаружения $D = 1 - \beta$). Поэтому задача стабилизации на заданном уровне хотя бы одного из этих показателей (например, α) при изменении помеховой обстановки является весьма важной.

Анализ качества известных непараметрических тестов для случая нормального шума показывает, что некоторые из них (например, ранговые) незначительно уступают по эффективности оптимальным. В то же время при изменении распределения шума ранговые алгоритмы в общем случае более эффективны, чем классические, которые в новых условиях становятся уже неоптимальными [245, 256]. Это полезное свойство непараметрических тестов сохранять в определенных преде-

лах свои характеристики при изменении помеховой обстановки принято называть устойчивостью [1].

Применение непараметрической обработки поэтому особенно целесообразно как с точки зрения стабилизации вероятности ложного обнаружения, так и с точки зрения эффективности (вероятности) обнаружения в том случае, когда распределение шума отлично от нормального. Отличие это может иметь место, например, при нормальном шуме, подвергшемся нелинейному преобразованию в логарифмическом приемнике; при радиопротиводействии, когда умышленные помехи могут иметь «дефекты», связанные с отклонением их распределений от нормального [206]; при наличии хаотических импульсных помех; при отражениях сигнала от водной поверхности [235], от метеообразований, от земной поверхности [236, 237]; при отражении очень коротких импульсных сигналов от облака дипольных отражателей [235]; в КВ диапазоне из-за влияния турбулентности атмосферы; для сигналов оптического диапазона [96], акустических сигналов и т. д. (см. гл. 5). Так, при отражении радиосигнала от земной поверхности распределение его огибающей хорошо аппроксимируется логарифмически-нормальным законом и законом Вейбулла. Известна модель распределения Накагами (М-распределение) при отражении от наземных объектов. Распределение сигнала, отраженного от водной поверхности, описывается логарифмически-нормальным и составным нормальным законами. Отражение от метеорологических образований (дождя, снега), от ионосферы и прохождение сигналов КВ диапазона через турбулентную атмосферу приводят к логарифмически-нормальному распределению амплитуд.

Помимо того, что реально существуют шумы, распределение которых отлично от нормального, в ряде случаев приходится отказываться от гауссовской модели для шумов, которые традиционно считаются нормальными. Дело в том, что точность аппроксимации нормальным законом реального распределения оказывается на практике достаточно высокой для средней части кривой распределения (плотности вероятности), на «хвостах» же кривой точность быстро убывает по мере удаления от ее средней части.

Специфика некоторых систем обнаружения (например, радиолокационных) такова, что вероятность ложного обнаружения выражается весьма малой величиной 10^{-3}—10^{-12}, не характерной для вероятностей ошибок, с которыми обычно имеет дело математическая статистика. Столь малым вероятностям соответствуют «хвосты» распределения шума, где его нормальная аппроксимация неудовлетворительна.

Применение непараметрической обработки можно считать целесообразным также при нормальном шуме неизвестной интенсивности. Так, в радиолокационных системах изменение мощности шума, коэффициента усиления приемника или порогового уровня на 10—20% приводит к изменению α на несколько порядков [233]. Поддержание стабильности работы приемника или измерение мощности шума поэтому должно производиться с точностью, которую трудно реализовать на практике.

Синтез оптимальных непараметрических алгоритмов обнаружения наталкивается на практически непреодолимые математические трудности. Решить задачу синтеза оптимальных непараметрических правил удается лишь в асимптотическом случае, когда число наблюдений равно бесконечности ($n = \infty$), что соответствует обнаружению бесконечно слабого сигнала. Поэтому известные непараметрические тесты для конечных n получены эвристическим путем.

Теория АО алгоритмов обнаружения, в том числе АО непараметрических, наиболее полно представлена в монографии Б. Р. Левина [1]. Результаты структурного синтеза и анализа представлены также алгоритмами, основанными на статистиках Вилкоксона, Ван-дер-Вардена, знаковых и др., и их характеристиками в асимптотике. К приведенному в [1] обзору литературы остается добавить недавно вышедшую библиографию по непараметрическому обнаружению [234].

Некоторые вопросы синтеза и анализа АО непараметрических обнаружителей рассматриваются также в гл. 7 настоящей монографии.

Значение имеющихся результатов синтеза и анализа АО непараметрических обнаружителей для нужд практики ограничено. Во-первых, для выборок конечного объема, который имеет место в практических задачах, поведение этих обнаружителей неизвестно. Во-вторых, полученные результаты относятся к случаю, когда альтернатива отличается от гипотезы наличием регрессии в сдвиге, т. е. имеет место альтернатива сдвига $F_1(x) = F_0(x - a)$, a — постоянная. В общем случае альтернатива отличается формой распределения, а не только сдвигом. В частности, для некогерентного обнаружения характерны альтернативы вида $F_1(x) < F_0(x)$; $F_1(x) = F_0^{\nu}(x)$, $\nu > 1$; $F_1(x) = 1 - [1 - F_0(x)]^{\mu}$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, и др. Кроме того, реализация вычислительных процедур АО алгоритмов весьма сложна, в то время как в ряде случаев можно воспользоваться значительно более простыми алгоритмами, полученными эвристически, которые по эффективности близки к оптимальным.

Вопросы синтеза и анализа непараметрических процедур последовательного типа, адаптивных непараметрических последовательных алгоритмов и обнаружителей, обладающих свойством непараметричности в коррелированном шуме при конечном числе наблюдений, в периодической литературе освещены весьма слабо и не нашли отражения в монографической литературе.

Настоящая глава посвящена теории и принципам построения непараметрических (в основном ранговых) обнаружителей (РО) для конечного числа наблюдений n и альтернативы общего вида $F_1(x) < F_0(x)$. Рассматриваются непараметрические РО с фиксированным числом наблюдений (Неймана—Пирсона), РО последовательного типа, адаптивные последовательные РО и адаптивные РО, обладающие свойством непараметричности в коррелированной помехе.

Для сравнения двух обнаружителей d_1 и d_2, работающих в одинаковых условиях, пользуются коэффициентом асимптотической относительной эффективности (АОЭ) $E_{1,2}$, равным пределу отношения наименьших чисел наблюдений n_2 и n_1, необходимых соответственно d_2 и d_1 для обеспечения заданных вероятностей D и α при сигнале,

стремящемся к нулю. Ясно, что если d_2 — оптимальный, то $E_{1,2} < 1$, однако при изменении условий d_1 может оказаться более устойчивым, чем d_2, и $E_{1,2} > 1$. Использование коэффициента АОЭ для оценки эффективности теста носит приблизительный характер в том смысле, что высокое значение коэффициента позволяет лишь предположить высокую эффективность обнаружения d_1 при конечном числе испытаний, но не более. Таким образом, использование критерия АОЭ оправдано лишь на предварительном этапе выбора типа обнаружителя. Окончательное суждение об его эффективности можно вынести лишь на основе расчета и анализа его рабочих характеристик.

С позиции теории проверки статистических гипотез задача обнаружения формулируется как проверка гипотезы H_0 о том, что наблюдаемая величина x является только шумом с распределением $F_0(x)$ против альтернативной гипотезы H_1 о том, что эта величина представляет смесь сигнала с шумом с распределением $F_1(x)$.

Предположим, что имеет место альтернатива самого общего вида $F_1(x) \neq F_0(x)$. В этом случае при известном распределении $F_0(x)$ для проверки гипотезы H_0 целесообразно воспользоваться непараметрическими тестами согласия Колмогорова, Реньи, Мизеса и других [1, 171]. Если вид $F_0(x)$ неизвестен, то можно для проверки гипотезы H_0 воспользоваться двухвыборочными вариантами этих правил, в частности тестом Смирнова [1, 171]. Эти тесты состоятельны при любом виде $F_1(x)$, однако требуют большого числа наблюдений и сложны в вычислительном отношении.

Для более «узко специализированных» альтернатив, например альтернатив вида $F_1(x) = F_0(x - a)$, $F_1(x) < F_0(x)$, характерных для задач обнаружения радиосигналов, проще и зачастую эффективнее знаковые и ранговые алгоритмы.

Если при гипотезе H_0 независимые наблюдения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются выборкой шума с нулевой медианой, а при наличии сигнала медиана распределения больше нуля, то возможен знаковый тест, основанный на учете полярностей наблюдений, статистика которого

$$S = \sum_{i=1}^{n} h(x_i), \quad h(x_i) = \begin{cases} 1, & x_i > 0; \\ 0, & x_i < 0, \end{cases} \tag{6.1}*$$

для принятия решения испытывается на порог C.

Когда медиана распределения $F_0(x)$ неизвестна, приходим к двухвыборочному знаковому тесту, основанному на сравнении знаков разностей пар наблюдений исследуемой выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и чисто шумовой $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$S = \sum_{i=1}^{n} h(x_i - y_i), \quad h(x_i - y_i) = \begin{cases} 1, & x_i > y_i; \\ 0, & x_i < y_i. \end{cases} \tag{6.2}$$

---

* Иногда вместо (6.1) рассматривают центрированную статистику

$$T = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn}(x_i), \quad \operatorname{sgn}(x_i) = \frac{x_i}{|x_i|} = \begin{cases} 1, & x_i > 0; \\ -1, & x_i < 0; \end{cases} \quad \operatorname{sgn}(x) = 2h(x) - 1.$$

Нетрудно видеть, что число единиц в суммах (6.1) и (6.2) эквивалентно числу положительных исходов в схеме испытаний Бернулли, поэтому вероятность превышения порога C равна

$$P = (S > C) = \sum_{i=C+1}^{n} C_n^i p^i (1-p)^{n-i},$$

где $p = P(x > y) = \int F_0(x) dF_1(x)$ — вероятность события $x > y$ $(x > 0)$; C_n^i — число сочетаний из n по i.

Для гипотезы H_0 вероятность $p = 1/2$, поэтому вероятность ложного отклонения гипотезы (ложного обнаружения)

$$\alpha = P(S > C \mid H_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{i=C+1}^{n} C_n^i$$

не зависит от $F_0(x)$, что и доказывает непараметричность теста.

Вероятность принятия альтернативы, когда она справедлива (вероятность обнаружения), естественно, зависит от $F_0(x)$ и $F_1(x)$. Соотношение для $P(S > C|H_1)$ определяет рабочую характеристику теста — зависимость вероятности обнаружения D от параметра p, характеризующего меру различия между гипотезой и альтернативой.

АОЭ знакового теста по сравнению с эффективностью линейного накопления при обнаружении постоянного сигнала в нормальном шуме составляет 64%.

Более мощными оказываются ранговые алгоритмы, которые учитывают степень отклонения элементов выборки от некоторого уровня или элементов шумовой выборки y. Напомним, что рангом R_i $(i = 1 - n)$ элемента выборки x_i называется порядковый номер этого элемента в вариационном ряду из элементов x (или x и y), расположенных в порядке возрастания от меньшего к большему. Например, в вариационном ряду *yyxyxxy*... значения рангов отсчетов x равны 3, 5, 6, ... Полагаем, что наличие в выборках равных элементов имеет нулевую вероятность.

Поскольку при справедливости гипотезы для однородной независимой выборки значение рангов какого-либо элемента равновероятно (отсчеты x и y равномерно перемешаны в вариационном ряду), каково бы ни было распределение $F_0(x)$, тест, основанный на любой ранговой статистике $S(\mathbf{R})$ (функции от рангового вектора $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_n)$), оказывается непараметрическим.

Когда справедлива альтернатива $F_1(x) < F_0(x)$, в частности альтернатива сдвига $F_1(x) = F_0(x - a)$, отсчеты x располагаются преимущественно в правой части вариационного ряда, т. е. значения их рангов будут статистически бóльшими, чем при гипотезе. Эти различия в значениях рангов служат мерой, характеризующей степень различия (контраст) между опорной и исследуемой выборками.

Укажем на одно замечательное свойство ранговых статистик — инвариантность их относительно нелинейных монотонных преобразований выборочных значений. Действительно, любое преобразование указанного типа не нарушает порядок расположения отсчетов в вариа-

ционном ряду, а значит, их ранги. Поэтому мощность теста (D) и его значимость (α) остаются такими же, как и до преобразования.

Применение ранговых процедур приводит к потере части информации, однако при увеличении объема наблюдений эти потери уменьшаются и некоторые ранговые алгоритмы оказываются столь же эффективными, что и оптимальные, т. е. асимптотически оптимальными.

Ранговый тест Вилкоксона использует статистику, основанную на сумме рангов, и может применяться для обнаружения постоянного сигнала на фоне шума с нулевым средним и симметричным распределением. Сигнал считается обнаруженным, если

$$S = \sum_{i=1}^{n} R_i^+ > C,$$

где R_i^+ — значение ранга положительного отсчета x_i в вариационном ряду, в котором отсчеты x упорядочены по абсолютной величине; C— некоторый пороговый уровень.

Если функция $F_0(x)$ неизвестна, а известно лишь, что $F_1(x) < F_0(x)$, то приходим к двухвыборочному алгоритму Вилкоксона [107, 171]

$$S = \sum_{i=1}^{n} R_i \lessgtr C, \tag{6.3}$$

где R_i — ранг отсчета x_i в вариационном ряду, составленном из независимых отсчетов опорной (шумовой) выборки $y_1, y_2, \ldots, y_m$ и независимых отсчетов исследуемой $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Здесь хотя распределение шума неизвестно, но известно, что отсчеты y являются шумовыми, поэтому выборка $y_1, y_2, \ldots, y_m$ является обучающей (опорной), а смысл теста сводится к нахождению степени различия — контраста между выборками.

При нормальном шуме АОЭ обнаружителя (6.3) относительно оптимального составляет 95,5% . Это позволяет предположить и высокую эффективность правила для выборок конечного объема.

Известны и другие ранговые тесты [107], однако все они, являясь «специализированными» по отношению к виду альтернатив, более сложны в вычислительном отношении, чем тест Вилкоксона, который хорошо работает при альтернативе более общего вида $F_1(x) < F_0(x)$.

6.2. Обнаружение при фиксированном объеме выборки

Целесообразность применения того или иного непараметрического теста при построении обнаружителя диктуется противоречивыми соображениями. Во-первых, тест должен обладать возможно большей мощностью, т. е. эффективностью обнаружения, которая, как правило, известна лишь в виде коэффициента АОЭ, и, во-вторых, должна быть реальной возможность технического воплощения обнаружителя для работы его в реальном масштабе времени. При этом, естественно, необходимо иметь в виду класс распределений при гипотезе и альтернативе, характерных для данной задачи.

Наиболее просты в практической реализации алгоритмы, основанные на знаковых статистиках. Для вычисления статистики при объеме выборки (числе наблюдений) n они требуют выполнения порядка n операций. В то же время знаковые обнаружители оказываются наименее мощными.

Алгоритмы, основанные на тестах согласия, сложны в вычислительном отношении, поэтому реализация таких обнаружителей, работающих в реальном масштабе времени, затруднительна. Кроме того, их эффективность для альтернатив, характерных для задач обнаружения, оказывается ниже, чем у ранговых обнаружителей.

Асимптотически оптимальные ранговые тесты хотя и являются наиболее эффективными (по крайней мере, в асимптотике, когда $n \to \infty$), но в реализационном отношении весьма сложны.

Ранговые тесты типа Вилкоксона (Манна—Уитни в двухвыборочном варианте) по своей эффективности для значений $n > 15$ незначительно уступают известным параметрическим в условиях, для которых последние оптимальны. Сложность таких ранговых алгоритмов — умеренная. Они требуют выполнения порядка n^2 операций.

Ранговые тесты, статистики которых используют квадратичные функции рангов, рассчитаны на альтернативы масштаба и поэтому не могут быть рекомендованы к применению в задачах обнаружения с альтернативами вида $F_1(x) < F_0(x)$. В связи с этим наибольшее распространение получили ранговые обнаружители, основанные на статистиках вилкоксоновского типа или их модификациях [1, 232, 238—241].

При выборе теста необходимо также рассматривать вопрос о числе входов обнаружителя (одновходовый, двухвходовый). Одновходовые обнаружители, которые используют одну выборку для принятия решения о наличии сигнала в этой выборке, реагируют на изменение симметрии распределения под действием полезного сигнала либо на изменение (тренд) сигнала в процессе наблюдения. Гипотезы симметрии распределения и независимости случайных величин в выборке соответствуют частным случаям задач обнаружения. Так, первая может иметь место лишь при когерентном обнаружении. Проверка второй гипотезы при некогерентном обнаружении не позволяет обнаружить постоянный сигнал. Поскольку используется лишь информация, связанная с изменением сигнала, а не с постоянным уровнем, эффективность таких одновходовых обнаружителей низка.

Двухвыборочные тесты охватывают более общие случаи обнаружения, они нуждаются в меньшем количестве априорных сведений. Объясняется это тем, что здесь используется опорная (шумовая) выборка, которая является фактически «обучающей», т. е. содержащей информацию о гипотезе. При этом признаком наличия сигнала служит «контраст» между опорными и испытуемыми отсчетами. Количественной мерой этого «контраста» и является ранговая статистика.

Рассмотрим двухвходовый РО Неймана—Пирсона [240]. Производится n измерений исследуемого процесса $x_1, x_2, \ldots, x_n$. При каждом i-м измерении из m соседних с испытуемым независимых информационных каналов, занятых только шумом, извлекается шумовая выборка

$y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{im}$, относительно которой вычисляется ранг отсчета x_i. При следующем наблюдении вычисляется ранг отсчета x_{i+1} исследуемого канала относительно m отсчетов новой шумовой выборки y_{i+11}, y_{i+12}, ... и т. д. для всех наблюдений. Далее по результатам определения рангового вектора $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_n)$ вычисляется статистика $S(\mathbf{R})$. Складывая, например, значения рангов, получаем статистику модифицированного теста Вилкоксона

$$S = \sum_{i=1}^{n} R_i. \tag{6.4}$$

Хотя формально запись (6.4) не отличается от записи (6.3), ранг R_i для этих тестов определяется по-разному: в (6.4) ранг отсчета x_i вычисляется относительно i-й, т. е. «своей» опорной выборки.

Нестационарность шума, приводящая к тому, что его выборка может при первом наблюдении оказаться непредставительной для других наблюдений, а также трудности, связанные с запоминанием этой выборки на все время наблюдения, заставляют отказаться от классического правила вычисления ранга и перейти к его модификации, когда опорная выборка обновляется при каждом наблюдении. Кроме того, модифицированный тест, использующий бóльшую информацию о шуме (вследствие обновления помеховой выборки), оказывается и более эффективным.

Введем другую статистику, которая отличается от (6.4) на постоянную величину $0{,}5n\ (n+1)$:

$$S = \sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} h(x_i - y_{ij}), \quad h(x_i - y_{ij}) = \begin{cases} 1, & x_i > y_{ij}, \\ 0, & x_i < y_{ij}, \end{cases} \tag{6.5}$$

где $r_i + 1 = R_i$; $h(x_i - y_{ij})$ — индикатор превышения x_i над y_{ij}.

Аппаратурно удобнее вычислять статистику (6.5), аналитически также удобнее работать с выражением (6.5), отличие которого от (6.4) на постоянную известную величину не имеет принципиального значения.

Шумовые и исследуемую выборки, а также результаты вычисления рангов при каждом наблюдении удобно представить в матричной форме

$$\begin{Vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m} & x_1 \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2m} & x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nm} & x_n \end{Vmatrix} \rightarrow \begin{Vmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{Vmatrix}.$$

Алгоритм обнаружения имеет вид

$$S \gtrless C, \tag{6.6}$$

где при знаке «$>$» принимается гипотеза H_1, а при знаке «$<$» — гипотеза H_0.

Располагая ранговым вектором результатов наблюдения $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$, можно использовать другую функцию от $\mathbf{r}$ в качестве

статистики $S(\mathbf{r})$, не обязательно вилкоксоновского типа. В частности, это может быть статистика, основанная на вычислении отношения правдоподобия рангового вектора.

$$l=\frac{p(\mathbf{r}\mid H_1)}{P(\mathbf{r}\mid H_0)}=\prod_{i=1}^{n}\frac{P(r_i\mid H_1)}{P(r_i\mid H_0)}, \tag{6.7}$$

где $P(r_i/H_0)$, $P(r_i/H_1)$ — вероятности ранга r_i при H_0 и H_1, или статистика, основанная на бинарном квантовании рангов [241]:

$$S=\sum_{i=1}^{n}k_i=K;\ k_i=\begin{cases}1, & r_i>C_1;\\ 0, & r_i\leqslant C_1,\end{cases} \tag{6.8}$$

где C_1 — порог квантования.

Рассмотренная модель соответствует радиолокационному обнаружителю, где в качестве независимых каналов используются каналы дальности (временное разрешение); возможно также использование скоростных доплеровских каналов (разрешение по частоте). В лазерных системах связи и локации, учитывая возможности получения очень узких лучей, для формирования опорной выборки можно использовать также и пространственные каналы (угловое разрешение). Возможно применение этой модели и в гидролокационных системах, связных системах, работающих с большой скважностью или использующих соседние по частоте каналы в качестве шумовых.

На рис. 6.1 приведена схема многоканального радиолокационного некогерентного РО с временным разделением каналов. Обнаружитель состоит из вычислителя рангов (ВР), вычислителя ранговой статистики (ВРС) и решающей схемы — порогового устройства (ПУ). Сигнал $(m+1)$-го канала i-го периода наблюдения x_i, с выхода детектора огибающей (Д) сравнивается в схемах сравнения (СС) с сигналами на выходе устройства запоминания опорной выборки (УЗОВ) $y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{im}$ соседних (предыдущих) m независимых каналов. Результат сравнения x_i с y_{ij} — величина h_{ij}, равная нулю или единице. Количество единиц на выходах СС определяет ранг r_i отсчета x_i. Счетчик инверсий (СИ) выражает это количество двоичным числом. Это число записывается в $(m+1)$-ю ячейку запоминающего устройства (ЗУ), где записаны значения рангов предыдущих периодов наблюдения, соответствующие $(m+1)$-му каналу. По всем накопленным за n наблюдений значениям рангов вычисляется статистика $S(\mathbf{r})$. В частном случае $S=\sum_{i=1}^{n} r_i$ (рис. 6.1, *б*). Статистике (6.8) соответствует ВРС, дополненный квантователем (Кв) (рис. 6.1, *в*).

Применение линии задержки в качестве УЗОВ позволяет осуществить скользящую обработку — вычисление рангов для всех элементов (каналов) разрешения последовательно, так как через интервал дискретизации Δt величина x_i займет место в опорной выборке и вычисление ранга будет уже производиться для $(m+2)$-го канала, и т. д. для всех каналов. Таким образом, по истечении n наблюдений задача обнаружения будет решена для всех каналов.

Если же среди отсчетов y есть сигнальный, то это приводит к искажению (уменьшению) статистики $S = \sum_{i=1}^{n} r_i$ для m последующих каналов, т. е. имеет место подавление одного сигнала другим. Это уменьшение статистики, затрудняющее обнаружение следующего сигнала, составляет в среднем $n/2$ (для сигналов одинаковой интенсивности), т. е. при $m = 20 \div 30$ равно примерно 2%, и им можно пренебречь. Можно и учесть это искажение, увеличив значение статистики (или соответственно уменьшив порог) на $n/2$ после того, как произошло обнаружение, для m последующих элементов разрешения, т. е. на время, пока обнаруженный сигнал включается в шумовую выборку.

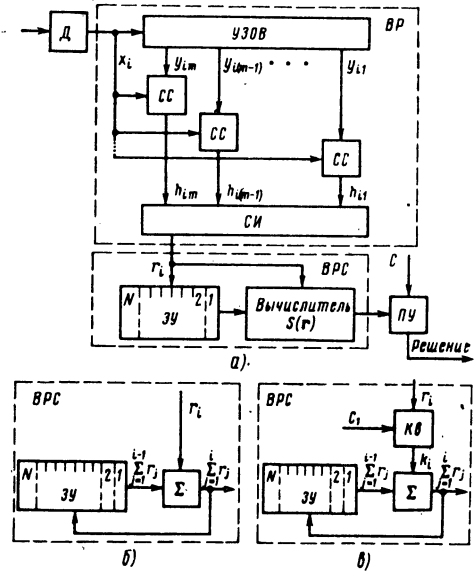


Рис. 6.1. Структурная схема многоканального рангового обнаружителя

Рассмотренный ранговый алгоритм обнаружения предполагает некогерентную обработку, т. е. обработку сигналов после их свертки (если зондирующий сигнал сложный) и детектирования. Поэтому обнаружитель может применяться безотносительно к форме зондирующего сигнала (частотно-модулированного, с фазовой манипуляцией и др.). Влияние боковых лепестков свернутого сигнала в соседних каналах на вычисление ранговой статистики можно избежать, увеличив временной интервал между опорной и исследуемой выборками на один-два элемента разрешения. Таким образом, ограничения принципиального характера по виду зондирующего сигнала для РО отсутствуют.

Для вычисления рабочих характеристик обнаружителя необходимо знать распределения статистики $P(S)$ при гипотезах, которые в свою очередь определяются распределениями рангов. Последние даются соотношениями [1]:

$$P(r \mid H_1) = C_m^r \int F_0^r(x)\,[1 - F_0(x)]^{m-r}\, dF_1(x)\,; \qquad (6.9)$$

$$P(r \mid H_0) = C_m^r \int F_0^r(x)\,[1 - F_0(x)]^{m-r}\, dF_0(x) = \frac{1}{m+1}. \qquad (6.10)$$

Выражение (6.10) показывает, что распределение ранга при гипотезе H_0 от распределения помехи $F_0(x)$ не зависит, что и определяет непараметричность теста.

В соответствии с критерием Неймана—Пирсона вероятность обнаружения D находится из соотношения

$$D = \sum_{C+1}^{S_{\max}} P(S \mid H_1), \tag{6.11}$$

а порог C обнаружения по заданной вероятности ложной тревоги α — как корень уравнения:

$$\alpha = \sum_{C+1}^{S_{\max}} P(S \mid H_0), \tag{6.12}$$

где $S_{\max}$ — максимальное значение статистики.

Распределение статистики Вилкоксона можно считать нормальным при $n \geqslant 4$ и $m + n \geqslant 20$ [171]. Очевидно, что распределение статистики модифицированного теста (6.4) при этих условиях тем более можно считать нормальным. Однако использование нормальной аппроксимации $P(S|H_0)$ для нахождения порога C по заданной α в соответствии с (6.12) не приводит к существенным ошибкам для не очень малых значений α (10^{-1}—10^{-2}). Для значений α, характерных для радиолокационного обнаружения (10^{-3}—10^{-12}), замена истинного усеченного распределения статистики на его «хвостах» нормальным приводит к неверным результатам.

Выражение для распределения статистики (6.5) имеет вид [249]

$$P(S \mid H_0) = \left(\frac{1}{m+1}\right)^n \sum_{k=0}^{\left[\frac{S}{m+1}\right]} (-1)^k C_n^k C_{n+S-km-k-1}^{n-1}, \tag{6.13}$$

где $[\cdot]$ означает целую часть. Точные значения порога по заданным α находятся численным решением (6.12) с учетом (6.13).

Для определения вероятности обнаружения D по найденным значениям C можно воспользоваться нормальной аппроксимацией распределения $P(S|H_1)$, так как значение D (0,5—0,9) соответствует средней части кривой распределения, где качество аппроксимации хорошее, а не ее «хвостам», т. е.

$$D = 1 - \Phi\left[\frac{C - \mathrm{M}[S]}{\sigma}\right], \tag{6.14}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$ — функция нормального распределения;

$\mathrm{M}[S]$, σ^2 — математическое ожидание и дисперсия статистики S.

Можно показать, что $\mathrm{M}[S]$ и σ^2 определяются выражениями [249]

$$\mathrm{M}[S] = mnp; \quad \sigma^2 = mn[p - mp^2 + (m-1)q], \tag{6.15}$$

где

$$p = P(x > y) = \int F_0(x) dF_1(x); \quad q = \int F_0^2(x) dF_1(x).$$

Поскольку в большинстве случаев шум принято считать нормальным, то оценка качества обнаружения необходима в первую очередь именно для этого предположения. Будем полагать, что распределение шума — рэлеевское (нормальное до детектирования) с плотностью

$$W_0(x) = dF_0(x)/dx = x \exp(-x^2/2),\ x \geqslant 0; \qquad (6.16)$$

распределение смеси сигнала с шумом — райсовское (нефлуктуирующий сигнал) с плотностью

$$W_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx} = x \exp\left(-\frac{x^2+2a}{2}\right) I_0(\sqrt{2a}, x),\ x \geqslant 0; \qquad (6.17)$$

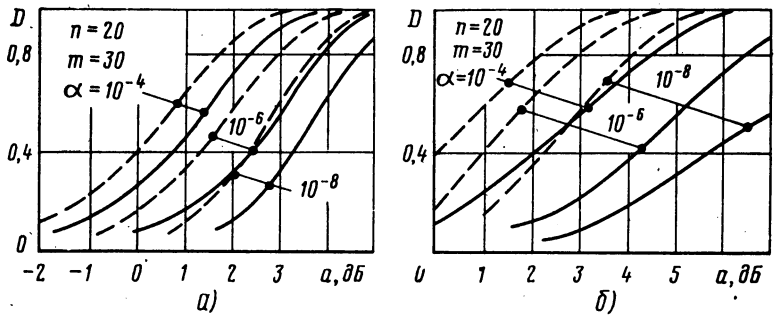


Рис. 6.2. Характеристики обнаружения для нефлуктуирующего (*а*) и флуктуирующего (*б*) сигналов

и смеси быстрофлуктуирующего (от наблюдения к наблюдению) сигнала с шумом — рэлеевское с плотностью

$$W_1(x) = \frac{dF_1}{dx} = \frac{x}{1+a} \exp\left[-\frac{x^2}{2(1+a)}\right],\ x \geqslant 0. \qquad (6.18)$$

В этих выражениях a — отношение сигнал-шум; $I_0(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя.

Можно показать, что АОЭ рассматриваемого обнаружителя по отношению к эффективности накопителя квадратов отсчетов огибающей, являющемуся оптимальным в данных условиях при малом отношении сигнал-шум, составляет 75% для флуктуирующего и нефлуктуирующего сигналов [239]. Принимая во внимание, что при некогерентном накоплении энергия растет как $\sqrt{n}$ [233], РО проигрывает оптимальному обнаружителю в пороговом отношении сигнал-шум при больших n в $\Pi_\infty = (0{,}75)^{-0{,}5}$ раз (или 0,6 дБ).

На рис. 6.2 приведены примеры рассчитанных характеристик обнаружения для нефлуктуирующего и флуктуирующего сигналов. Штриховой линией для сравнения показаны характеристики классического обнаружителя Неймана — Пирсона. Полученные результаты свидетельствуют о том, что рассмотренный РО проигрывает классическому в пороговом отношении сигнал-шум. Этот проигрыш зависит

от числа наблюдений n, размера опорной (шумовой) выборки m и вероятности α.

На рис. 6.3 приведены зависимости проигрыша $П$ в пороговом отношении сигнал-шум (по уровню $D = 0{,}5$) от числа наблюдений n для различных значений α (сплошными линиями для нефлуктуирующего сигнала, штриховыми — для флуктуирующего). Для нефлуктуирующего сигнала можно считать, что при $n \geqslant 15 \div 20$ ($m = 20$) обеспечивается проигрыш, не превышающий 1 дБ, т. е. близкий к асимптотическому значению 0,6 дБ. При флуктуирующем сигнале проигрыш при $n \geqslant 15$ ($m = 30$) составляет 1,5—2,5 дБ. Зависимость проигрыша от n практически перестает ощущаться при $n > 20$ для нефлуктуирующего сигнала и при $n > 40$ для флуктуирующего.

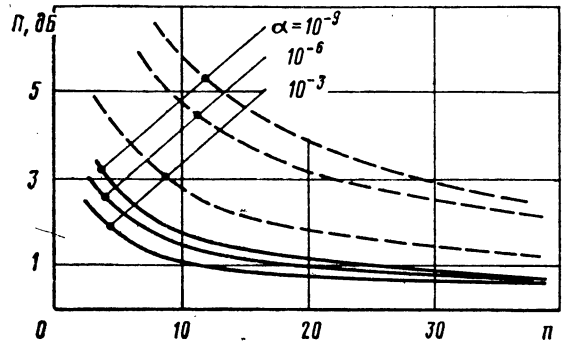


Рис. 6.3. Зависимость проигрыша в пороговом отношении сигнал-шум $П$ от числа испытаний n

Потеря эффективности РО при малом n объясняется ограниченностью значения ранга и ранговой статистики. Значение ранга при $m = 20$ не может быть больше 20, а ранговой статистики — больше 20 m. Поэтому при большом отношении сигнал-шум, а это как раз соответствует малому n, как бы велико ни было значение отсчета x, значение ранга не превышает m. Вследствие ограниченности значения ранга происходит потеря информации, тем бóльшая, чем больше отношение a (меньше n). Этим же объясняются и бóльшие потери при флуктуирующем сигнале.

С увеличением размера опорной выборки эффективность алгоритма увеличивается. Однако увеличение m сверх 30 ($n > 10$) уже практически не приводит к уменьшению проигрыша, это позволяет рекомендовать для практики $m = 20 \div 30$.

Ухудшение эффективности обнаружителя с уменьшением α также объясняется усеченностью ранговой статистики. Действительно, чем меньше α, тем ближе значение порога C к максимальному значению mn, и, следовательно, обнаружение происходит тогда, когда наблюдаются сильные сигналы, т. е. когда сильнее всего сказывается эффект ограниченности ранга. В связи со сказанным при малых n (< 10), малых

α ($< 10^{-6}$) и флуктуирующем сигнале целесообразно увеличивать m сверх 20.

Таким образом, из приведенных данных можно сделать вывод, что, РО при малых и умеренных значениях отношения сигнал-шум (соответствующих $n \geqslant 10 \div 15$) незначительно уступает классическому при некогерентном обнаружении стационарного (нефлуктуирующего) сигнала в гауссовских помехах. При флуктуирующем сигнале потери РО уже необходимо учитывать. При больших отношениях сигнал-шум (соответствующих $n < 5$) потери возрастают настолько, что применение РО становится нецелесообразным.

Следует подчеркнуть, что сравнение РО производилось с идеальным классическим, аппаратурная реализация которого приводит к ухудшению его характеристик по пороговому отношению сигнал-шум на 1,5—2,0 дБ и более. Здесь имеются в виду неравномерность суммирования накопительного устройства аналогового типа, нестабильность порогового уровня и коэффициента усиления приемника, «запас» по пороговому уровню, наличие нелинейностей в приемном тракте и пр. При ранговом обнаружении такого рода дополнительных потерь не происходит. Заметим также, что применение квадратичного детектирования (вместо линейного), выделяющего квадрат огибающей, не изменяет результатов расчета характеристик РО, поскольку любые монотонные преобразования огибающей не изменяют ранговых соотношений между отсчетами.

Для обнаружителя, основанного на бинарном квантовании рангов, статистика (6.8), т. е. величина, определяемая числом K превышений значениями рангов порога квантования C_1, распределена по биномиальному закону

$$P(K \mid H_i) = C_n^K p_i^K (1-p_i)^{n-K}, \; i = 0; \; 1, \tag{6.19}$$

где i — индекс гипотезы.

Вероятность $p_0 = P(r > C_1 | H_0)$ от распределения шума не зависит и равна

$$p_0 = (m - C_1)/(m+1). \tag{6.20}$$

Вероятность $p_1 = P(r > C_1 | H_1)$ определяется как

$$p_1 = \sum_{r=C_1+1}^{m} P(r \mid H_1). \tag{6.21}$$

Для распределений (6.17) и (6.18) выражения для $P(r|H_1)$ можно найти в явном виде. Они равны соответственно [252]:

$$P(r \mid H_1) = P(r \mid a) = \exp(-a) C_m^r \sum_{i=0}^{r} (-1)^i C_m^i \frac{1}{m-r+i+1} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{a}{m-r+i+1}\right); \tag{6.22}$$

$$P(r \mid a) = \frac{\mu}{m+1} \prod_{i=0}^{r} \left(1 - \frac{\mu - 1}{m - r + \mu + i}\right), \quad \mu = \frac{1}{1+a}. \tag{6.23}$$

В соответствии с критерием Неймана—Пирсона вероятность обнаружения D находится из соотношения

$$D = \sum_{K=C+1}^{n} P(K \mid H_1), \tag{6.24}$$

а порог обнаружения C по заданной вероятности α — как корень уравнения:

$$\alpha = \sum_{K=C+1}^{n} P(K \mid H_0). \tag{6.25}$$

Результаты расчета характеристик обнаружения с использованием соотношений (6.19)—(6.25) свидетельствуют, что при переходе к бинарному квантованию рангов проигрыш по сравнению с обнаружением, основанным на сумме рангов, не более 0,5 дБ при $n > 10$ [241]. Для флуктуирующего сигнала бинарный обнаружитель оказывается даже эффективнее. Выигрыш его колеблется в пределах 0,2—0,7 дБ. Оптимальное значение порога квантования C для широкого диапазона отношения a составляет $C_{1\,\mathrm{opt}} = 16 \div 18$.

Перспективным следует считать применение непараметрической обработки в задачах обнаружения в тех устройствах, где сигнал подвергается нелинейному преобразованию, например в логарифмическом приемнике. Распределение шума, подвергшегося такому преобразованию, изменяется, поэтому накопитель, традиционно применяемый на выходе приемника, осуществляет при гауссовском шуме уже неоптимальную обработку. Расчеты показывают [242], что в этом случае проигрыш по сравнению с обнаружением с линейной амплитудной характеристикой приемника при $n = 20$, $\alpha = 10^{-3}$ для моделей шума и сигнала (6.16) и (6.17) равен примерно 2 дБ. Кроме того, задача стабилизации α при логарифмическом усилении значительно усложняется, так как изменение коэффициента усиления или порога на несколько процентов приводит к изменению α на несколько порядков.

Использование ранговой обработки автоматически решает задачу стабилизации α и обеспечивает характеристики обнаружения такие же, как и при линейном усилителе. Происходит это потому, что любое монотонное преобразование сигналов не изменяет соотношений между ними (ранговых), а следовательно, не влияет на качество обнаружения. Таким образом, сочетание ранговой обработки с логарифмическим усилением позволяет увеличить динамический диапазон приемника практически без ухудшения качества обнаружения и решает задачу стабилизации вероятности α.

Хаотическая импульсная помеха (ХИП) является, как известно, одной из наиболее распространенных [206]; она может возникать в приемном устройстве из-за воздействия сигналов соседних радиоэлектронных устройств.

Ранговый обнаружитель сохраняет свойство непараметричности и в присутствии ХИП. Независимость распределения ранга от наличия помехи и значений ее параметров может быть доказана аналитически при достаточно общих предположениях относительно ХИП, шума и сигнала, действующих в системе [243].

Методика расчета характеристик обнаружения остается прежней. Наличие ХИП, естественно, ухудшает обнаруживаемость сигнала (уменьшает D), что формально обусловлено изменением $M[S|H_1]$ и $\sigma^2[S|H_1]$ вследствие наличия ХИП.

Вообще непараметричность РО сохраняется при всякой нестационарной несинхронной с периодом наблюдения помехой, частным случаем которой является ХИП. Качество обнаружения при этом определяется средним значением отношения сигнал-шум (сигнал-помеха).

Как указывалось, ранговый алгоритм обнаружения сигнала на фоне рэлеевского шума незначительно уступает по эффективности оптимальному при малых и умеренных отношениях сигнал-шум. В то же время при изменении вида функции распределения шума ранговая процедура может оказаться значительно эффективнее классической, оптимальной при рэлеевском (нормальном до детектирования) шуме.

Хотя большинство авторов указывают на свойство устойчивости непараметрических тестов, данные об их эффективности для выборок конечного объема при шумах, отличных от нормального, практически отсутствуют.

Примем за меру устойчивости обнаружителей, удовлетворяющих требованию $\alpha = \text{const}$, изменение вероятности D (или эквивалентное приращение порогового отношения a) при изменении распределения шума постоянной (единичной) мощности.

Используя соотношения, приведенные в [244], можно показать, что мощность любого (а не только нормального) узкополосного стационарного случайного процесса равна половине мощности его огибающей. В связи с этим мощность огибающей шума (второй начальный момент) M_2 полагаем равной двум при следующих законах распределения:

1) Вейбулла (В) $F_0(x) = 1 - \exp\left\{-\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\theta}\right)\frac{1}{2}\right]^{\theta/2}x^{\theta}\right\}$, $x > 0$;

2) Рэлея (Р) $F_0(x) = 1 - \exp(-x^2/2)$, $x \geqslant 0$;

3) экспоненциальном (Э) $F_0(x) = 1 - \exp(-x)$, $x \geqslant 0$;

4) гамма (Г) $F_0(x) = \dfrac{\Gamma(\theta+1,\ x\sqrt{(\theta+1)(\theta+2)/2})}{\Gamma(\theta+1)}$, $x > 0$; (6.26)

5) логарифмически-нормальном (Л) $F_0(x) = \Phi[(\ln x - \frac{1}{2}\ln 2 + \theta^2)/\theta]$, $x > 0$;

6) Накагами (М-распределение) (Н) $F_0(x) = \dfrac{\Gamma(\theta, \theta x^2/2)}{\Gamma(\theta)}$, $x \geqslant 0$;

7) инверсном (И) $F_0(x) = 1 - (1 + x/\sqrt{2})^{-3}$, $x \geqslant 0$,

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция; $\Gamma(\cdot, \cdot)$ — неполная гамма функция. Нормировка $M_2[x] = 2$ приводит к записи (6.26) в однопараметрической форме.

Поскольку при наличии сигнала обычно меняется вид функции распределения огибающей, общепринятые в математической статистике альтернативы сдвига или масштаба неприменимы. Можно показать, что распределение $F_1(x)$ огибающей векторной суммы сигнала с амплитудой U и шума описывается соотношением [245]

$$F_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{|U-x|}^{U+x} \arccos\left(\frac{y^2+U^2-x^2}{2Uy}\right) dF_0(y) + F_0(t-U). \quad (6.27)$$

С помощью (6.27) для каждого $F_0(x)$ (6.26) можно определить параметры (6.15) распределения статистики (6.5) при альтернативе для расчета характеристик обнаружения. Для классического обнаружителя, работающего по сумме квадратов отсчетов огибающей (оптимального при слабом сигнале и гауссовой помехе), определение порогового уровня по заданной вероятности α производится с использованием представления функции распределения $S = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ рядом Эджворта. При определении D используется нормальная аппроксимация.

Результаты расчетов показывают, что в большинстве случаев РО оказывается более эффективным, т. е. более устойчивым, чем оптимальный в рэлеевском шуме. Только для некоторых частных случаев наблюдается незначительное ухудшение эффективности. Зависимости потерь РО (сплошная кривая) и накопителя квадратов отсчетов (штриховая линия, работающих при наличии различных шумов, относительно накопителя, оптимального для рэлеевского шума, от отношения M^2/M_2 (M — математическое ожидание $F_0(x)$), приведены на рис. 6.4. Сплошная кривая построена для распределения Вейбулла. Расчетные потери для других распределений шума на рис. 6.4 обозначены точками и заглавными буквами, соответствующими названию вида шума. Они практически совпадают с потерями при вейбулловском шуме и одинаковых значениях отношения M^2/M_2.

Из рис. 6.4 видно также, что эффективность РО выше эффективности накопителя, работающего в тех же условиях, при $M^2/M_2 \leqslant 0{,}75$. И только в вырожденном случае $M^2/M_2 \approx 1$ (плотность распределения шума близка к δ-фунуции) его эффективность существенно ниже.

Таким образом, РО оказывается более устойчивым к изменению помеховой обстановки в том смысле, что его характеристики изменяются слабо при изменении вида шума.

Необходимо подчеркнуть, что сравнение РО проводилось с обнаружителем, обеспечивающим заданную вероятность α, т. е. с параметрическим, адаптивным по пороговому уровню. Однако при неизвестном априори распределении шума неизвестен и способ адаптации по α. Дисперсия шума, как известно, является однозначной его характеристикой, по которой может быть установлен порог обнаружения по заданной α, только если шум гауссовский. При негауссовском шуме знание только дисперсии принципиально недостаточно для правильной установки порога. Поскольку такой адаптивный параметрический обнаружитель является своего рода абстракцией, то результаты сравнения с ним реально осуществимого рангового дают лишь потенциально до-

стижимые, т. е. максимально возможные значения проигрыша и минимально возможные значения выигрыша непараметрического теста. В практической ситуации РО окажется еще более эффективным.

При приеме слабого оптического сигнала распределение числа фотоэлектронов на выходе фоточувствительного элемента энергетического приемника аппроксимируется различными законами, отличными от нормального: законом Пуассона, Бозе—Эйнштейна, отрицательно-биномиальным [96]. Вообще для задачи обнаружения в оптическом диапазоне характерным является то, что обнаружение ведется в условиях априорной неопределенности, когда отсутствуют сведения о статистических распределениях сигналов и шумов и имеется сильная за-

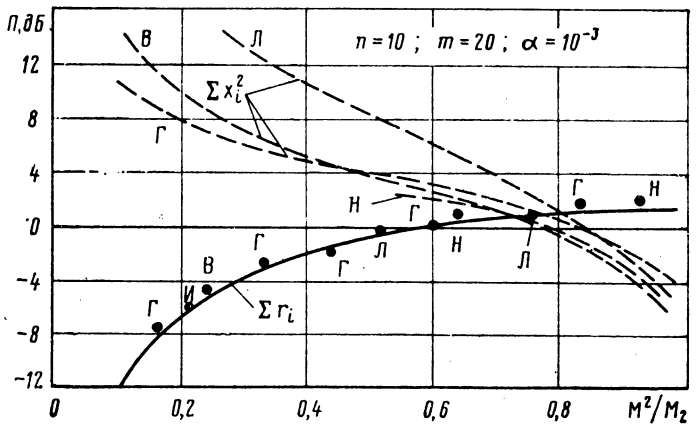


Рис. 6.4. Зависимость проигрыша $П$ РО и накопителя квадратов отсчетов относительно накопителя, оптимального для рэлеевского шума, от отношения M^2/M_2

висимость этих распределений от различных факторов (турбулентности атмосферы, помеховой обстановки, метеорологических условий, времени года, суток и т. д.), точный учет которых не представляется возможным. В этих условиях качество обнаружения может существенно отличаться от расчетного.

Применение непараметрической процедуры обнаружения может значительно повысить надежность обнаружения.

Рассмотренный алгоритм обнаружения можно применять для оптического диапазона [246]. Отсчет x_i представляет в этом случае число фотоэлектронов, эмиттируемых в испытуемом канале, отсчеты y — число фотоэлектронов опорных каналов. В качестве опорных каналов могут быть использованы пространственные каналы, образованные, например, с помощью мозаичного приемника, формирующего многолепестковую диаграмму направленности с весьма узкой шириной парциальных диаграмм. При этом задачу обнаружения сигнала на выходе одного из приемных каналов можно решать с использованием для формирования ранговой статистики сигналов других каналов приемника.

Результаты расчета характеристик РО (по приведенной выше методике) и накопителя числа фотоэлектронов свидетельствует, что РО

для числа наблюдений $n > 10$ в некоторых случаях проигрывает накопителю, в некоторых выигрывает. Величина проигрыша (выигрыша) колеблется в пределах ± 3 дБ в зависимости от вида распределения и его параметров [247]. При мультипликативной логарифмически-нормальной помехе (за счет турбулентности атмосферы) РО оказывается более устойчивым, чем накопитель фотоэлектронов. При средней и сильной турбулентности РО выигрывает 2—3 дБ [248].

6.3. Ранговое последовательное обнаружение

Задача сочетания ранговой обработки с последовательным правилом принятия решения представляет интерес с точки зрения известных преимуществ последовательного анализа и непараметрических свойств ранговой статистики.

В соответствии с теорией А. Вальда [149] оптимальный в пространстве ранговых статистик обнаружитель должен вычислять на каждом n-м шаге наблюдений отношение правдоподобия рангового вектора независимых наблюдений

$$l(\mathbf{r}) = \frac{P(\mathbf{r} \mid H_1)}{P(\mathbf{r} \mid H_0)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{P(r_i \mid H_1)}{P(r_i \mid H_0)} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad (6.28)$$

и сравнивать его с верхним $A = D_1/\alpha$ и нижним $B = (1 - D_1)/(1 - \alpha)$ порогами. Если $l \geqslant A$, выносится решение о наличии сигнала (H_1), если $l \leqslant B$ — об его отсутствии (H_0), если $B < l < A$, решение откладывается до следующего $(n + 1)$-го шага. Оптимальность здесь понимается в смысле минимума среднего числа наблюдений $\bar{n}$, необходимых для принятия решения с заданными вероятностями ошибок α и $1 - D_1$.

Специфика ранговой обработки состоит в том, что при справедливости гипотезы H_0 распределение ранга не зависит от вида и параметров распределения шума, т. е. функция правдоподобия $P(\mathbf{r}|H_0)$ инвариантна по отношению к шуму. Это эквивалентно тому, что при переходе от выборочного пространства в ранговое происходит переход от сложной гипотезы H_0 к простой. Следовательно, независимо от свойств шума при отсутствии полезного сигнала (воздействии только шума) значения рангов статистически одинаковы, а поэтому и результат вычисления отношения правдоподобия не зависит от шума. Это приводит к тому, что как среднее время, затрачиваемое на принятие правильного решения от отсутствия сигнала (принятие гипотезы H_0, когда она действительно имеет место), так и реализуемая вероятность ложного обнаружения остаются постоянными независимо от свойств шума.

Таким образом, свойство непараметричности применительно к последовательному РО интерпретируется как постоянство вероятности ложной тревоги и постоянство (в среднем) времени принятия решения в каналах, занятых только шумом. Если число таких каналов намного больше числа каналов, занятых сигналом, то можно считать, что стабилизируется время принятия решения по всем каналам независимо от помеховой обстановки.

Естественно, что отсутствие полной информации относительно действующих распределений создает трудности в правильном вычислении отношения правдоподобия — определении оптимального последовательного правила. При использовании непараметрических тестов, менее чувствительных к статистическим характеристикам входных данных, можно в той или иной степени пренебречь неточностями в вычислении отношения правдоподобия, т. е. построить подоптимальные непараметрические процедуры. Здесь имеется в виду не только устойчивость непараметрических тестов, но и снижение степени неопределенности в вычислении отношения правдоподобия (т. е. снижение размерности задачи) вследствие редукции сложной гипотезы к простой при использовании непараметрической обработки.

Иллюстрацией к сказанному является, например, тот факт, что применение последовательного знакового теста при обнаружении положительного (или отрицательного) сигнала основано лишь на предположении о симметрии плотности распределения шума [250]. Вычисление отношения правдоподобия в этом случае возможно с точностью до параметра независимо от вида плотности распределения шума, лишь бы она была симметричной.

Последовательное обнаружение сигналов в информационных системах целесообразно тогда, когда имеется возможность регулирования числа наблюдений, энергии и других показателей в зависимости от текущих результатов наблюдений. Так, в системе связи с переспросом при применении последовательного правила принятия решения может быть уменьшено (в среднем) число повторных трансляций сигнала и за счет этого увеличена пропускная способность. В радиолокационной системе с электронным сканированием возможно автоматическое регулирование числа зондирований (числа импульсов) по различным направлениям пространства обзора (см. гл. 4), что приводит в конечном итоге к снижению времени обзора.

Рассмотрим возможные способы построения последовательных РО.

Поскольку в большинстве случаев шум следует считать нормальным, можно вычисление l производить именно в предположении нормальности шума. При отклонении распределения от предполагаемого качество обнаружения (D и $\bar{n}$) такого «настроенного» на нормальный шум обнаружителя изменится в силу устойчивости ранговой процедуры незначительно [256], а вероятность α вообще не изменится.

Используя (6.10), (6.22), (6.23), для (6.28) имеем [252]:

$$l=(m+1)^n \exp(-an) \prod_{i=1}^{n} C_m^{r_i} \sum_{j=0}^{r_i} (-1)^j C_{r_i}^j \frac{1}{m-r_i+j+1} \times \times \exp\left(\frac{a}{m-r_i+j+1}\right); \qquad (6.29)$$

$$l=\mu^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{r_i} \left(1-\frac{\mu-1}{m-r_i+\mu+j}\right), \quad \mu=\frac{1}{1+a}. \qquad (6.30)$$

Показатели качества обнаружения — оперативная характеристика $L(a)$ и среднее число наблюдений $\bar{n}$. Оперативная характеристика $L(a)$ есть вероятность принятия гипотезы H_0 при наличии сигнала, она определяется соотношением [149]

$$L(a) = (A^{h(a)} - 1)/(A^{h(a)} - B^{h(a)}), \tag{6.31}$$

где $h(a)$ — корень трансцендентного уравнения

$$\sum_r \left[\frac{P(r \mid a_1)}{P(r \mid 0)}\right]^{h(a)} P(r \mid a) = 1; \tag{6.32}$$

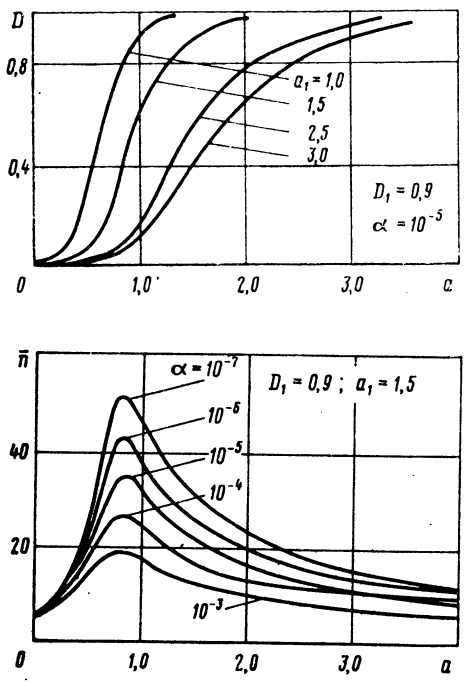


Рис. 6.5. Зависимость вероятности правильного обнаружения D и среднего числа наблюдений $\bar{n}$ от отношения сигнал-шум для РО

a_1 — расчетное (ожидаемое) отношение сигнал-шум.

Среднее число наблюдений определяется как [149]

$$M[n] = \bar{n} = [\ln A[1 - L(a)] + \ln BL(a)]/M\left[\ln \frac{P(r \mid a_1)}{P(r \mid 0)}\right]. \tag{6.33}$$

На рис. 6.5 в качестве примеров приведены зависимости $D(a) = 1 - L(a)$ и $\bar{n}(a)$, рассчитанные по приведенным формулам для нефлуктуирующего сигнала. Сравнение характеристик обнаружителя, полученных расчетным путем и моделированием, с характеристиками оптимального обнаружителя, накапливающего отношение правдоподобия отсчетов сигнала (см. гл. 4), показало, что в рэлеевском шуме РО проигрывает оптимальному в среднем числе наблюдений около 15% при расчетном отношении сигнал-шум $a_1 \leqslant 1$. При справедливости гипотезы H_0 проигрыш составляет 8—10%. Вероятности α и D оптимального обнаружителя поддерживаются на расчетных уровнях.

Возможно построение непараметрического последовательного правила, если справедлива аппроксимация функционального соотношения между $F_0(x)$ и $F_1(x)$ так называемыми альтернативами Лемана $F_1(x) = F_0^{\nu}(x)$, $\nu > 1$ [151]. В этом случае удается сравнительно просто рассчитать l [251, 252]:

$$l = \nu^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{m-r_i} \left(1 - \frac{\nu - 1}{r_i + \nu + j}\right).$$

Можно показать, что для (6.16) и (6.17) аппроксимация $F_1(x) = F_0^{\nu}(x)$ с удовлетворительной точностью выполняется при отношениях сигнал-шум $a \leqslant 0{,}5$ [251].

Другая аппроксимация $F_1(x) = 1 - [1 - F_0(x)]^{\mu}$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, дает лучшие результаты (при $a \leqslant 1$) и оказывается точной при флуктуирующем сигнале, т. е. для (6.18), а выражение для l совпадает с (6.30). Такой подход, по-видимому, может оказаться плодотворным не столько из-за упрощения техники вычислений l, сколько из-за того, что по утверждению К. Фу ([151], с. 125) «альтернативы Лемана отражают типичные отклонения, обычно преобладающие во многих распределениях вероятностей...». На наш взгляд, «универсальность» альтернатив Лемана применительно к ранговым тестам, о которой говорит К. Фу , объясняется не только качеством аппроксимаций соотношений между $F_0(x)$ и $F_1(x)$, но и в значительной степени свойством устойчивости тестов.

Расчеты характеристик могут быть проведены аналогично с использованием соотношений (6.29)—(6.33).

При применении ранговой бинарной процедуры последовательного обнаружения удается с учетом (6.19) сравнительно просто вычислить логарифм отношения правдоподобия для вектора $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$— результатов бинарного квантования рангов [254]:

$$\log l = \log \frac{P(\mathbf{k} \mid H_1)}{P(\mathbf{k} \mid H_0)} = \sum_{i=1}^{n} \left[k_i \log \frac{p_1}{p_0} + (1 - k_i) \log \frac{1 - p_1}{1 - p_0} \right]. \quad (6.34)$$

Как видно из (6.34), вид распределения статистики теста (составное биномиальное) от распределений $F_0(x)$ и $F_1(x)$ не зависит. «Расстояние» между гипотезой и альтернативой определяется лишь одним параметром p_1 [см. (6.21)]. Таким образом, неопределенность относительно вида $F_0(x)$ и $F_1(x)$ при применении ранговой бинарной процедуры (6.34) сводится к неопределенности относительно одного параметра.

Результаты расчета и моделирования показывают, что такой обнаружитель уступает оптимальному ранговому (6.28) в среднем числе наблюдений $\bar{n}$ в условиях гауссовского шума при некогерентном обнаружении (порядка 20% при H_1 и $a \leqslant 1$ и порядка 5—10% при H_0).

Как указывалось, обнаружители, использующие ранговые статистики, обладают свойством непараметричности по отношению к хаотической импульсной помехе. Это свойство, естественно, обобщается на ранговые последовательные процедуры, а параметры ХИП могут быть учтены при расчете характеристик [255].

По поводу сравнения РО с классическим обнаружителем, накапливающим отношение правдоподобия отсчетов $l(x_i)$, в условиях ХИП можно констатировать следующее. Амплитуда импульса ХИП обычно намного превышает уровень шума и полезного сигнала. Поэтому появление одного-двух импульсов ХИП в каком-либо канале приводит к резкому увеличению статистики $l(x_i)$ и, как следствие этого, к ложному обнаружению в этом канале за 1—2 периода наблюдения. Вероятность α практически совпадает с вероятностью появления импульса ХИП или близка к ней.

Аналогично обстоит дело с обнаружителем Неймана—Пирсона, основанным на линейном накопителе. У РО (непоследовательного и последовательного) в силу свойства непараметричности вероятность α не зависит от наличия ХИП и ее параметров. Кроме того, качество обнаружения при появлении ХИП изменяется слабо.

Поскольку критерием оптимальности при последовательном анализе, обеспечивающем заданные α и D_1 является минимум среднего числа наблюдений $\bar{n}$, то естественно за меру устойчивости процедуры принять приращение этого числа при изменении условий приема, т. е. при изменении помеховой ситуации. Однако одновременно с изменением $\bar{n}$ изменяется и вероятность D, потому что вычисляемое отношение правдоподобия, уже не соответствует новым условиям. Вероятность α, так же как и $\bar{n}$, при гипотезе H_0 в силу свойства непараметричности остается постоянной при любом шуме. В связи с тем, что в общем случае затруднительно установить зависимости между $\bar{n}$ и D, устойчивость последовательной ранговой процедуры будем характеризовать совокупностью двух показателей: приращениями $\bar{n}$ и D [256].

Полагая, что РО при вычислении l «настроен» на рэлеевский шум (6.16) и райсовскую смесь сигнала с шумом (6.17) и пользуясь формулами (6.31)—(6.33), можно рассчитать характеристики обнаружения в условиях воздействия шумов, отличных от рэлеевского. Результаты расчета характеристик для распределений (6.26) (кроме распределения 5) свидетельствуют, что надежность обнаружения при изменении вида помехи меняется слабо и, как правило, увеличивается. Увеличение $\bar{n}$ для помехи с распределениями 4 и 6 незначительно — не более 30%. Для других законов $\bar{n}$ оказывается существенно меньшим (в 2—3 раза).

Таким образом, изменение вида шума приводит либо к незначительному увеличению $\bar{n}$ РО, либо к его уменьшению, иногда значительному, при вероятности D, как правило, выше расчетной.

Иначе обстоит дело с изменением характеристик последовательного обнаружителя, накапливающего отношение правдоподобия отсчетов $l(x)$ и рассчитанного на рэлеевский шум. По данным статистического моделирования, характеристики обнаружителя, оптимального к рэлеевскому шуму, при воздействии шума с распределением Вейбулла оказываются неудовлетворительными по D и α. Так, вероятность D изменяется от 0,1 до 1 при изменении параметра θ распределения 1 (6.26) от 0,5 до 4,0. Вероятность α при этом изменяется на 9—10 порядков.

Известно, что применение последовательного критерия Вальда для многоканального обнаружения с независимым принятием решений в каналах с ростом их числа становится все менее выгодным по сравнению с критерием Неймана—Пирсона [152]. Это привело к разработке ряда модификаций последовательной процедуры, касающихся как изменения правила прекращения наблюдений, так и способа вычисления решающей статистики.

Простейшим способом недопущения затяжек последовательного анализа является переход к усеченному последовательному правилу при котором на некотором шаге n_0 оба порога заменяются одним, что приводит к принятию решения на этом шаге или до него. В ряде работ исследуются случаи применения сближающихся порогов.

В [257] предложена усеченная ранговая последовательная процедура многоканального обнаружения. Распределение ранговой статистики является дискретным и усеченным. Это свойство решающей статистики принимать конечное число дискретных значений может быть использовано для построения усеченного по числу шагов последовательного обнаружителя. Такой обнаружитель, реализуя заданные вероятности ошибок, обладает меньшей средней длительностью процедуры, чем соответствующий ему (по вероятностям ошибок) однопороговый обнаружитель с фиксированным значением числа наблюдений n_0 при любом числе каналов N.

Рассмотрим ранговую процедуру Неймана—Пирсона, основанную на статистике $S_n = \sum_{i=1}^{n} r_i$. Ограниченность снизу и сверху значений, которые может принимать ранг ($r_i = 0 \div m$), а следовательно, и статистика S_n, приводит к тому , что для некоторых значений S_n уже на n-м шаге ($n < n_0$) можно вынести решение независимо от результатов последующих шагов, т. е. на n-м шаге в этом случае значение S_n может оказаться либо настолько малым, что можно гарантировать непревышение статистикой S_{n_0} порога C даже, если за оставшиеся $n_0 - n$ шагов случайная величина r будет принимать максимальные значения, либо может произойти превышение порога C значением S_n, и необходимость в дальнейших наблюдениях также отпадает.

С учетом сказанного последовательная усеченная процедура определяется следующим правилом: на n-м шаге испытаний принимается гипотеза H_0, если $S_n = \sum_{i=1}^{n} r_i < C - m(n_0 - n)$, и альтернатива H_1, если $S_n \geqslant C$; в противном случае испытания продолжаются.

Таким образом, предполагается наличие двух порогов: верхнего — постоянного и нижнего — переменного. По мере роста n пороги сближаются и на n_0-м шаге наблюдений оказываются равными, т. е. двухпороговый последовательный обнаружитель при усечении переходит в однопороговый Неймана—Пирсона.

Рисунок 6.6 иллюстрирует описанное правило обнаружения. Характерные точки графика n' и n'' определяются из соотношений $n''m = C$, $m(n_0 - n') = C + 1$, $n' < n''$. Распределение длительности процедуры можно найти прямым расчетом с использованием методики, изложенной в [161], и специфики ранговой обработки, в частности изменяющихся порогов и дискретности распределений статистики [257, 258].

Результаты расчета зависимости среднего числа испытаний для усеченного последовательного обнаружителя от числа анализируемых каналов N представлена на рис. 6.7 (кривые *1*, *2*). Там же для сравнения показана зависимость $\bar{n}$ для неусеченного последовательного рангово-

го теста (6.32) (кривая *3*). Значениям $\alpha = 10^{-5} \div 10^{-7}$, $D_1 = 0{,}5$ и $a_1 = 2$, для которых построены зависимости, соответствует обнаружитель Неймана—Пирсона при $n_0 = 15$ ($\alpha = 10^{-5}$) и $n_0 = 20$ ($\alpha = 10^{-7}$).

Из рис. 6.7 видно, что при числе каналов $N > 10$ последовательный неусеченный обнаружитель требует уже большего числа наблюдений,

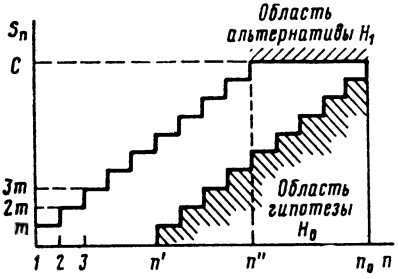


Рис. 6.6. К иллюстрации рангового усеченного последовательного правила обнаружения

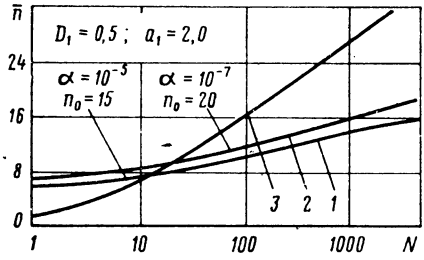


Рис. 6.7. Зависимость среднего числа наблюдений $\bar{n}$ от числа каналов N для усеченного РО

чем усеченный. Выигрыш усеченного обнаружителя по сравнению с неусеченным при больших N объясняется тем, что дисперсия числа испытаний при одноканальной процедуре в первом случае существенно меньше, чем во втором, хотя для математических ожиданий справедливо обратное соотношение. Благодаря большой дисперсии длительности наблюдения при неусеченном анализе может оказаться, что решение в каком-либо канале значительно задерживается по сравнению с другими каналами, что и определяет общую большую длительность.

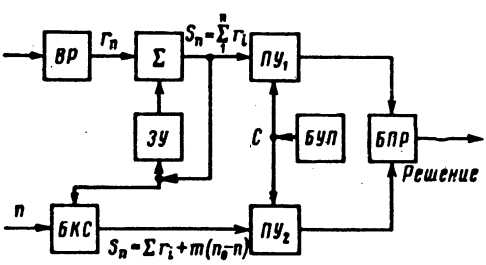


Рис. 6.8. Структурная схема последовательного усеченного многоканального РО

На рис. 6.8 представлена схема усеченного многоканального обнаружителя. Он состоит из вычислителя ранга (ВР), сумматора (Σ), запоминающего устройства (ЗУ), пороговых устройств (ПУ$_1$, ПУ$_2$), блока установки порога C (БУП), блока принятия решения (БПР) и блока коррекции статистики (БКС). В Σ складывается значение r_n с суммой рангов, полученных в предыдущих периодах наблюдений, которая хранится в ЗУ. Вместо изменения нижнего порога обнаружения на каждом шаге испытаний статистика S_n получает в БКС эквивалентное приращение.

6.4. Адаптация ранговых последовательных обнаружителей

Правило различения гипотез, основанное на последовательном анализе отношения правдоподобия, как известно, оптимально для простых гипотезы и альтернативы [149, 152]. При сложной гипотезе или (и) альтернативе, когда «расстояние» между ними неизвестно, последова-

тельное правило перестает быть оптимальным. Вероятности ошибок при этом могут в значительной степени отличаться от расчетных значений, а среднее число испытаний — от минимально возможного, т. е. от оптимального.

Для адаптации правила различения гипотез в общем случае необходимо находить функции распределения при гипотезах. Это требует, во-первых, достаточно большой длины обучающих последовательностей и, во-вторых, большого количества вычислений для определения соответствующих плотностей. Такие алгоритмы из-за своей сложности сказываются нереализуемыми.

Если известна априорная плотность $W(\hat{\theta})$ вектора мешающих параметров, то можно их исключить путем усреднения по нему. Возможны формирование апостериорных распределений вектора $\hat{\theta}$ по обучающей выборке (с использованием априорной плотности $W(\hat{\theta})$) и усреднение по ним. Если априорное распределение неизвестно, то можно задаться его видом, например принять его равномерным, и отношение правдоподобия вычислять приближенно, используя апостериорную оценку. По мере возрастания объема наблюдений апостериорное распределение перестает зависеть от априорного.

Для приближенного вычисления отношения правдоподобия можно вместо неизвестного $\hat{\theta}$ использовать оценку максимального правдоподобия, найденную на тех же шагах наблюдений [2].

Сложность адаптации и качество ее зависят от размерности вектора $\hat{\theta}$. В простейшем случае, когда неизвестным или изменяющимся является один, сравнительно легко контролируемый параметр (например, дисперсия шума), удается реализовать на практике достаточно эффективную адаптацию обнаружителя (см. гл. 4). Задача существенно усложняется, когда неизвестно несколько параметров.

При использовании непараметрических тестов, менее чувствительных к статистическим характеристикам входных данных, могут быть даны рекомендации по адаптивному вычислению отношения правдоподобия даже в случае непараметрической неопределенности. Например, возможна однопараметрическая адаптация последовательного знакового теста при обнаружении положительного сигнала на фоне шума с симметричной плотностью независимо от других характеристик шума.

Свойства непараметричности и устойчивости ранговых процедур позволяют относительно просто реализовать их адаптацию при последовательном анализе даже в случае непараметрической неопределенности. Как указывалось, при преобразовании исходного выборочного пространства в ранговое благодаря инвариантности распределения ранговой статистики происходит переход от сложной гипотезы к простой. Последовательные РО обеспечивают постоянство вероятности α, но при сложной альтернативе не обеспечивают заданной вероятности D_1 и минимально возможного α. Иными словами, выражения для отношения правдоподобия

$$l(\mathbf{r}) = \frac{P(\mathbf{r} \mid H_1, \hat{\theta}_1)}{P(\mathbf{r} \mid H_0, \hat{\theta}_0)}, \quad \mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n); \tag{6.35}$$

$$l(\mathbf{k}) = \frac{P(\mathbf{k} \mid H_1, \hat{\theta}_1)}{P(\mathbf{k} \mid H_0, \hat{\theta}_0)}, \quad \mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n), \tag{6.36}$$

зависят только от параметра альтернативного распределения ϑ_1. Более того, показано, что для подоптимальной процедуры (6.36) вектор ϑ_1 оказывается одномерным, т. е. представляет собой один параметр ϑ_1, характеризующий в ранговом пространстве «расстояние» между гипотезами.

Таким образом, независимо от распределений при гипотезе и альтернативе задача адаптации обнаружителя, основанного на (6.36), сводится к однопараметрической адаптации. Свойство устойчивости здесь используется косвенно в том смысле, что именно это свойство позволяет обеспечить характеристики обнаружения, близкие к оптимальным, при различных распределениях входных данных. Устойчивость ранговых тестов дает возможность также подобрать плотность в выборочном пространстве, аппроксимирующую достаточно широкий класс распределений, на основании которой и рассчитывается отношение правдоподобия (6.35). При этом задача сводится к параметрической адаптации — определению числителя (6.35).

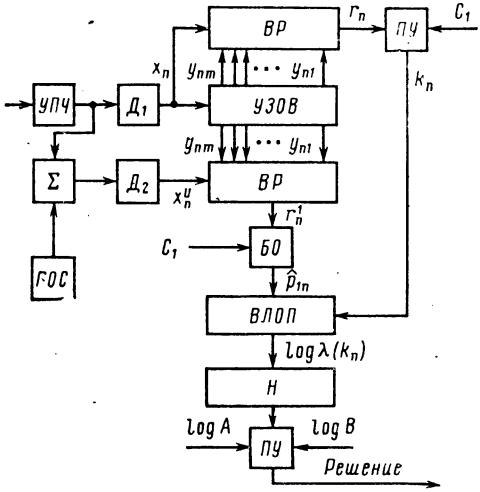


Рис. 6.9. Структурная схема бинарного РАПО

Адаптация обнаружителя, основанного на бинарном квантовании рангов [259]. Алгоритм бинарной последовательной процедуры (6.36) в соответствии с (6.34) для нестационарного шума представим в виде

$$\log B \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left[k_i \log \frac{p_{1i}}{p_0} + (1-k_i) \log \frac{1-p_{1i}}{1-p_0} \right] \leqslant \log A \qquad (6.37)$$

и сводится к весовому суммированию числа единиц и нулей и сравнению результата с порогами.

Логарифм отношения правдоподобия, как видно из (6.37), зависит лишь от одного параметра p_1 [см. (6.21)], который может быть заменен его оценкой максимального правдоподобия.

На рис. 6.9 представлена схема рангового адаптивного последовательного обнаружителя (РАПО). Она содержит два вычислителя рангов (ВР), аналогичных ВР схемы рис. 6.1. В первом ВР вычисляется ранг r_n отсчета x_n в испытуемом канале относительно шумовых отсчетов $y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{nm}$; во втором — ожидаемое значение ранга r_n' отсчета x_n^U, содержащего смесь ожидаемого (расчетного) сигнала с действующим шумом относительно той же опорной выборки y. Суммирование отсчетов шума с ожидаемым сигналом, поступающим с генератора ожидаемого сигнала (ГОС), производится в линейной части приемника

на выходе УПЧ в сумматоре (Σ). Смесь детектируется вторым детектором ($Д_2$), аналогичным первому ($Д_1$). Значение ранга после бинарного квантования служит для оценки параметра p_{1n} в блоке оценки (БО) через частоту события $r_n^1 > C_1$. Вычислитель логарифма отношения правдоподобия (ВЛОП) выполняется в виде кодирующей матрицы, содержащей уже вычисленные значения логарифма для набора входных параметров k_n и $\hat{p}_{1n}$ ($\hat{p}_{1n}$—оценка p_{1n}). На выходе ВЛОП образуется

$$\log l_n = \begin{cases} \log(\hat{p}_{1n}/p_0), & k_n = 1; \\ \log[(1-\hat{p}_{1n})/(1-p_0)], & k_n = 0, \end{cases}$$

где $p_0 = (m - C_1)/(m+1)$ [см. (6.20)]; $k_n = 0$; 1 — результат квантования ранга в пороговом устройстве (ПУ).

После суммирования в накопителе (Н) статистика $\log l = \sum_{i=1}^{n} \log l_i$ сравнивается с порогами $\log A$ и $\log B$ в пороговом устройстве (ПУ).

Оперативная характеристика и среднее число наблюдений РАПО, использующего для адаптации значения оценки p_{1n}, зависят от этой оценки. Поэтому оперативную характеристику можно рассматривать как условную вероятность принятия гипотезы H_0 при наличии сигнала и параметре альтернативного распределения a при оценке $\hat{p}_{1i}$, т. е. $L = L(a|\hat{p}_{1n})$.

Полагая условия стационарными $p_{1i} = p$, рассмотрим безусловную (усредненную по всем возможным значениям оценки) характеристику

$$\bar{L}(a) = \sum_{\hat{p}_1} L(a \mid \hat{p}_1) P(\hat{p}_1), \tag{6.38}$$

где $P(\hat{p}_1)$ — распределение оценки $\hat{p}_1$.

Аналогично определим безусловное (усредненное по значениям оценки) среднее число наблюдений

$$\bar{\bar{n}}(a) = \sum_{\hat{p}_1} \bar{n}(a \mid \hat{p}_1) P(\hat{p}_1). \tag{6.39}$$

Если оценка производится на основании l испытаний, то она может принимать $l+1$ значение, т. е. $\hat{p}_1 = j/l$ ($j = 0 \div l$ — число превышений рангом r^1 порога квантования C_1. Оценка $\hat{p}_1$ является оценкой максимального правдоподобия, она состоятельна, несмещенна и эффективна. Полагая результаты испытаний ранга r^1 на порог C_1 при l измерениях независимыми, приходим к биномиальному распределению

$$P(\hat{p}_1) = C_l^j p_1^j(a)[1-p_1(a)]^{l-j}. \tag{6.40}$$

Для моделей распределений помехи (6.16) и смеси сигнала с помехой (6.17), (6.18) с использованием (6.21)—(6.23) и соотношений

(6.31)—(6.33), в которых значения r заменены на значения k, вычислялись $L(a|\widehat{p_1})$ и $\bar{n}(a|\widehat{p_1})$. Далее из (6.38)—(6.40) определялись $\bar{L}(a)$ и $\bar{\bar{n}}(a)$.

Очевидно, что при приближении отношения сигнал-шум к нулю среднее число наблюдений $\bar{n}$ РАПО неограниченно возрастает. Поэтому для практической реализации обнаружителя целесообразно для усечения процедуры задаться некоторым минимально возможным значением $a_{\min}$. При этом адаптация будет производиться для всех значений $a > a_{\min}$. Для $a < a_{\min}$ обнаружитель будет работать как последовательный неадаптирующийся при расчетном значении $a_1 = a_{\min}$. Следовательно, если оценка $\widehat{p_1}$ оказывается ниже $p_{\min}$, соответствующей значению $a_{\min}$, то она заменяется величиной $p_{\min}$.

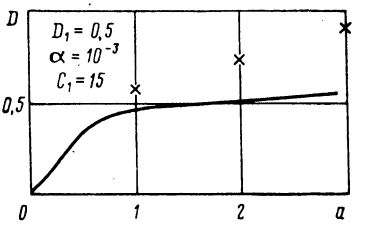


Рис. 6.10. Характеристика обнаружения бинарного РАПО

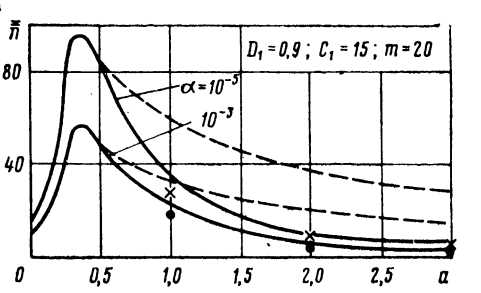


Рис. 6.11. Зависимость безусловного среднего числа наблюдений от отношения сигнал-шум a для бинарного РАПО

При расчете характеристик (рис. 6.10, 6.11, нефлуктуирующий сигнал) полагалось $a_{\min} = 0{,}5$. Из рис. 6.10 видно, что вероятность D для всех $a > 0{,}5$ в результате адаптации поддерживается на расчетном уровне $D_1 = 0{,}5$. В то же время результаты моделирования, обозначенные крестиками, показывают, что действительные значения D превышают расчетное. Это превышение объясняется тем, что при больших значениях a, когда число наблюдений невелико, расчет становится грубым. Он гарантирует лишь верхние границы реализуемых вероятностей ошибок.

Зависимости $\bar{\bar{n}}(a)$ приведены на рис. 6.11. Штриховыми линиями приведены зависимости для бинарной неадаптивной процедуры при расчетном $a_1 = 0{,}5$. Поскольку в режиме адаптации полагалось $a_{\min} = 0{,}5$, кривые для этих обнаружителей при $a \leqslant 0{,}5$ совпадают. Для $a > 0{,}5$ кривые расходятся и разница между ними характеризует выигрыш благодаря адаптации. Крестиками обозначены результаты моделирования адаптивной процедуры; точками — значения $\bar{\bar{n}}$ для последовательного неадаптивного бинарного РО, для которого соответствующие этим точкам значения a являются расчетными. Для флуктуирующего сигнала результаты аналогичны.

При радиолокационном обзоре общее время принятия решения по всем каналам в основном определяется временем принятия решения в «пустых» каналах. Поэтому практическое значение для оценки длительности наблюдений имеет случай гипотезы H_0 [152]. На рис. 6.12 представлена зависимость $\overline{\overline{n}}$ бинарного РАПО при справедливости гипотезы H_0 от значений ожидаемого отношения a_1, соответствующих оценкам p_1. Точками обозначены значения $\overline{\overline{n}}$ для неадаптивного бинарного РО; крестиками — значения, являющиеся результатом моделирования РАПО.

Из приведенных на рис. 6.10—6.12 зависимостей видно, что среднее число наблюдений адаптивного обнаружителя и оптимального бинарного рангового практически совпадают.

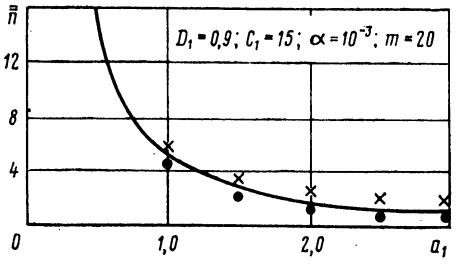


Рис. 6.12. Зависимость безусловного среднего числа наблюдений от расчетного отношения сигнал-шум a_1 для бинарного РАПО

Адаптивный обнаружитель, основанный на анализе отношения правдоподобия рангового вектора [260]. Полученный вывод о том, что качество непоследовательного РО является практически инвариантным по отношению к виду помехи при постоянном значении отношения M^2/M_2 (см. § 6.2), позволил предложить идею адаптации последовательного РО, основанного на отношении правдоподобия (6.35), с использованием оценок M и M_2.

Будем полагать, что распределение огибающей шума подчиняется закону Вейбулла

$$F_0(x) = 1 - \exp(-cx^d),\ c > 0,\ d > 0. \qquad (6.41)$$

Закон (6.41), как указывалось, хорошо аппроксимирует наиболее часто встречающиеся на практике распределения, а рэлеевский и экспоненциальный законы являются его частными случаями. Поэтому если шум имеет действительно распределение (6.41) и параметры его измеряются точно, то обнаружитель, основанный на вычислении (6.35) является оптимальным ранговым.

Вероятности, входящие в (6.35), определяются соотношениями (6.9) и (6.10), а распределение огибающей смеси сигнала с шумом $F_1(x)$ — выражением (6.27).

Как показано в [262], оценок максимального правдоподобия для неизвестных параметров c и d распределения (6.41) не существует. Предложенные же оценки c и d сложны. Поэтому значения M и M_2 будем определять не через c и d, а непосредственно по выборке.

Рисунок 6.13 иллюстрирует способ построения такого многоканального цифрового РАПО, «настроенного» на вейбулловский шум [261]. По шумовой выборке в блоке оценки (БО) определяются $\widehat{M} = \frac{1}{m}\Sigma y_i$ и $\widehat{M}_2 = \frac{1}{m}\Sigma y_i^2$. Далее в вычислительном устройстве (ВУ) вычисляются оценки отношения расчетного сигнала U (поступающего с ГОС) к действующей помехе $\widehat{a} = U^2/\widehat{M}_2$ и отношения $b = \widehat{M}^2/\widehat{M}_2$. В ПЗУ записаны значения логарифма отношения правдоподобия $\log l\,(r, a, b)$. В соответствии со значением ранга r_n и оценками $\widehat{a}, \widehat{b}$ в n-м наблюдении из ПЗУ извлекается соответствующее значение $\log l\,(r_n, \widehat{a}, \widehat{b})$, которое поступает в накопитель (Н) и далее на пороговое устройство (ПУ), АЦП — аналого-цифровой преобразователь.

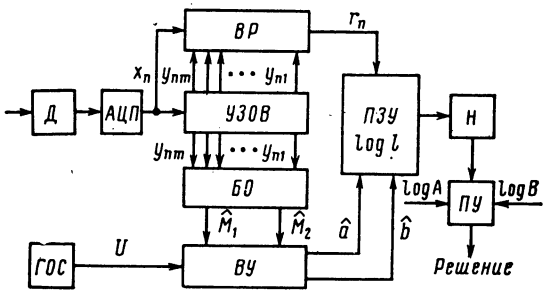


Рис. 6.13. Структурная схема многоканального РАПО

Вначале предположим, что M и M_2 измеряются точно, тогда рассчитанные с помощью соотношений (6.31)—(6.33) характеристики $\bar{n}\,(a)$ и $L\,(a)$ следует рассматривать как потенциально достижимые для для РАПО.

На рис. 6.14, *а, б* приведены зависимости $\bar{n}$ и $\bar{\bar{n}}$ от отношения $b = M^2/M_2$ для шума с распределением Вейбулла (Рэлея, экспоненциального) и различных значений расчетного отношения сигнал-шум a_1 для H_1 и H_0. Там же крестиками нанесены значения $\bar{n}$ для других шумов, обозначение вида которых дается начальными буквами названий соответствующих распределений (6.26), а значение параметра θ указано в скобках. Значения $\bar{n}\,(b)$ получены из зависимостей $\bar{n}\,(a)$ пересчетом параметра θ в отношение b. Значения $\bar{n}$ для обнаружителя, оптимального при действующем шуме, на рис. 6.14, *а* и *б* обозначены кружочками.

Кривые $\bar{n}\,(b)$ имеют резонансный характер, причем максимальные значения достигаются при $b = 0{,}785$, что соответствует рэлеевскому шуму (Р).

Для расчетных отношений $a_1 > 1{,}0$ превышение $\bar{n}$ относительно оптимальных значений в данном шуме незначительно; вероятность

D при этом сохраняет практически расчетное значение. Исключение составляет случай инверсного (И) распределения шума, где $\bar{n}$ оказывается ниже оптимального (для заданных α и D_1) значения, а реализуемая вероятность D несколько ниже расчетной D_1.

При $a_1 < 1$ расхождение в $\bar{n}$ возрастает. Для большинства распределений, кроме логарифмически-нормального (Л), это отличие при

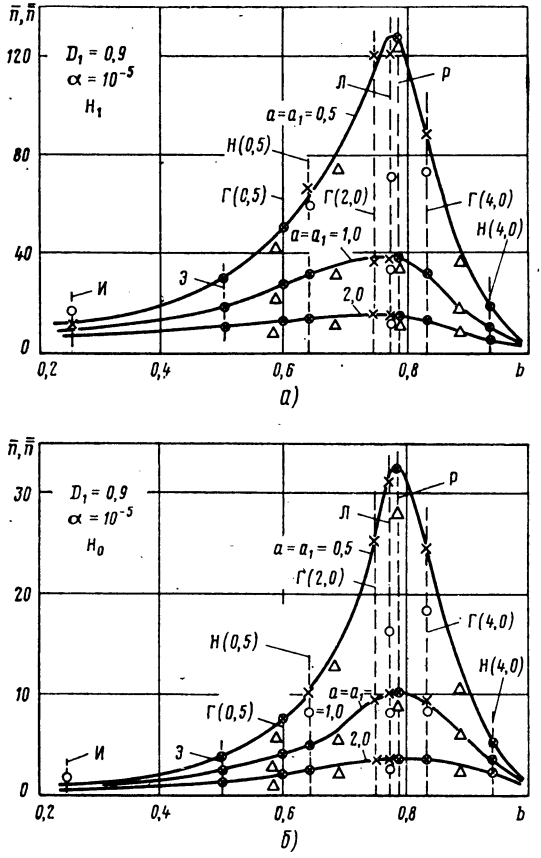


Рис. 6.14. Зависимость среднего и безусловного среднего числа наблюдений $\bar{n}$ и $\overline{\bar{n}}$ от $b = M^2/M_2$ при гипотезе H_1 (*а*) и при альтернативе H_0 (*б*) для РАПО

альтернативе H_1 также незначительно. При гипотезе H_0 отличие от оптимального значения оказывается существенным также и для Г-распределения (Г) при $\theta = 4$.

На практике качество адаптации, а следовательно, и характеристики обнаружителя зависят от точности измерения параметров адаптации, ограниченной числом элементов шумовой выборки ($m = 20 \div 30$), по которой производится измерение.

Следуя общей методике анализа последовательной процедуры [149], будем определять оперативную характеристику $\overline{L}$ (*а*) и среднее число

наблюдений $\overline{\overline{n}}(a)$ в этом случае выражениями (6.31) и (6.32) с учетом усреднения (6.32) и знаменателя (6.33) по распределению оценок $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$, т. е.

$$\iint \sum_r \left[\frac{P(r\mid \widehat{a},\widehat{b})}{P(r\mid 0)}\right]^{h(a)} P(r\mid a)\, W(\widehat{a},\widehat{b})\, d\widehat{a}\, d\widehat{b} = 1,$$

$$\iint \sum_r \log \frac{P(r\mid \widehat{a},\widehat{b})}{P(r\mid 0)}\, P(r\mid a)\, W(\widehat{a},\widehat{b})\, d\widehat{a}\, d\widehat{b}, \qquad (6.42)$$

где $W(\widehat{a},\widehat{b})$ — плотность совместного распределения $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$.

Полагая, что при $m = 20 \div 30$ оценки $\widehat{M} = \frac{1}{m}\Sigma y_i$ и $\widehat{M}_2 = \frac{1}{m}\Sigma y_i^2$ распределены по нормальному закону, и используя связь между a, b и M, M_2 можно показать, что

$$W(\widehat{a},\widehat{b}) = \frac{U^3}{4\pi \widehat{a}^2 \sqrt{\widehat{a}\,\widehat{b}}\,\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-R^2}} \left\{\exp\left\{-\frac{1}{2(1-R^2)}\times\right.\right.$$

$$\times\left[\frac{\left(U\sqrt{\widehat{b}/\widehat{a}}-M\right)^2}{\sigma_1^2} - 2R\,\frac{\left(U\sqrt{\widehat{b}/\widehat{a}}-M\right)\left(U^2/\widehat{a}-M_2\right)}{\sigma_1\sigma_2} + \right.$$

$$\left.\left.+\frac{\left(U^2/\widehat{a}-M_2\right)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\} + \exp\left\{-\frac{1}{2(1-R^2)}\left[\frac{\left(U\sqrt{\widehat{b}/\widehat{a}}+M\right)^2}{\sigma_1^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left.+2R\,\frac{\left(U\sqrt{\widehat{b}/\widehat{a}}+M\right)\left(U^2/\widehat{a}-M_2\right)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\left(U^2/\widehat{a}-M_2\right)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

где параметры σ, R находятся по распределению $F_0(x)$ через его моменты M, M_2, M_3, M_4, т. е.

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{m}(M_2 - M^2);\quad \sigma_2^2 = \frac{1}{m}(M_4 - M_2^2);\quad R = \frac{1}{m}\,\frac{M_3 - MM_2}{\sigma_1\sigma_2}.$$

Результаты расчета n, обозначенные на рис. 6.14, *а* и *б* треугольниками, свидетельствуют о соответствии их потенциально достижимым значениям с точностью порядка 10—20%.

Данные моделирования ($D_м$, $\alpha_м$, $\bar{n}_м$) обнаружителя по 1000 испытаний при неизвестных параметрах шума приведены в табл. 6.1 ($\bar{n}$ — результат расчета при точно известных параметрах шума). Приведенным данным $\bar{n}_м$ соответствуют завышенные значения $D_м$ (0,9—0,96) относительно расчетного D_1 (0,9). Результаты моделирования $\alpha_м$ соответствуют заданным значениям 10^{-2}, 10^{-3} и существенно не отличаются от них. Данные табл. 6.1 получены для $a_1 = 1$, аналогичные результаты имеют место и для $a_1 = 0{,}5$; 0,75; 2,0.

Таблица 6.1

α	b	H_1			H_0		
		D_M	$\bar{n}$	$\bar{n}_M$	α_M	$\bar{n}$	$\bar{n}_M$
10^{-2}	0,685	0,928	13,1	14,6	$0{,}7\cdot10^{-2}$	6,4	7,3
	0,785	0,905	14,9	16,3	$0{,}6\cdot10^{-2}$	9,96	10,2
	0,885	0,909	7,4	9,0	$0{,}6\cdot10^{-2}$	6,15	6,8
10^{-3}	0,385	0,959	7,6	9,36	$1{,}0\cdot10^{-3}$	1,35	2,46
	0,485	0,956	10,0	11,36	$3{,}0\cdot10^{-3}$	2,08	3,43
	0,585	0,950	14,0	15,9	$3{,}0\cdot10^{-3}$	3,42	4,59
	0,685	0,940	20,1	21,9	$1{,}0\cdot10^{-3}$	6,2	7,5
	0,785	0,909	23,0	24,1	$0{,}0\cdot10^{-3}$	10,3	10,7
	0,885	0,911	11,5	13,3	$0{,}0\cdot10^{-3}$	6,34	7,07

Таким образом, данные расчетов характеристик для точно известных и для неизвестных параметров шума, а также результаты моделирования обнаружителя близки и свидетельствуют о том, что РАПО, «настроенный» на вейбулловский шум, обеспечивает качественные показатели, близкие к расчетным, в широком диапазоне изменения входных данных.

Характеристики аналогичной адаптивной по двум параметрам процедуры, основанной на вычислении отношения правдоподобия вектора наблюдений l (x), при воздействии шума, отличного от расчетного (вейбулловского), неудовлетворительны, особенно по α. Кроме того, реализация такого обнаружителя и для случая известного шума намного сложнее реализации РАПО.

Как было показано выше, проигрыш РО Неймана—Пирсона линейному накопителю при рэлеевском шуме с увеличением отношения сигнал-шум (уменьшением n) растет и при малом $n < 5$ оказывается значительным. По сравнению с оптимальным последовательным обнаружителем адаптивные последовательные РО имеют при малых значительно меньшие потери $\bar{n}$ чем неадаптивные. Так, для РАПО, основанного на вычислении отношения правдоподобия l (r) при $\bar{n} = 5$ ($a_1 = 4{,}0$) и $\alpha = 10^{-5}$, проигрыш в среднем числе наблюдений при альтернативе H_1 порядка 100%, что соответствует проигрышу в пороговом отношении сигнал-шум порядка 3 дБ. При гипотезе H_0 проигрыш в среднем числе испытаний для больших значений a_1 ($> 2{,}0$) составляет менее 10%, т. е. практически отсутствует.

Меньшие значения потерь и меньшая их зависимость от $\bar{n}$ для РАПО объясняются тем, что значения рангов (в том числе максимальные) учитываются при вычислении статистики со своими весами (в отличие от равновесного суммирования у обнаружителя Неймана—Пирсона), зависящими от действующего отношения сигнал-шум, и, таким образом, потери информации за счет усеченности ранговой статистики оказываются меньшими. Это обстоятельство позволяет рекомендовать применение адаптивных последовательных РО и для больших отношений сигнал-шум (малых n).

6.5. Непараметрическое обнаружение сигналов на фоне коррелированного шума

При анализе и синтезе непараметрических обнаружителей, рассмотренных выше, предполагалось, что выборочные значения шума независимы. Такое предположение справедливо для внутренних шумов приемника и активных помех типа шумовой заградительной и прицельной. Пассивные помехи, вызванные отражениями от земли, поверхности воды, гидрометеоров, дипольных отражателей являются, как известно, коррелированными, а задача обнаружения сигнала на фоне таких помех — типичной.

Когда предположение о независимости выборочных отсчетов не соблюдается, непараметрические обнаружители теряют свойство инвариантности по уровню ложных тревог.

Попытки анализа и синтеза непараметрических тестов различения гипотез при коррелированных отсчетах для конечного числа наблюдений наталкиваются на непреодолимые математические трудности. В настоящее время известны некоторые частные результаты, касающиеся асимптотического поведения непараметрических процедур в коррелированном шуме [1], а также синтеза асимптотически-непараметрического обнаружителя [263].

Использование марковской аппроксимации для зависимых наблюдений позволяет в ряде случаев получить аналитические соотношения для непараметрической обработки при конечном числе наблюдений.

Будем по-прежнему предполагать, что отсчеты шума y_{ij} ($j = 1 \div m$) в различных информационных каналах независимы (независимость по индексу j), а отсчеты шума одного канала зависимы (зависимость по индексу $i = 1 \div n$). Кроме того, предположим, что отсчеты шума в одном канале образуют односвязную цепь Маркова.

Хотя квантование отсчетов процесса порождает цепь Маркова, связность которой в общем случае не совпадает со связностью исходного процесса [196], будем использовать для последовательности $h_1, h_2, \ldots, h_n$ координат знакового вектора [см. (6.2)] и последовательности $k_1, k_2, \ldots, k_n$ координат вектора бинарно-квантованных рангов [см. (6.8)] аппроксимацию односвязной цепью Маркова. Тогда для n-мерной вероятности координат вектора $\mathrm{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$* имеем

$$P(k_1, k_2, \ldots, k_n) = P(k_1) \prod_{i=1}^{n-1} P(k_i \mid k_{i+1}) = P(k_1) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{P(k_i, k_{i+1})}{P(k_i)}. \quad (6.43)$$

Можно показать [264], что совместные вероятности для знакового теста, обозначаемые далее $P_s(k_i, k_{i+1})$, равны:

для гипотезы H_0 (функция распределения $x - F_0(x)$)

$$P_s(1, 1) = \iint F_0(x_1, x_2) dF_0(x_1, x_2); \; P_s(1, 0) = P_s(0, 1) =$$
$$= \int F_0(x) dF_0(x) - \iint F_0(x_1, x_2) dF_0(x_1, x_2);$$
$$P_s(0, 0) = 1 - 2\int F_0(x) dF_0(x) + \iint \{F_0(x_1, x_2) dF_0(x_1, x_2),$$

* Далее будем пользоваться символом k как для бинарного рангового теста, так и для знакового.

или с учетом того, что $P_s(0) = P_s(1) = P(x > y) = \int F_0(x) dF_0(x) = \frac{1}{2}$,

$$P_s(1, 1) = P_s(0, 0); \; P_s(1, 0) = P_5(0,1) = 0{,}5 - P_s(1, 1); \tag{6.44}$$

для альтернативы H_1 (функция распределения $x - F_1(x)$)

$$P_s(1, 1) = \iint F_0(x_1, x_2)\, dF_1(x_1, x_2); \; P_s(1) = \int F_0(x) dF_1(x); \; P_s(0) = 1 - P_s(1); \tag{6.45}$$

$$P_s(0, 1) = P_s(1) - P_s(1, 1); \; P_s(0, 0) = 1 - 2P_s(1) + P_s(1,1);$$

$$P_s(0, 1) = P_s(0,1).$$

Рассмотрим соответствующие вероятности для рангового теста:

$$P_r(0, 0) = P(r_i \leqslant C_1, r_{i+1} \leqslant C_1); \; P_r(0,1) = P(r_i \leqslant C_1, r_{i+1} > C_1);$$

$$P_r(1, 0) = P(r_i > C_1, r_{i+1} \leqslant C_1); \tag{6.46}$$

$$P_r(1, 1) = P(r_i > C_1, r_{i+1} > C_1); \; P_r(0) = P(r_i \leqslant C_1);$$

$$P_r(1) = P(r_i > C_1).$$

В отличие от знакового теста, при $C_1 \neq m/2$ имеем $P_r(0, 0) \neq P_r(1, 1)$; $P_r(1) \neq P_r(0)$. Поскольку при справедливости гипотезы H_0 имеют место $P_r(1) = (m - C_1)/(m + 1)$; $P_r(0) = (C_1 + 1)/(m + 1)$, то из очевидных соотношений $P_r(0) + P_r(1) = 1$;

$$P_r(0, 0) + P_r(1, 0) = P_r(0); \; P_r(1, 1) + P_r(0, 1) = P_r(1);$$

$P_r(1, 0) = P_r(0, 1)$ следует, что, как и для знакового теста, вероятности $P_r(k_i, k_{i+1})$ можно выразить через одну, например $P_r(1, 1)$:

$$P_r(0, 0) = (2C_1 - m + 1)/(m + 1) + P_r(1, 1); \; P_r(1, 0) = P_r(0, 1) = (m - C_1)/(m + 1) - P_r(1, 1). \tag{6.47}$$

Для альтернативы H_1 вероятности (6.46) определяются как

$$P_r(1) = \sum_{r=C_1+1}^{m} P(r \mid H_1); \; P_r(0) = 1 - P_r(1); \; P_r(1, 1) = \sum_{r_{i+1}=C_1+1}^{m} \sum_{r_i=C_1+1}^{m} P(r_i, r_{i+1} \mid H_1);$$

$$P_r(0, 1) = \sum_{r_{i+1}=C_1+1}^{m} \sum_{r_i=0}^{C_1} P(r_i, r_{i+1} \mid H_1); \; P_r(0, 0) = \sum_{r_{i+1}=0}^{C_1} \sum_{r_i=0}^{C_1} P(r_i, r_{i+1} \mid H_1). \tag{6.48}$$

Одномерное распределение ранга $P_r(r|H_1)$ определяется соотношением (6.9). Можно показать, что двумерное распределение рангов дается выражением [265]

$$P(r_1, r_2 H_1) = C_m^{r_1} \sum_{i=0}^{\min(m-r_1, r_2)} C_{r_1}^{r_2-i} C_{m-r}^{i} \iint F_0^{r_2-i}(x_1, x_2) [F_0(x_1) - F_0(x_1, x_2)]^{r_1-r_2+i} [F_0(x_2) - F_0(x_1, x_2)]^{i} [1 - F_0(x_1) - F_0(x_2) + F_0(x_1, x_2)]^{m-r_1-i} dF_1(x_1, x_2), \; r_2 \leqslant r_1, \tag{6.49}$$

где $F_0(x_1, x_2)$ и $F_1(x_1, x_2)$ — двумерные функции распределения, соответствующие H_0 и H_1. При $r_2 > r_1$ в (6.49) эти величины меняются местами. В частном случае независимых наблюдений выражение (6.49) представимо в виде произведения двух сомножителей $P(r_1, r_2|H_1) = P(r_1|H_1)P(r_2|H_1)$, определяемых (6.9).

Таким образом, вероятности $P_s(k_i, k_{i+1})$ для знакового теста выражаются через двумерные распределения $F_0(x_1, x_2)$ и $F_1(x_1, x_2)$, а вероятности $P_r(k_i, k_{i+1})$ для рангового теста — через двумерные распределения рангов $P(r_i, r_{i+1}|H_j)$, $j = 0,1$, которые в свою очередь определяются через $F_0(x_1, x_2)$ и $F_1(x_1, x_2)$.

Рассмотрим двоичный вектор $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, сумма координат которого равна $S = \Sigma k_i = l$. Обозначим через $Q_i(l)$ число всех двоичных векторов, сумма координат которых равна l, а число комбинаций «01» и «10» равно i. Можно показать [265], что

$$Q_i(l) = \begin{cases} C_{l-1}^{i/2} C_{n-l-1}^{i/2-1} + C_{l-1}^{i/2-1} C_{n-l-1}^{i/2}, & i \text{ — четное;} \\ 2C_{n-l-1}^{(l-1)/2} C_{l-1}^{(l-1)/2}, & i \text{ — нечетное,} \end{cases} \tag{6.50}$$

где C_a^b — число сочетаний из a по b.

Среди всех n-мерных векторов, содержащих l единиц, комбинации «01» и «10» могут встретиться 1, 2, ..., q раз, причем если $l < [n/2]$ ($[\cdot]$ — символ целой части), то $q = 2l$, если $l \geqslant [n/2]$, то $q = 2(n - l)$.

Если комбинации «01», «10», «00», «11» содержатся в векторе соответственно σ, τ, ν, μ раз, то, используя марковскую модель для вектора наблюдений и теорему сложения вероятностей, для вероятности $P(S = l)$ получаем

$$P(S=l) = \sum_{i=0}^{2\min(l,\, n-l)} Q_i(l) \left[\frac{P(0,1)}{P(0)}\right]^{\sigma} \left[\frac{P(1,0)}{P(1)}\right]^{\tau} \left[\frac{P(0,0)}{P(0)}\right]^{\nu} \left[\frac{P(1,1)}{P(1)}\right]^{\mu}. \tag{6.51}$$

Показатели, σ, τ, ν, μ выражаются через n, l и i [265]. Используя эти выражения, (6.51) и (6.44), можно показать, что для знакового теста при гипотезе H_0

$$P(S=l \mid H_0) = 2^{n-2} \sum_{i=0}^{2\,min\,(l,\, n-l)} Q_i(l) \left[\frac{1}{2} - P_S(1,1)\right]^{l} P_S^{n-l-1}(1,1). \tag{6.52}$$

С учетом (6.47) из (6.51) для рангового теста имеем [266]

$$P(S=l \mid H_0) = \sum_{i=0}^{2\min(l,\, n-1)} Q_i(l) \frac{\left[\frac{m-C_1}{m+1} - P_r(1,1)\right]^{l} \left[\frac{2C_1+1-m}{m+1} + P_r(1,1)\right]^{\nu} P_r^{\mu}(1,1)}{\left[\frac{C_1+1}{m+1}\right]^{\sigma+\nu} \left[\frac{m-C_1}{m+1}\right]^{\tau+\mu}}. \tag{6.53}$$

Для сокращения записи выражение (6.53) представлено в форме, где σ, τ, ν, и μ фигурируют в явном виде.

Порог обнаружения C по заданной вероятности α находится из выражения

$$\alpha = \sum_{l=C+1}^{S_{\max}} P(S=l \mid H_0). \tag{6.54}$$

Из (6.52) и (6.53) следует, что распределение статистики при гипотезе H_0 и фиксированном n для знакового и рангового тестов являются функцией только $P(1, 1)$.

Таким образом, при коррелированном марковском шуме исходная непараметрическая гипотеза в выборочном пространстве (т. е. класс непрерывных двумерных распределений) трансформируется в параметрическую гипотезу в пространстве знаковых и бинарных ранговых векторов, содержащую один неизвестный параметр. Другими словами, хотя при коррелированном шуме знаковый (бинарный ранговый) обнаружитель утрачивает непараметричность, уровень априорной неопределенности сводится к незнанию одного скалярного параметра. Следовательно, для адаптации обнаружителей в целях стабилизации α необходимо производить оценку вероятности $P(1, 1)$ и по результату этой оценки устанавливать порог обнаружения в соответствии с заранее рассчитанной зависимостью $C = C(P(1, 1))$.

Состоятельной и несмещенной оценкой $P(1, 1)$ служит

$$\widehat{P}(1, 1) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} k_i k_{i+1},$$

т. е. вероятность $P(1, 1)$ определяется корреляцией соседних компонент вектора $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

Ввиду того что вероятность $P(1, 1)$ выражается через $P(0, 0)$ [см. (6.44), (6.47)], то целесообразно производить одновременно и оценку $P(0, 0)$

$$\widehat{P}(0, 0) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \overline{k}_i \overline{k}_{i+1}, \quad \overline{k}_i = 1 - k_i,$$

и использовать ее для получения более достоверной оценки $P(1, 1)$. Так, для знакового теста оценка $P(1, 1)$ может быть получена как

$$\widehat{P}_s(1, 1) = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (k_i k_{i+1} + \overline{k}_i \overline{k}_{i+1}).$$

Для рангового обнаружителя комбинирование оценок $\widehat{P}(1, 1)$ и $\widehat{P}(0, 0)$ с учетом (6.47) дает

$$\widehat{P}_r(1, 1) = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (k_i k_{i+1} + \overline{k}_i \overline{k}_{i+1}) - \frac{2C_1 + 1 - m}{2(m+1)}.$$

В многоканальном обнаружителе с последовательным просмотром каналов в целях улучшения оценки $P(1, 1)$ кроме суммирования по n наблюдениям возможно скользящее суммирование в пределах каждого наблюдения по d независимым каналам, соседним с испытуемым, например для знакового теста

$$\widehat{P}_s(1, 1) = \frac{1}{2d(n-1)} \sum_{j=1}^{d} \sum_{i=1}^{n-1} (k_{ij} k_{i+1j} + \bar{k}_{ij} \bar{k}_{i+1j}).$$

Если вероятность наличия сигнала в каком-либо канале много меньше вероятности его отсутствия, то при достаточно большом $d = 20 \div 30$ оценку $\widehat{P}(1, 1)$ можно считать не зависящей от наличия полезного сигнала.

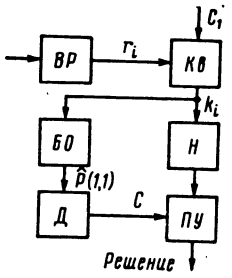


Рис. 6.15. Структурная схема адаптивного рангового многоканального обнаружителя

Схема адаптивного рангового многоканального обнаружителя с временным разделением каналов приведена на рис. 6.15 [266]. На рисунке ВР — вычислитель ранга, Кв — квантователь, Н — накопитель отсчетов k_{ij} за n периодов наблюдения для каждого испытуемого канала, БО — блок оценки, где производится усреднение произведения $k_{ij}k_{i+1j}$ по $n-1$ периоду наблюдений и по $d = m$ каналам, Д — дешифратор, в котором записана зависимость $C = C(P(1, 1))$, ПУ — пороговое устройство.

Знаковый обнаружитель отличается тем, что вместо ВР и Кв вводятся вычислитель знака, состоящий из линии задержки на интервал разрешения и схемы сравнения.

Вероятность обнаружения при установленном в соответствии с (6.54) пороге C определяется как

$$D = \sum_{l=C+1}^{S_{\max}} P(S = l \mid H_1). \qquad (6.55)$$

Слагаемые $P(S = l|H_1)$, входящие в (6.55), определяются выражением (6.51), в котором значения вероятностей $P(i)$, $P(i, j)$, $i = 0; 1$, $j = 0; 1$, соответствуют теперь альтернативному распределению смеси сигнала с шумом. Эти вероятности даются выражениями (6.45) и (6.48).

На рис. 6.16, *а* и *б* приведены примеры рассчитанных характеристик обнаружения соответственно для знакового и бинарного рангового некогерентных обнаружителей. Распределение огибающей шума задавалось двумерным рэлеевским законом

$$F_0(x_1, x_1) = (1-\rho^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left[n+1, \dfrac{x_1^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right] \Gamma\left[n+1, \dfrac{x_2^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right]}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+1)} \rho^{2n}, \qquad (6.56)$$

где $\Gamma(u)$ — гамма-функция; $\Gamma(u, v)$ — неполная гамма-функция; σ^2 — мощность помехи; ρ — коэффициент корреляции помехи.

Распределение огибающей смеси сигнала с помехой полагалось райсовским с плотностью

$$W(x_1, x_2) = \frac{d^2 F_1(x_1, x_2)}{dx_1\, dx_2} = \frac{x_1 x_2}{\sigma^2(1-\rho^2)} \exp\left[-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right] \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{a^2}{1+\rho^2}\right] \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m I_m\left[\rho \frac{x_1 x_2}{\sigma^2(1-\rho^2)}\right] \times$$

$$\times I_m\left[\frac{a x_1}{\sigma(1+\rho)}\right] I_m\left[\frac{a x_2}{\sigma(1+\rho)}\right], \qquad (6.57)$$

где $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_m = 2$; $m > 0$; $I_m[\cdot]$ — модифицированная функция Бесселя; a — отношение сигнал-помеха.

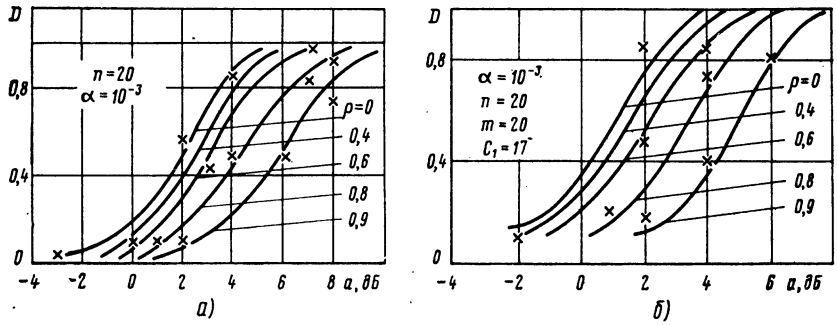


Рис. 6.16. Характеристики обнаружения знакового (*а*) и бинарного (*б*) РО (коррелированная помеха)

Из рис. 6.16 видно, что эффективность обнаружения слабо зависит от корреляции шума при малом значении коэффициента корреляции (0—0,4) и падает с его увеличением.

Крестиками на рис. 6.16 обозначены результаты моделирования обнаружителей. Расчетные и экспериментальные данные как по D, так и по α отличаются на величины, не превышающие значений доверительного интервала (доверительная вероятность 0,95). Это свидетельствует о хорошем качестве адаптации обнаружителей и применимости односвязной марковской аппроксимации для знакового и бинарного рангового векторов.

Рассмотрим далее задачи синтеза последовательных знакового и рангового обнаружителей при условии воздействия марковского шума, используя классический подход, основанный на вычислении отношения правдоподобия и сравнении его с вальдовскими порогами.

Используя для независимых наблюдений схему доказательства А. Вальда [149] о принятии с вероятностью единица терминального решения за конечное число шагов, можно доказательство этого факта провести и для последовательности отсчетов, образующих марковскую цепь.

Следуя рекомендациям [2], будем применять в рамках процедуры последовательного анализа принцип локальной оптимальности, свя-

занный с оптимизацией процедуры на каждом шаге наблюдений и приводящий к вычислению отношения правдоподобия на каждом шаге. Кроме того, в пользу статистики отношения правдоподобия говорит тот факт, что последовательные обнаружители (знаковый и ранговый), основанные на этих статистиках, выигрывают при марковском шуме (по данным машинного эксперимента) у соответствующих обнаружителей Неймана—Пирсона в среднем числе наблюдений приблизительно столько же, сколько и при независимых наблюдениях.

При выводе соотношений, определяющих связь между вероятностями ошибочных решений с пороговыми уровнями, в [149] нигде не использовалось предположение о независимости наблюдений. Поэтому уровни A и B по-прежнему дают верхние оценки для соответствующих вероятностей ошибок.

При аппроксимации последовательности $k_1, k_2, \ldots, k_n$ односвязной марковской цепью из (6.48) для отношения правдоподобия имеем

$$l = \frac{P(\mathbf{k} \mid H_1)}{P(\mathbf{k} \mid H_0)} = \frac{P(k_1 \mid H_1)}{P(k_1 \mid H_0)} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{P(k_i,\ k_{i+1} \mid H_1) P(k_i \mid H_0)}{P(k_i \mid H_1) P(k_i,\ k_{i+1} \mid H_0)} =$$

$$= l(k_1) \left[\frac{P_1(0,\ 1) P_0(0)}{P_0(0,\ 1) P_1(0)}\right]^{\sigma} \left[\frac{P_1(1,\ 0) P_0(1)}{P_0(1,\ 0) P_1(1)}\right]^{\tau} \left[\frac{P_1(0,\ 0) P_0(0)}{P_0(0,\ 0) P_1(0)}\right]^{\nu} \times$$

$$\times \left[\frac{P_1(1,\ 1) P_0(1)}{P_0(1,\ 1) P_1(1)}\right]^{\mu}. \qquad (6.58)$$

где показатели степени σ, τ, ν и μ имеют тот же смысл, что и в (6.51), а индекс $i = 0;\ 1$ при $P_i(\cdot)$ указывает номер гипотезы.

Выражая σ, τ, ν и μ через n, l и i [265], группируя далее одинаковые вероятности и принимая во внимание равенство $P(0,\ 1) = P(1,\ 0)$ из (6.58) получаем

$$\log l = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{k_{i+1} \log \frac{P_1(1)}{P_0(1)} + \bar{k}_{i+1} \log \frac{P_0(0)}{P_1(0)} + (k_i \bar{k}_{i+1} + \bar{k}_i k_{i+1}) \times \right.$$

$$\left. \times \log \frac{P_1(0,\ 1)}{P_0(0,\ 1)} + \bar{k}_i \bar{k}_{i+1} \log \frac{P_1(0,\ 0)}{P_0(0,\ 0)} + k_i k_{i+1} \log \frac{P_1(1,\ 1)}{P_0(1,\ 1)}\right\}. \qquad (6.59)$$

Поскольку все вероятности, входящие в (6.59), выражаются через три, например, $P_1(1)$ $P_0(1,\ 1)$, $P_1(1,\ 1)$ (см. (6.44), (6.45), (6.47), (6.48)), то (6.59) представимо в виде

$$\log l = \sum_{i=1}^{n-1} \left[k_{i+1} E_1 + \bar{k}_{i+1} E_2 + (k_i \bar{k}_{i+1} + \bar{k}_i k_{i+1}) E_3 + \right.$$

$$\left. + \bar{k}_i \bar{k}_{i+1} E_4 + k_i k_{i+1} E_5\right], \qquad (6.60)$$

где для знакового обнаружителя

$$E_1 = \log 2P_1(1);\ E_2 = \log \frac{1}{2[1 - P_1(1)]};\ E_3 = \log \frac{P_1(1) - P_1(1,\ 1)}{0{,}5 - P_0(1,\ 1)};$$

$$E_4 = \log \frac{1 - 2P_1(1) + P_1(1,\ 1)}{P_0(1,\ 1)};\ E_5 = \log \frac{P_1(1,\ 1)}{P_0(1,\ 1)}; \qquad (6.61)$$

для бинарного рангового

$$E_1 = \log \frac{P_1(1)(m+1)}{m - C_1}; \quad E_2 = \log \frac{C_1 + 1}{(m+1)[1 - P_1(1)]};$$

$$E_3 = \log \frac{P_1(1) - P_1(1,1)}{\frac{m - C_1}{m+1} - P_0(1,1)}; \tag{6.62}$$

$$E_4 = \log \frac{1 - 2P_1(1) + P_1(1,1)}{P_0(1,1) + \frac{2C_1 + 1 - m}{m+1}}; \quad E_5 = \log \frac{P_1(1,1)}{P_0(1,1)}.$$

Таким образом, вычисление $\log l$ в соответствии с (6.60) сводится к суммированию результатов наблюдений k_i с весовыми коэффициентами E_i ($i = 1 \div 5$), зависящими от трех параметров: $P_1(1)$, $P_0(1, 1)$ и $P_1(1, 1)$.

При неизвестных характеристиках помехи возможен адаптивный подход к вычислению $\log l$, когда вместо неизвестных вероятностей используются их оценки.

Схема такого адаптивного РО представлена на рис. 6.17. Вычисление ранга r и ожидаемого значения ранга r^1 происходит так же, как и по схеме рис. 6.9. В блоках оценки (БО) вычисляются оценки вероятностей $P_1(1)$, $P_0(1, 1)$ и $P_1(1, 1)$, которым соответствуют значения коэффициентов $E_1 - E_5$ на выходе ПЗУ. После перемножения этих коэффициентов на соответствующие комбинации k_i, k_{i+1} и накопления в синхронном накопителе (СН) результат испытывается на пороги. Схема измерителя (Изм) представлена на рис. 6.18. Она состоит из N-разрядного (по числу временных каналов) регистра (Рег) и схем И, ИЛИ.

Схема адаптивного знакового обнаружителя отличается от приведенной на рис. 6.17 тем, что вычислители рангов (ВР) в ней заменены на вычислители знаков.

Отсутствие аналитических зависимостей для среднего числа наблюдений и оперативной характеристики последовательной процедуры при зависимых наблюдениях лишает возможности получения их расчетным путем.

Определение показателей качества последовательных и адаптивных последовательных обнаружителей возможно методом статистического моделирования.

Реализация непараметрических обнаружителей рассмотренных типов не вызывает принципиальных затруднений и может быть выполнена на основе использования выпускаемых в настоящее время промышленностью микросхем: регистров, счетчиков, матричных ПЗУ, сумматоров и др. [267]. В [267], в частности, описана реализация рангового обнаружителя Неймана—Пирсона на микросхемах среднего уровня интеграции (155-й серии), работающего в реальном масштабе времени при интервале разрешения 1 мкс.

При очень коротких интервалах разрешения (< 1 мкс) выполнение всех вычислительных операций, предусмотренных алгоритмом, в том числе аналого-цифровое преобразование на входе обнаружителя, может оказаться невозможным

из-за недостаточного быстродействия элементов схемы. В этом случае может быть применен легко реализуемый поточный метод обработки информации, при котором различные узлы выполняют операции, соответствующие различным, соседним интервалам разрешения.

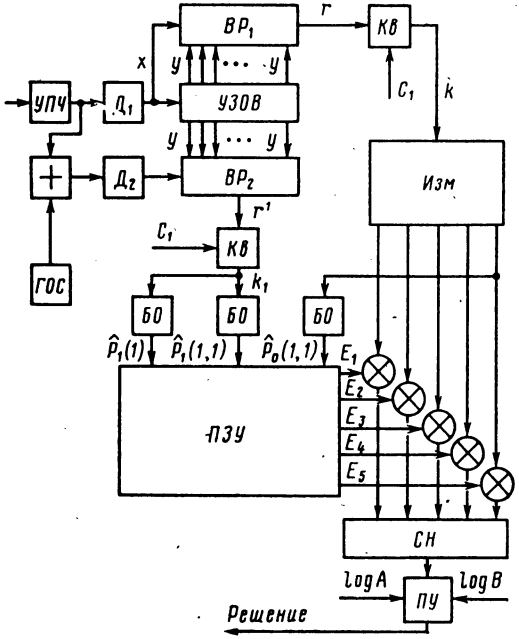


Рис. 6.17. Структурная схема адаптивного бинарного РО

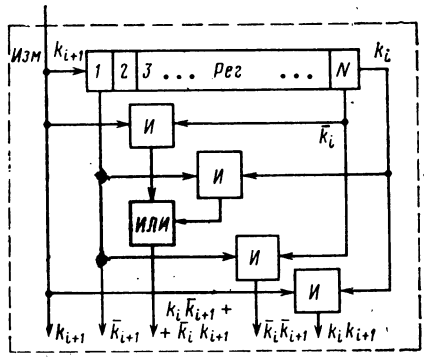


Рис. 6.18. Структурная схема измерителя

Перспективным следует считать использование более совершенных схем (БИС) при создании обнаружителя в виде микропроцессора, что позволит увеличить быстродействие, сократить габаритные размеры, массу аппаратуры и потребляемую мощность.

Глава 7

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЕ ОБНАРУЖИТЕЛИ СИГНАЛОВ

7.1. Ранговые обнаружители

Пусть наблюдаемый процесс $x(t)$ представляет собой аддитивную смесь сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$ вида

$$x(t) = \nu s(t) + n(t), \tag{7.1}$$

где ν — параметр интенсивности сигнала.

Задача обнаружения состоит в проверке гипотезы об отсутствии сигнала ($\nu = 0$) против альтернативы о его наличии ($\nu > 0$).

Будем полагать, что колебание помехи представимо в форме

$$n(t) = \sigma\eta(t) + \mu, \tag{7.2}$$

где $\eta(t)$ — стационарный случайный процесс с нулевым средним, единичной дисперсией и одномерной плотностью распределения $W(y)$; μ, σ — неизвестные мешающие параметры сдвига и масштаба одномерного распределения помехи. Очевидно, что μ представляет собой постоянную составляющую, а σ^2 — интенсивность флуктуаций колебания помехи.

Образуем последовательность дискретных выборок с независимыми элементами путем фиксациии в моменты времени t_{ij} значений x_{ij} наблюдаемого процесса:

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ij}, \ldots, x_{in}), \tag{7.3}$$

где i — номер выборки; $n = n_i$ — число элементов в i-й выборке $n_i \to \infty$ при $i \to \infty$; j — номер элемента в выборке, $1 \leqslant j \leqslant n_i$.

Обозначив $s_{ij} = s(t_{ij})$, $\eta_{ij} = \eta(t_{ij})$, представим элементы выборок в форме

$$x_{ij} = \nu s_{ij} + \sigma\eta_{ij} + \mu. \tag{7.4}$$

Пусть плотность распределения помехи $W(y)$ принадлежит непараметрическому классу $\mathcal{P}$ нормированных и центрированных плотностей с конечным количеством информации Фишера

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{W'(y)}{W(y)}\right]^2 W(y)\,dy, \tag{7.5}$$

а выборочные значения сигнала удовлетворяют ограничениям

$$\lim_{i\to\infty}\left\{\left[\max_{1\leqslant j\leqslant n}(s_{ij}-\bar{s}_i)^2\right]\left[\sum_{j=1}^{n}(s_{ij}-\bar{s}_i)^2\right]^{-1}\right\}=0; \tag{7.6}$$

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{n}(s_{ij}-\bar{s}_i)^2=1, \tag{7.7}$$

где

$$\bar{s}_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}s_{ij} \tag{7.8}$$

— постоянная составляющая сигнала в i-й выборке.

Допущение (7.6) означает, что вклад в полную энергию переменной составляющей сигнала любого из выборочных элементов переменной составляющей стремится к нулю с ростом объема выборки, что при выполнении некоторых дополнительных условий обеспечивает асимптотическую нормальность распределений статистик при $i \to \infty$.

Условие (7.7) следует из предположения об ограниченности энергии переменной составляющей сигнала при любом объеме выборки и определяет скорость стремления к нулю значений выборочных элементов переменной составляющей сигнала. Это условие позволяет исключить сингулярные решения, связанные с ростом или убыванием энергии переменной составляющей сигнала при неограниченном возрастании объема выборки.

Определим φ-функцию Я. Гаека соотношением

$$\varphi(u) = -W'[F^{-1}(u)]/W[F^{-1}(u)], \quad 0 < u < 1, \tag{7.9}$$

где $W' = \partial W(x, \nu s)/\partial(\nu s)|_{\nu=0}$, $F^{-1}(u)$ — функция, обратная интегральной функции распределения $F(y) = \int_{-\infty}^{y} W(t)\,dt$.

Свойства φ-функций и результаты их вычисления для ряда конкретных плотностей рассмотрены в [107, 268].

Обозначим R_{ij} ранги элементов i-й выборки и образуем ранговые статистики

$$Z_i^{\mathrm{p}} = \sum_{j=1}^{n} (s_{ij} - \bar{s}_i)\,\varphi_i[R_{ij}/(n+1)], \tag{7.10}$$

где $\varphi_i(u) = \varphi_i[j/(n+1)]$, $(j-1)/n < u < j/n$ — ступенчатая функция, обладающая свойством

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^1 [\varphi_i(u) - \varphi(u)]^2\,du = 0.$$

В дальнейшем будем полагать, что ступенчатые функции определяются выражением

$$\varphi_i[j/(n+1)] = \varphi[j/(n+1)], \tag{7.11}$$

которое справедливо, когда φ-функции непрерывны и ограничены на интервале (0; 1). Если эти условия не выполняются, то можно воспользоваться другими представлениями ступенчатых функций [268], которые здесь рассматриваться не будут.

Согласно результатам [268] при введенных ограничениях критическая область

$$Z_i^{\mathrm{p}} > C(\alpha)\,I^{1/2} \tag{7.12}$$

обеспечивает асимптотически (при $i \to \infty$) равномерно (относительно ν, μ и σ) наиболее мощный критерий размера α для проверки гипотезы $\nu = 0$ против альтернативы $\nu > 0$. Постоянная $C(\alpha)$ определяется заданной величиной вероятности ложной тревоги и вычисляется по формуле

$$C(\alpha) = \Phi^{-1}(1-\alpha), \tag{7.13}$$

где $\Phi^{-1}(x)$ — функция, обратная интегралу вероятностей

$$\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt.$$

Вероятность правильного обнаружения (асимптотическая мощность критерия (7.12)) составляет

$$D = 1 - \Phi[C(\alpha) - (\nu/\sigma)I^{1/2}]. \tag{7.14}$$

Критерий (7.12) обеспечивает наибольшую мощность в классе всех возможных критериев и, следовательно, является асимптотически оптимальным критерием.

Подставив значения переменных в неравенство (7.12), учитывая (7.11) и опуская индексы i, получим

$$\sum_{j=1}^{n} (s_j - \bar{s})\, \varphi\,[R_j/(n+1)] \gtrless C(\alpha)\, I^{1/2}. \qquad (7.15)$$

Выражение (7.15) при $n \to \infty$, $\nu \to 0$ определяет общую форму структуры рангового асимптотически оптимального алгоритма обнаружения детерминированного сигнала.

На рис. 7.1 представлена структурная схема устройства, реализующего алгоритм (7.15). Весовые коэффициенты $(s_j - \bar{s})$, определяемые

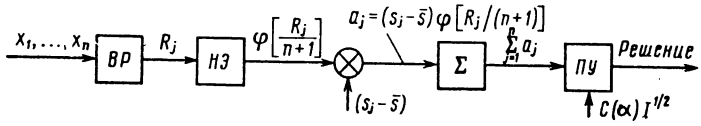


Рис. 7.1. Структурная схема асимптотически оптимального РО детерминированного сигнала

формой ожидаемого сигнала, следует нормировать согласно условию (7.7), что всегда можно сделать для сигнала произвольной интенсивности соответствующим выбором параметра ν. Характеристика нелинейного преобразователя $\varphi(u)$ определяется типом распределения помехи.

Соответствующие алгоритму (7.15) при $n \to \infty$, $\nu \to 0$ характеристики обнаружения определяются выражением (7.14), в котором D дает значение вероятности правильного обнаружения; величину вероятности ложной тревоги следует рассматривать, как обычно, в качестве параметра.

Количество информации Фишера I определяется только типом распределения помехи, поскольку класс $\mathcal{P}$ содержит нормированные центрированные плотности. Вычисление количества информации Фишера можно проводить по (7.5) или по эквивалентной ей формуле [268]:

$$I = \int_0^1 \varphi^2(u)\, du.$$

В частности, при нормальном распределении $I = 1$, при логистическом $I = \pi^2/9 \approx 1{,}1$ и при распределении Лапласа $I = 2$.

Рассмотрим далее задачу обнаружения квазидетерминированного сигнала, представимого в виде разложения

$$s(t) = \sum_{k=1}^{l} \theta_k\, b_k(t) \qquad (7.16)$$

по ортонормированной системе функций $b_k(t)$ со случайными параметрами θ_k при равномерном распределении вектора $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_l)$ на гиперсфере в пространстве параметров Ω, $k = 1, \ldots, l$.

Будем полагать, что выборочные значения сигнала

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^{l} \theta_k b_{ijk},$$

где $b_{ijk} = b_k(t_{ij})$ удовлетворяют ограничениям (7.6) и (7.7) и, кроме того, имеют место соотношения:

$$\sum_{j=1}^{n} [b_{ijk} - \bar{b}_{ik}][b_{ijq} - \bar{b}_{iq}] = 0 \text{ при } q \neq k; \tag{7.17}$$

$$\sum_{j=1}^{n} [b_{ijk} - \bar{b}_{ik}]^2 = 1 \quad \text{для всех } k,\ 1 \leqslant k \leqslant l, \tag{7.18}$$

$$\text{где } \bar{b}_{ik} = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} b_{ijk}.$$

Из сферической симметрии вектора $\boldsymbol{\theta}$ следует, что отношение правдоподобия в рассматриваемой задаче является [220] монотонной функцией модуля вектора достаточных статистик $|\mathbf{Z}_i|$, поэтому наиболее мощное решающее правило можно представить в виде

$$|\mathbf{Z}_i|^2 \gtrless C, \tag{7.19}$$

где C — постоянная. Одной из форм l-мерной асимптотически достаточной статистики является ранговая статистика [269]

$$\mathbf{Z}_i = [Z_{i1}, \ldots, Z_{il}], \tag{7.20}$$

компоненты которой с учетом принятых допущений представим в форме

$$Z_{ik}^{\mathrm{p}} = \sum_{j=1}^{n} [b_{ijk} - \bar{b}_{ik}]\, \varphi[R_{ij}/(n+1)].$$

При $i \to \infty$ статистика (7.20) имеет предельное l-мерное нормальное распределение. Учитывая, что радиус гиперсферы в соответствии с принятыми допущениями (7.7) и (7.18) равен единице, и используя результаты [1], можно показать, что корреляционная матрица предельного распределения имеет вид

$$\mathbf{A} = (a_{kq});\ a_{kq} = (I/\sigma^2) \lim_{i \to \infty} \sum_{j=1}^{n} [b_{ijk} - \bar{b}_{ik}][b_{ijq} - \bar{b}_{iq}].$$

Из условия (7.17) следует, что матрица $\mathbf{A}$ — диагональная, причем все элементы главной диагонали в соответствии с (7.18) равны (I/σ^2). Вектор средних равен 0 при $\nu = 0$ и составляет $\nu\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} = \nu\,(I/\sigma^2)\,\boldsymbol{\theta}$ при $\nu > 0$.

Статистика в левой части (7.19) при $\nu = 0$ имеет χ^2-распределение с l степенями свободы, а при $\nu > 0$ — нецентральное χ^2-распределение с l степенями свободы.

Вычисление параметров этих распределений позволяет определить постоянную C и вычислить асимптотическую мощность решающего правила (7.19).

Используя результаты указанных вычислений и опуская индексы i, приведем окончательные выражения, определяющие структуру

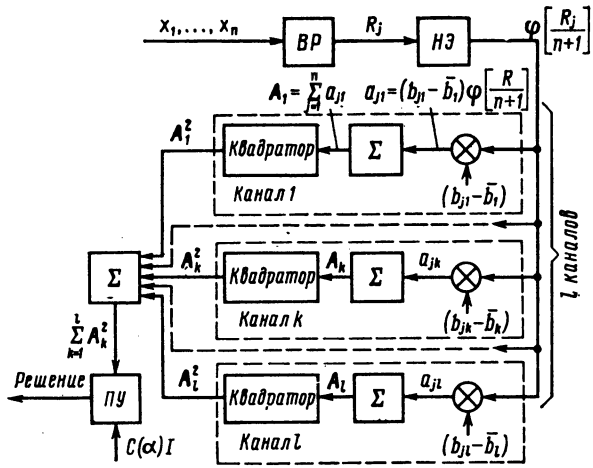


Рис. 7.2. Структурная схема асимптотически оптимального РО квазидетерминированного сигнала

асимптотически оптимального алгоритма обнаружения квазидетерминированного сигнала и соответствующие ему характеристики обнаружения:

$$\sum_{k=1}^{l}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[b_{jk}-\bar{b}_k\right]\varphi\left[R_j/(n+1)\right]\right\}^2 \gtrless C(\alpha)\,I\,; \tag{7.21}$$

$$D_\theta = 1-\Phi_l^{\text{н}}\left[C(\alpha),\,(\beta/\sigma)^2\,I\right], \tag{7.22}$$

где $\Phi_l^{\text{н}}(y,\,\delta^2)$ — интегральная функция нецентрального χ^2-распределения с l степенями свободы и параметром нецентральности δ.

Постоянная $C(\alpha)$ вычисляется по формуле

$$C(\alpha) = \Phi_l^{-1}(1-\alpha), \tag{7.23}$$

где $\Phi_l^{-1}(u)$ — функция, обратная интегральной функции распределения χ^2 с l степенями свободы.

Структурная схема устройства, реализующего алгоритм (7.21), представлена на рис. 7.2.

7.2. Знаково-ранговые обнаружители

Выделим из класса $\mathcal{P}$ нормированных и центрированных плотностей с конечным количеством информации Фишера подкласс $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{P}$ плотностей, симметричных относительно нуля, для которых $W(y) = W(-y)$, $-\infty < y < \infty$.

Пусть помеха не содержит постоянной составляющей ($\mu = 0$), а выборочные значения сигнала удовлетворяют ограничениям:

$$\lim_{i\to\infty}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} s_{ij}^2 \Big/ \sum_{j=1}^{n} s_{ij}^2\right\} = 0; \tag{7.24}$$

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{n} s_{ij}^2 = 1. \tag{7.25}$$

Используя теорему Я. Гаека о критериях симметрии [268], можно показать, что асимптотически оптимальный знаково-ранговый алгоритм обнаружения детерминированного сигнала имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} s_j \varphi\left[\frac{1}{2} + R_j^{\text{зр}}/2(n+1)\right] \operatorname{sign} x_j \gtrless C(\alpha) I^{1/2}, \tag{7.26}$$

где $R_j^{\text{зр}}$ — ранг элемента $|x_j|$ в последовательности $|x_1|, \ldots, |x_n|$, порог $C(\alpha)$ вычисляется по (7.13). Характеристики обнаружения, соответствующие этому алгоритму, определяются выражением (7.14).

Асимптотически оптимальный знаково-ранговый алгоритм обнаружения квазидетерминированного сигнала (7.16), удовлетворяющего условиям (7.24), и (7.25) и, кроме того, допущениям

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ijk} b_{ijq} = 0 \text{ при } q \neq k; \tag{7.27}$$

$$\sum_{j=1}^{n} [b_{ijk}]^2 = 1 \text{ для всех } k,\ 1 \leqslant k \leqslant l, \tag{7.28}$$

можно получить, используя в качестве l-мерной достаточной статистики знаково-ранговую статистику с компонентами

$$Z_{ik}^{\text{зр}} = \sum_{j=1}^{n} b_{ijk} \varphi\left[\frac{1}{2} + R_{ij}^{\text{зр}}/[2(n+1)]\right] \operatorname{sign} x_{ij}. \tag{7.29}$$

Вычислив параметры предельного l-мерного нормального распределения статистики (7.20) с компонентами (7.29) и далее предельных χ^2-распределений статистики в левой части выражения (7.19), можно показать, что структура асимптотически оптимального алгоритма обнаружения квазидетерминированного сигнала имеет вид

$$\sum_{k=1}^{l}\left\{\sum_{j=1}^{n} b_{ik} \varphi\left[\frac{1}{2} + R_j^{\text{зр}}/[2(n+1)]\right] \operatorname{sign} x_j\right\}^2 \gtrless C(\alpha) I, \tag{7.30}$$

где порог $C(\alpha)$ вычисляется по (7.13),

а характеристики обнаружения определяются выражением (7.22). Схемы обнаружителей (7.26) и (7.30) представлены в на рис. 7.3 и 7.4.

Выбирая различные плотности из класса $\mathcal{P}$ или $\mathcal{P}_0$ и вычисляя соответствующие им φ-функции по (7.9), можно получить ряд алгоритмов, асимптотически оптимальных по отношению к выбранным плотностям, путем подстановки значений φ-функций в общие выражения, определяющие структуру обнаружителей детерминированного или квазидетерминированного сигналов.

В частности, при действии детерминированного сигнала ранговый алгоритм типа Ван дер Вардена имеет структуру

$$\sum_{j=1}^{n} (s_j - \bar{s})\, \Phi^{-1}[R_j/(n+1)] \gtrless C(\alpha)\, I^{1/2}$$

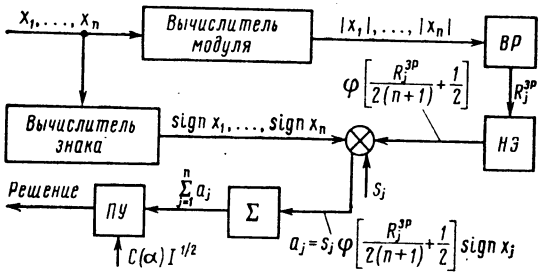


Рис. 7.3. Структурная схема знаково-рангового асимптотически оптимального обнаружителя детерминированного сигнала

и является асимптотически оптимальным для помехи с нормальной плотностью распределения

$$W(y) = (2\pi)^{-1/2}\, e^{-y^2/2}, \tag{7.31}$$

которой соответствует характеристика нелинейного преобразователя

$$\varphi(u) = \Phi^{-1}(u). \tag{7.32}$$

Ранговый алгоритм типа Вилкоксона является асимптотически оптимальным для помехи с логистической плотностью распределения

$$W(y) = (\pi/\sqrt{3})\,[1 + \exp(-\pi y/\sqrt{3})]^{-2} \exp(-\pi y/\sqrt{3}) \tag{7.33}$$

и имеет форму

$$\sum_{j=1}^{n} (s_j - \bar{s})\, R_j \gtrless \sqrt{3}\,(2\pi)^{-1}\,(n+1)\, C(\alpha)\, I^{1/2}.$$

Характеристика преобразователя функции рангов при логистической плотности оказывается линейной и имеет вид

$$\varphi(u) = (\pi/\sqrt{3})\,(2u - 1). \tag{7.34}$$

Используя выражения (7.26), (7.32) и (7.34), устанавливаем структуру знаково-ранговых алгоритмов типа Ван дер Вардена

$$\sum_{j=1}^{n} s_j \Phi^{-1}\left[\frac{R_j^{\text{зр}}}{2(n+1)}+\frac{1}{2}\right]\operatorname{sign} x_j \gtrless C(\alpha)\, l^{1/2}$$

и типа Вилкоксона

$$\sum_{j=1}^{n} s_j R_j^{\text{зр}} \operatorname{sign} x_j \gtrless (\sqrt{3}/\pi)\, C(\alpha)\, l^{1/2}(n+1),$$

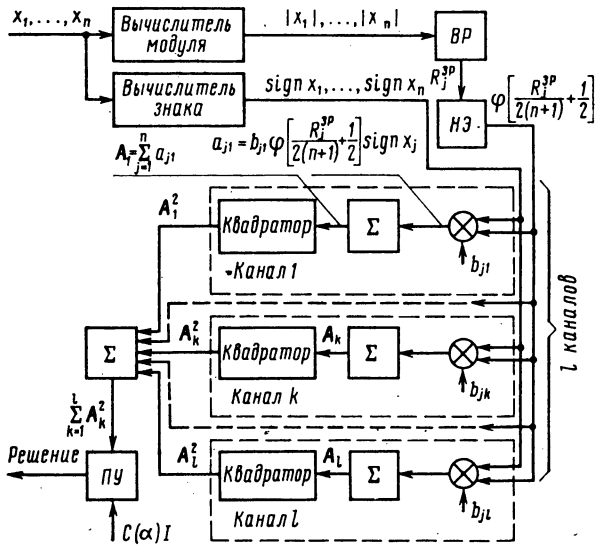


Рис. 7.4. Структурная схема знаково-рангового асимптотически оптимального обнаружителя квазидетерминированного сигнала

которые являются асимптотически оптимальными для соответствующих плотностей при отсутствии у помехи неизвестной постоянной составляющей.

Если помеха имеет плотность распределения Лапласа

$$W(y) = \exp\left(-\sqrt{2}\,|x|\right)/\sqrt{2}, \tag{7.35}$$

то вычисление характеристики нелинейного преобразователя дает

$$\varphi(u) = \sqrt{2}\operatorname{sign}(2u-1). \tag{7.36}$$

Подставив функцию (7.36) в (7.26) и учитывая, что $\operatorname{sign}[R_j^{\text{зр}}/(n+1)] = 1$, поскольку ранги есть целые положительные числа, получим алгоритм $\sum_{j=1}^{n} s_j \operatorname{sign} x_j \gtrless C(\alpha)$, асимптотически оптимальный для щума с распределением Лапласа при $\mu = 0$. Этот алгоритм использует только знаки элементов выборки и называется знаковым.

Структура асимптотически оптимальных непараметрических обнаружителей может быть конкретизирована и по отношению к определенным видам принимаемого сигнала. Широко известны знаковые и знаково-ранговые обнаружители постоянного сигнала [1], структуру которых легко установить и на основе указанных общих результатов.

7.3. Сравнение ранговых и знаково-ранговых обнаружителей

Сравнение структурных схем ранговых обнаружителей детерминированного (см. рис. 7.1) и квазидетерминированного (см. рис. 7.2) сигналов с соответствующими схемами знаково-ранговых обнаружителей (см. рис. 7.3 и 7.4) показывает, что оба типа обнаружителей имеют сходную структуру и содержат временные дискретизаторы, вычислители рангов, нелинейные преобразователи функций рангов, формирователи значений статистик и пороговые устройства.

Отличительной особенностью знаково-ранговых обнаружителей по сравнению с ранговыми является наличие нелинейного модульного преобразователя элементов выборки и канала формирования знаков; возникающее вследствие этого усложнение структуры может быть оправдано упрощением конструкции запоминающего устройства и вычислителя рангов, обусловленным сокращением динамического диапазона и однополярностью поступающих с выхода преобразователя элементов выборки. Поэтому следует ожидать приблизительно равных аппаратурных затрат при технической реализации ранговых и знаково-ранговых обнаружителей.

Существенное снижение объема аппаратуры по сравнению с ранговыми и знаково-ранговыми обнаружителями может быть достигнуто при использовании знаковых обнаружителей вследствие упрощения структуры, связанного с исключением запоминающего устройства, вычислителя рангов и нелинейного преобразователя.

Ранговые обнаружители фиксируют уровень ложных тревог при действии помехи с заданным или неизвестным значением постоянной составляющей и произвольным типом распределения из непараметрического класса $\mathcal{P}$. Знаково-ранговые обнаружители обеспечивают постоянство вероятности ложной тревоги при действии помехи с известным значением постоянной составляющей и произвольным типом плотности распределения из непараметрического класса симметричных плотностей $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{P}$. Непараметрические свойства знаковых обнаружителей имеют место в более широком по сравнению с $\mathcal{P}_0$ классе распределений, медиана которых равна 1/2 [1].

7.3.1. Асимптотическая эффективность

Пусть K_1 и K_2 — состоятельные обнаружители, используемые в одинаковых условиях и основанные на асимптотически нормальных статистиках Z_1 и Z_2 соответственно; при этом параметры предельных распределений статистики Z_1 равны: $(0, \sigma_1^2)$ при гипотезе и (μ_1, σ_1^2) при альтернативе, а статистики Z_2 — $(0, \sigma_2^2)$ при гипотезе и (μ_2, σ_2^2) при аль-

тернативе. Асимптотическая относительная эффективность обнаружителя K_1 по отношению к обнаружителю K_2 характеризуется коэффициентом [1, 107]

$$\rho\,(K_1,\ K_2) = [\,(\mu_1\sigma_2)/\,(\mu_2\sigma_1)]^2. \tag{7.37}$$

Если статистики Z_1 и Z_2 при справедливости гипотезы имеют предельные χ^2-распределения с одинаковым числом степеней свободы $l > 1$, а при справедливости альтернативы — нецентральные χ^2-распределения с тем же числом степеней свободы l и параметрами нецентральности δ_1 и δ_2 соответственно, то коэффициент асимптотической относительной эффективности [107]

$$\rho\,(K_1,\ K_2) = (\delta_1/\delta_2)^2. \tag{7.38}$$

Асимптотической эффективностью обнаружителя K называется асимптотическая относительная эффективность этого обнаружителя по отношению к обнаружителю, асимптотически оптимальному для рассматриваемой задачи обнаружения. Очевидно, что асимптотическая эффективность равна единице, если K — асимптотически оптимальный обнаружитель, и меньше единицы в других случаях.

Если $\rho\,(K_1)$ и $\rho\,(K_2)$ — значения асимптотической эффективности обнаружителей K_1 и K_2 в определенных условиях, то асимптотическая относительная эффективность обнаружителя K_1 по отношению к обнаружителю K_2 в тех же условиях составит

$$\rho\,(K_1,\ K_2) = \rho\,(K_1)/\rho\,(K_2). \tag{7.39}$$

Можно показать [107], что применение обнаружителя K, имеющего в определенных условиях функционирования асимптотическую эффективность ρ, вместо оптимального для этих условий обнаружителя ведет к таким же потерям в значении вероятности обнаружения, как и замена сигнала $vs\,(t)$ на сигнал $\rho^{1/2}\,vs\,(t)$ при использовании оптимального обнаружителя.

Во многих случаях асимптотическая эффективность может рассматриваться как предел отношения объемов выборок, используемых оптимальным обнаружителем и обнаружителем K для достижения одной и той же вероятности обнаружения D при прочих равных условиях [1, 107].

Рассмотрим ситуацию, в которой фактически принимаемый сигнал $s_*\,(t)$ отличается от ожидаемого сигнала $s\,(t)$, определяющего выбор весовых коэффициентов в алгоритмах обнаружителей, а тип плотности фактически действующей помехи $W_*(y)$ отличается от типа плотности ожидаемой помехи $W\,(y)$, определяющего характеристику нелинейного преобразователя.

Степень подобия ожидаемого и принимаемого детерминированных сигналов будем характеризовать коэффициентами корреляции

$$\widetilde{r}_s = \left[\sum_{j=1}^{n} (s_j - \bar{s})\,(s_{j*} - \bar{s}_*)\right]\left[\sum_{j=1}^{n} (s_j - \bar{s})^2\right]^{-1/2}\left[\sum_{j=1}^{n} (s_{j*} - \bar{s}_*)^2\right]^{-1/2}, \tag{7.40}$$

если сигналы s и s_* удовлетворяют условиям (7.6), (7.7) и $\tilde{r}_s > 0$, и

$$\widehat{r_s} = \left[\sum_{j=1}^{n} s_j s_{j*}\right]\left[\sum_{j=1}^{n} s_j^2\right]^{-1/2}\left[\sum_{j=1}^{n} (s_{j*})^2\right]^{-1/2}, \qquad (7.41)$$

если сигналы s и s_* удовлетворяют условиям (7.24), (7.25) и $\hat{r}_s > 0$.

Степень близости плотностей ожидаемой и фактически действующей помех будем характеризовать коэффициентом корреляции

$$r_\eta = \left[\int_0^1 \varphi(u)\,\varphi_*(u)\,du\right](II_*)^{-1/2}, \qquad (7.42)$$

где $\varphi(u)$, $\varphi_*(u)$ — φ-функции, соответствующие плотностям $W(y)$ и $W_*(y)$, а I и I_* — соответствующие этим плотностям значения количества информации Фишера.

Пусть ранговый обнаружитель (7.15), асимптотически оптимальный для детерминированного сигнала s и помехи с плотностью W, используется для обнаружения сигнала s_* на фоне помехи с плотностью $W_* \in \mathcal{P}$. Полагая, что условия § 7.1 для сигнала s удовлетворяются и, кроме того, $\tilde{r}_s$, $r_\eta > 0$, можно показать на основании результатов [1], [107], что распределение статистики рангового обнаружителя будет асимптотически нормальным с параметрами $(0, \sigma_z^2)$ при гипотезе и (μ_z, σ_*^2) при альтернативе; при этом

$$\mu_z/\sigma_z = (\nu/\sigma)\, I^{1/2}\, r_\eta \tilde{r}_s. \qquad (7.43)$$

Обнаружитель вида (7.15), асимптотически оптимальный для сигнала s_* и помехи с плотностью w_*, имеет предельное нормальное распределение статистики с параметрами $(0, \sigma_*^2)$ при гипотезе и (μ_*, σ_*^2) при альтернативе. Из (7.14) следует

$$(\mu_*/\sigma_*) = (\nu/\sigma) I^{1/2}. \qquad (7.44)$$

Используя соотношения (7.37), (7.43) и (7.44), получаем:

$$\rho = r_s^2 r_\eta^2; \qquad (7.45)$$

$$D_* = 1 - \Phi\,[C(\alpha) - (\nu/\sigma) r_s r_\eta I^{1/2}], \qquad (7.46)$$

где $r_s = \tilde{r}_s$. Полученные выражения определяют асимптотическую эффективность и характеристики обнаружения рангового обнаружителя детерминированного сигнала, асимптотически оптимального для сигнала s и помехи с плотностью W, при его использовании для обнаружения сигнала s_* на фоне помехи с плотностью W_*.

Аналогично можно показать, что асимптотическая эффективность и характеристики обнаружения знаково-рангового обнаружителя, асимптотически оптимального для детерминированного сигнала s и помехи с плотностью $W \in \mathcal{P}_0$, при его использовании для обнаружения сигнала s_*, удовлетворяющего ограничениям § 7.2, на фоне помехи с плотностью $W_* \in \mathcal{P}_0$ также определяются выражениями (7.45) и (7.46) при $r_s = \hat{r}_s$, если $\hat{r}_s$, $r_\eta > 0$.

Рассмотрим далее ранговый обнаружитель (7.21), асимптотически оптимальный для задачи обнаружения квазидетерминированного сигнала (7.16) на фоне помехи с плотностью $W \in \mathcal{P}$. Предположим, что этот обнаружитель используется для обнаружения другого квазидетерминированного сигнала

$$s_*(t) = \sum_{k=1}^{l} \theta_k b_{*k}(t), \tag{7.47}$$

где функции $b_{*k}(t)$ удовлетворяют тем же ограничениям, что и функции $b_k(t)$.

Введем коэффициенты корреляции:

$$\tilde{r}_{s\theta k} = \left\{\sum_{j=1}^{n} [b_{jk} - \bar{b}_k][b_{j*k} - \bar{b}_{*k}]\right\}\left\{\sum_{j=1}^{n} [b_{jk} - \bar{b}_k]^2\right\}^{-1/2} \times \times \left\{\sum_{j=1}^{n} [b_{j*k} + \bar{b}_{*k}]^2\right\}^{-1/2}; \tag{7.48}$$

$$\hat{r}_{s\theta k} = \left\{\sum_{j=1}^{n} b_{jk} b_{j*k}\right\}\left\{\sum_{j=1}^{n} [b_{jk}]^2\right\}^{-1/2}\left\{\sum_{j=1}^{n} [b_{j*k}]^2\right\}^{-1/2}. \tag{7.49}$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением систем функций, для которых

$$\tilde{r}_{s\theta k} = \tilde{r}_{s\theta} > 0; \ \hat{r}_{s\theta k} = \hat{r}_{s\theta} > 0. \tag{7.50}$$

Используя результаты вычислений параметров предельных распределений статистик обнаружителей квазидетерминированного сигнала (см. § 7.1, 7.2) с учетом соотношений (7.48), (7.49) и (7.50), можно показать, что асимптотическая эффективность обнаружителей квазидетерминированного сигнала в рассматриваемой ситуации будет определяться выражением

$$\rho_\theta = r_{s\theta}^2 r_\eta^2, \tag{7.51}$$

а характеристики обнаружения — выражением

$$D_\theta = 1 - \Phi_l^{\text{н}}[C(\alpha), (\nu/\sigma)^2 r_{s\theta}^2 r_\eta^2 I]. \tag{7.52}$$

В (7.51) и 7.52) следует положить $r_{s\theta} = \tilde{r}_{s\theta}$ для рангового и $r_{s\theta} = \hat{r}_{s\theta}$ для знаково-рангового обнаружителей.

Заметим, что мы исключили из рассмотрения ситуации, в которых r_s, $r_\eta < 0$. Примеры таких ситуаций легко привести. В частности, для детерминированных сигналов s и $s_* = -s$ коэффициент корреляции $r_s = -1$. В [268] вычислен отрицательный коэффициент корреляции r_η для немонотонных φ-функций, соответствующих плотностям W и W_*.

При отрицательных коэффициентах корреляции рассмотренные обнаружители могут быть смещенными и несостоятельными; при этом

вероятность обнаружения оказывается меньше вероятности ложной тревоги и с ростом сигнала стремится к нулю. Очевидно, что вычисление асимптотической эффективности обнаружителей в подобных ситуациях теряет смысл.

Подставив значения φ-функций из (7.32), (7.34) и (7.36) в (7.42), с учетом (7.45) можно показать [270], что асимптотическая эффективность обнаружителей типа Ван дер Вардена, типа Вилкоксона и знакового составит соответственно

$$\rho = r_s^2 I_*^{-1} \left[\int_0^1 \Phi^{-1}(u)\, \varphi_*(u)\, du \right]^2; \tag{7.53}$$

$$\rho = 12 r_s^2 I_*^{-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} W_*^2(y)\, dy \right]^2; \tag{7.54}$$

$$\rho = 4 r_s^2 I_*^{-1} W_*^2(0). \tag{7.55}$$

Эти выражения характеризуют асимптотическую эффективность ранговых обнаружителей при $r_s = \tilde{r}_s$, $W_* \in \mathcal{P}$ и знаково-ранговых — при $\mu = 0$, $r_s = \tilde{r}_s$, $W_* \in \mathcal{P}_0$.

В частности, для гауссовой помехи с плотностью (7.31)

$$\varphi_*(u) = \Phi^{-1}(u);\ I_* = 1,\ W_*(0) = (2\pi)^{-1/2}. \tag{7.56}$$

Подстановка этих значений в (7.53), (7.54) и (7.55) позволяет вычислить асимптотическую эффективность обнаружителей типа Ван дер Вардена, типа Вилкоксона и знакового; при $r_s = 1$ значение асимптотической эффективности составляет соответственно 1, $3/\pi \approx 0{,}95$ и $2/\pi \approx 0{,}64$, что согласуется с ранее известными результатами, полученными для частных видов указанных обнаружителей [1].

7.3.2. Устойчивость обнаружителей

В реальных условиях функционирования характеристики принимаемых сигналов и действующих шумов могут отличаться от предполагаемых, при этом возможны утрата непараметрических свойств и снижение эффективности обнаружителей. Устойчивость обнаружителей по отношению к изменениям сигналов и шумов можно характеризовать асимптотической эффективностью при условии сохранения непараметрических свойств.

Анализ устойчивости выполним в предположении, что сигнал детерминирован; полученные результаты остаются справедливыми и по отношению к квазидетерминированному сигналу, однако соответствующие этому случаю выкладки не приводятся во избежание повторений и излишней громоздкости.

Пусть ожидаемый сигнал s не содержит постоянной составляющей ($\bar{s} = 0$) и удовлетворяет ограничениям (7.6), (7.7) и, следовательно, ограничениям (7.24), (7.25), а ожидаемый шум имеет плотность типа $W \in \mathcal{P}$ и не содержит неизвестной постоянной составляющей. Не снижая общности, можно положить $\mu = 0$, поскольку известная ненуле-

вая постоянная составляющая может быть скомпенсирована очевидным образом.

Наложенные ограничения определяют исходную модель сигнала и помехи.

Для принятой исходной модели могут быть построены ранговый $K_{\text{р}}$ и знаково-ранговый $K_{\text{зр}}$ асимптотически оптимальные обнаружители, при этом структура рангового алгоритма определяется выражением (7.15) при $\bar{s} = 0$, а знаково-рангового — непосредственно выражением (7.26). Асимптотическая оптимальность алгоритма (7.15) при $\bar{s} = 0$ была установлена Б. Р. Левиным [1]. Из результатов [268] следует, что при отсутствии у шума постоянной составляющей условие $\bar{s} = 0$ является необходимым для достижения асимптотической оптимальности.

Полагая, что весовые коэффициенты s_j в алгоритмах (7.15), (7.26) соответствуют форме ожидаемого сигнала s, а характеристики нелинейных преобразователей — заданному типу плотности W, рассмотрим несколько характерных ситуаций, возникающих при действии на обнаружители сигналов и помех, отличающихся от принятых в исходной модели.

Ситуации 1. Принимаемый сигнал $s_* \neq s$, тип плотности действующей помехи $W_* \neq W$, $W_* \in \mathcal{P}_0$, постоянные составляющие сигнала и помехи $\bar{s}_* = \mu_* = 0$.

Вычисление коэффициентов корреляции по (7.40), (7.41) дает $r_s = \tilde{r}_s = \hat{r}_s$. Следовательно, для всех сигналов и плотностей, при которых r_s, $r_\eta > 0$, асимптотическая эффективность рангового и знаково-рангового обнаружителей оказывается одинаковой и составляет

$$\rho_{\text{р}} = \rho_{\text{зр}} = r_s^2 r_\eta^2. \tag{7.57}$$

Поскольку оба типа обнаружителей сохраняют непараметрические свойства при действии помех с любыми типами плотностей из класса $\mathcal{P}_0$, равенство (7.57) свидетельствует об одинаковой устойчивости рангового и знаково-рангового обнаружителей к изменениям сигналов и помех в рассматриваемой ситуации.

В подклассе плотностей ($\mathcal{P} - \mathcal{P}_0$) непараметрические свойства сохраняет только ранговый обнаружитель, и его асимптотическая эффективность по-прежнему определяется соотношением (7.57).

Ситуация 2. Принимаемый сигнал отличается от ожидаемого наличием ненулевой постоянной составляющей $\bar{s}_* = s_* - s \neq 0$.

При $\mu_* = 0$ и $\hat{s}_* \neq 0$ ранговый обнаружитель теряет свойство асимптотической оптимальности, а выбор характеристики нелинейного преобразователя соответственно плотности действующего шума обеспечивает ему наибольшую эффективность только в классе ранговых обнаружителей; достигаемая при этом асимптотическая эффективность определяется выражением

$$\rho_{\text{р}} = 1 - \varepsilon, \tag{7.58}$$

где

$$\varepsilon = P_0 / P_{\text{ср}} \tag{7.59}$$

— отношение мощности постоянной составляющей $P_0 = (\overline{s_*})^2$ к средней мощности сигнала

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} s_{j*}^2. \tag{7.60}$$

Для вывода (7.58) достаточно вычислить асимптотическую относительную эффективность рангового обнаружителя относительно оптимального обнаружителя Неймана—Пирсона. Это вычисление можно выполнить на основе определения (7.37), поскольку характеристики обнаружения оптимального и рангового обнаружителей имеют одинаковую форму, однако вероятность обнаружения у оптимального обнаружителя в отличие от рангового, определяется полной энергией сигнала, а не только энергией переменной составляющей.

Для оценки эффективности знаково-рангового обнаружителя вычислим коэффициент корреляции $\hat{r}_s$ сигналов s и $s_* = s + \overline{s_*}$ по формуле (7.41). Получаем $\hat{r} = (1 - \varepsilon)^{1/2}$ и далее, используя (7.45), находим асимптотическую эффективность знаково-рангового обнаружителя в рассматриваемой ситуации $\rho_{\text{зр}} = 1 - \varepsilon$, значение которой совпадает с результатом (7.58), полученным для рангового обнаружителя. Отсюда следует вывод об одинаковой устойчивости рангового и знаково-рангового обнаружителей по отношению к действию неизвестной постоянной составляющей сигнала.

Если постоянная составляющая принимаемого сигнала известна, то асимптотическая эффективность знаково-рангового обнаружителя может быть повышена до единицы заменой весовых коэффициентов s_j в (7.26) на коэффициенты $s_{j*} = s_j + \overline{s_*}$, в то время как эффективность рангового алгоритма (7.15) не может быть увеличена. В этом случае асимптотическая относительная эффективность знаково-рангового алгоритма по отношению к ранговому, вычисленная по (7.39), составит

$$\rho\,(K_{\text{зр}}, K_{\text{р}}) = (1 - \varepsilon)^{-1}. \tag{7.61}$$

Следовательно, знаково-ранговый обнаружитель оказывается эффективнее рангового, если принимаемый сигнал содержит известную ненулевую постоянную составляющую, поскольку $\rho\,(K_{\text{зр}}, K_{\text{р}}) > 1$ при $\varepsilon > 0$.

В частности, при обнаружении постоянного сигнала известной интенсивности $s_{j*} = \overline{s_*}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $\varepsilon = 1$ и асимптотическая относительная эффективность $\rho\,(K_{\text{зр}}, K_{\text{р}}) = \infty$, при этом асимптотическая эффективность рангового обнаружителя падает до нуля, в то время как знаково-ранговый обнаружитель осуществляет асимптотически оптимальное обнаружение.

Ситуация 3. Сигнал и шум содержат неизвестные постоянные составляющие $\mu_* \neq 0$, $\overline{s_*} \neq 0$.

В данной ситуации знаково-ранговый обнаружитель теряет непараметрические свойства ввиду зависимости знаков и рангов абсолютных значений элементов выборки (7.4) от значения и знака постоянной составляющей помехи.

Ранговый обнаружитель в рассматриваемых условиях сохраняет непараметрические свойства и является асимптотически оптимальным обнаружителем вне зависимости от того, содержит сигнал ненулевую (возможно, неизвестную) постоянную составляющую ($\overline{s}_* \neq 0$) или нет ($\overline{s}_* = 0$), при этом вероятность обнаружения сигнала зависит только от интенсивности его переменной составляющей.

Если принимаемый сигнал приближается к постоянному вследствие снижения интенсивности переменной составляющей ($s_* \to \overline{s}$, $\overline{s} = \text{const}$), то, как следует из (7.7) и (7.14), $D \to \alpha$, что означает утрату ранговым обнаружителем свойства состоятельности. Поскольку ранговый обнаружитель в рассматриваемых условиях является асимптотически оптимальным обнаружителем в классе всех возможных, а не только ранговых обнаружителей, то потеря им состоятельности может рассматриваться как следствие принципиальной невозможности обнаружения постоянного сигнала на фоне помехи с неизвестной постоянной составляющей.

Ситуация 4. Если помеха имеет несимметричную плотность $W_* \in \in (\mathcal{P} - \mathcal{P}_0)$ с известной постоянной составляющей $\mu \neq 0$, а сигнал содержит ненулевую постоянную составляющую ($\overline{s} \neq 0$), то построение асимптотически оптимальных непараметрических обнаружителей описанными методами оказывается невозможным, поскольку знаково-ранговые алгоритмы теряют непараметрические свойства вследствие асимметрии распределения, а эффективность ранговых алгоритмов оказывается пониженной (меньше единицы) из-за влияния постоянной составляющей сигнала. Представляется весьма вероятным, что в данных условиях асимптотически оптимального непараметрического алгоритма, основанного на знаках и рангах элементов наблюдаемой выборки, вообще не существует. Ввиду того что при проектировании непараметрических обнаружителей именно непараметрическим свойствам придается важное значение, в рассматриваемых условиях более приемлемым оказывается использование ранговых обнаружителей, особенно в случаях, когда энергия постоянной составляющей мала по сравнению с полной энергией сигнала ($\varepsilon \ll 1$), что характерно при использовании импульсных сигналов. Возникающие при этом потери невелики, а непараметрические свойства сохраняются в широком классе плотностей $\mathcal{P}$.

Результаты проведенного анализа устойчивости ранговых и знаково-ранговых алгоритмов обнаружения сигналов, хотя и не являются исчерпывающими, могут оказаться полезными при решении вопросов о целесообразности применения непараметрических обнаружителей в информационных системах различного назначения, а также выборе типа и параметров непараметрических обнаружителей.

7.3.3. Гарантированные характеристики обнаружения

Фиксация уровня ложных тревог в широких классах распределений помех является ценным качеством непараметрических обнаружителей. Однако заданное качество функционирования информационной

системы, включающей в свой состав обнаружители, и при фиксированном уровне ложных тревог может быть достигнуто лишь тогда, когда вероятность обнаружения сигнала оказывается не ниже определенного минимума. И если для шума с произвольным распределением из определенного непараметрического класса вероятность ложной тревоги известна и равна заданному фиксированному значению, то вероятность обнаружения оказывается в значительной степени зависящей от конкретного вида функции распределения шума; отклонение формы фактически принимаемого сигнала от ожидаемой ведет к дополнительному снижению вероятности обнаружения.

Для правильного выбора структуры и параметров информационной системы при ее проектировании, а также для оценки возможностей использования системы в различных ситуациях целесообразно определить условия, при которых вероятность обнаружения сигналов оказывается не ниже заданного уровня.

Будем характеризовать условия функционирования обнаружителя K заданием класса возможных принимаемых сигналов $\mathbf{S}_*$, содержащего как ожидаемый сигнал s, так и отличающиеся от s (например, вследствие воздействия дестабилизирующих факторов) сигналы s_*, и подкласса плотностей помех $\mathcal{P}_*$, содержащего ожидаемую плотность W и отличающиеся от нее плотности W_*. Будем полагать, что $\mathcal{P}_* \in \mathcal{P}$ или $\mathcal{P}_* \in \mathcal{P}_0$ в зависимости от типа исследуемого обнаружителя.

Пусть $D_*(\alpha, q)$ есть характеристика обнаружения сигнала $s_* \in \mathbf{S}_*$ на фоне помехи с плотностью $W_* \in \mathcal{P}_*$ обнаружителем K, где α обозначает вероятность ложной тревоги, а $q = \nu/\sigma$ есть отношение сигнал-шум.

Определим гарантированную характеристику обнаружения сигналов [281] класса $\mathbf{S}_*$ на фоне помех с плотностями из подкласса $\mathcal{P}_*$ в виде функции $D_{\text{гар}}(\alpha, q)$, обладающей следующими свойствами

$$D_{\text{гар}}(\alpha, q) \geqslant \alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 \leqslant q \leqslant \infty; \tag{7.62}$$

$$D_{\text{гар}}(\alpha, q) \to 1 \text{ при } q \to \infty, \quad \alpha = \text{const} > 0; \tag{7.63}$$

$$D_{\text{гар}}(\alpha, q) \leqslant D_*(\alpha, q) \text{ при любых } \alpha, \ 0 < \alpha < 1, \ q, \ 0 \leqslant q < \infty,$$

$$s_* \in \mathbf{S}_* \text{ и } W_* \in \mathcal{P}_*. \tag{7.64}$$

Если обнаружитель K при всех сигналах s_* и плотностях W_* является состоятельным, то гарантированные характеристики обнаружения всегда существуют, но не определяются однозначно.

Пусть $D'_{\text{гар}}(\alpha, q)$ и $D''_{\text{гар}}(\alpha, q)$ — две различные гарантированные характеристики обнаружения. Будем называть характеристику $D'_{\text{гар}}$ равномерно лучшей характеристики $D''_{\text{гар}}$ в области Γ значений α и q, если в этой области выполняются соотношения

$$D'_{\text{гар}}(\alpha, q) \geqslant D''_{\text{гар}}(\alpha, q) \text{ для всех } (\alpha, q) \in \Gamma;$$

$$D'_{\text{гар}}(\alpha, q) > D''_{\text{гар}}(\alpha, q) \text{ для некоторых } (\alpha, q) \in \Gamma.$$

Гарантированную характеристику обнаружения, для которой не существует равномерно лучшей в области всех возможных значений α и q, $0 < \alpha < 1$, $0 \leqslant q < \infty$, будем называть наилучшей.

Из этого определения и неравенства (7.64) следует, что наилучшая гарантированная характеристика обнаружения содержит точки, совпадающие с точками характеристик обнаружения $D_*(\alpha, q)$ некоторых сигналов $s_* \in \mathbf{S}_*$ на фоне помех с конкретными плотностями $W_* \in \mathcal{P}_*$, при этом каждой точке наилучшей гарантированной характеристики обнаружения соответствуют такие сочетания s_* и W_*, при которых вероятность обнаружения минимальна. Иначе говоря, наилучшая гарантированная характеристика обнаружения может быть определена соотношением

$$D^{\text{н}}_{\text{гар}}(\alpha, q) = \inf_{\substack{s_* \in \mathbf{S}_* \\ W_* \in \mathcal{P}_*}} D_*(\alpha, q),\ 0 < \alpha < 1,\ 0 \leqslant q < \infty. \quad (7.65)$$

Если $D'_{\text{гар}}$ и $D''_{\text{гар}}$ — гарантированные характеристики обнаружения и $D'_{\text{гар}}$ равномерно лучше $D''_{\text{гар}}$ в области Γ_1 значений α и q, а $D''_{\text{гар}}$ равномерно лучше $D'_{\text{гар}}$ в другой области Γ_2, то гарантированная характеристика обнаружения $D'''_{\text{гар}}$, равномерно лучшая $D'_{\text{гар}}$ и $D''_{\text{гар}}$ в объединенной области $\Gamma_3 = \Gamma_1 + \Gamma_2$, определяется соотношением

$$D'''_{\text{гар}}(\alpha, q) = D'_{\text{гар}}(\alpha, q),\ (\alpha, q) \in \Gamma_1;$$

$$D'''_{\text{гар}}(\alpha, q) = D''_{\text{гар}}(\alpha, q),\quad (\alpha, q) \in \Gamma_2.$$

Пусть ранговый обнаружитель (7.15), асимптотически оптимальный для сигнала s и плотности W, используется для обнаружения сигнала $s_* \in \mathbf{S}_*$ на фоне шума с плотностью $W_* \in \mathcal{P}_*$. Тогда в соответствии с (7.46) характеристики обнаружения имеют форму

$$D_*(\alpha, q) = 1 - \Phi(C(\alpha) - \tilde{q}), \quad (7.66)$$

где $\tilde{q} = q\tilde{r}_s r_\eta I^{1/2}$. (7.67)

Величину q будем называть обобщенным отношением сигнал-шум по переменной составляющей.

Соотношение (7.66) показывает, что вероятность обнаружения $D_*(\alpha, q)$ является монотонной функцией обобщенного отношения сигнал-шум. При фиксированных значениях α и q вероятность обнаружения достигает минимума при таких значениях s_* и W_*, которым соответствует минимум величины $a = \tilde{r}_s r_\eta I^{1/2}$, называемой в дальнейшем параметром отношения сигнал-шум. Параметр отношения сигнал-шум можно представить в форме $a = \tilde{r}_s a_\eta$, где

$$a_\eta = r_\eta I_*^{1/2}. \quad (7.68)$$

При фиксированной структуре обнаружителя $\tilde{r}_s$ зависит только от принимаемого сигнала s_*, а a_η — только от плотности действующего шума W_*. Поэтому для отыскания глобального минимума параметра

отношения сигнал-шум достаточно найти минимумы величин r_s и a_η в отдельности.

Вычисление минимума $\widetilde{r}_{s\min}$ коэффициента корреляции сводится к отысканию минимума функции m переменных s_{j*} или, при достаточно малом шаге дискретизации, минимума соответствующего функционала

$$\widetilde{r}_s = \left\{\frac{1}{T}\int_0^T [s(t)-\overline{s}]\,[s_*(t)-\overline{s_*}]\,dt\right\}\left(\widetilde{P}\,\widetilde{P}_*\right)^{-\frac{1}{2}},$$

где $\overline{s}=\frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,dt$, $\overline{s_*}=\frac{1}{T}\int_0^T s_*(t)\,dt$;

$$\widetilde{P}=\frac{1}{T}\int_0^T [s(t)-\overline{s}]^2\,dt;\ \widetilde{P}_*=\frac{1}{T}\int_0^T [s_*(t)-\overline{s_*}]^2\,dt.$$

Для определения минимума $a_{\eta\min}$ величины a_η достаточно вычислить минимум функционала

$$a_\eta = I_*^{-\frac{1}{2}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{W'[F^{-1}F_*(x)]}{W[F^{-1}F_*(x)]}\cdot\frac{W_*'(x)}{W_*(x)}W(x)\,dx\right],$$

полученного подстановкой значения r_η из (7.42) в (7.68) и заменой переменной $u = F_*(x)$, при условиях ограниченности количества информации Фишера для плотности W_* и нормировании и неотрицательности этой плотности.

Определив глобальный минимум параметра отношения сигнал-шум $a_{\min} = \widetilde{r}_{s\min} a_{\eta\min}$ и используя определение (7.65), можно написать аналитическое выражение для семейства наилучших гарантированных характеристик обнаружения в форме

$$D^{\text{н}}_{\text{гар}} = 1-\Phi\left(C(\alpha)-qa_{\min}\right), \tag{7.69}$$

справедливое при любых α, $0<\alpha<1$ и q, $0\leqslant q<\infty$.

Аналогично можно показать, что наилучшие гарантированные характеристики обнаружения знаково-рангового обнаружителя также определяются соотношением (7.69), если параметр отношения сигнал-помеха определять по формуле $a = \widehat{r}_s r_\eta I^{1/2}$.

Таким образом, построение гарантированных характеристик обнаружения непараметрических обнаружителей сводится к отысканию минимума параметра отношения сигнал-шум. Этот параметр может быть представлен в виде произведения двух функционалов, один из которых зависит только от формы принимаемых сигналов, а другой — только от плотности действующего шума.

В отдельных случаях, связанных с возможностью представления вероятности обнаружения в виде функции многих переменных, зави-

сящей от одного случайного параметра, построение гарантированных характеристик обнаружения непараметрических обнаружителей можно выполнить, используя неравенство Чебышева.

Для иллюстрации этой идеи определим гарантированные характеристики обнаружения знакового обнаружителя постоянного сигнала $s_j = 1$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Алгоритм обнаружения представим в традиционной форме

$$\sum_{j=1}^{n} h(x_j) \gtrless C, \tag{7.70}$$

где $h(x)$ — функция единичного скачка; порог C связан с фиксируемым значением вероятности ложной тревоги уравнением

$$\alpha = \sum_{k=C+1}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Характеристики обнаружения знакового обнаружителя (7.70) имеют вид

$$D_{\text{з}}(C, p_{\text{с}}) = \sum_{k=C+1}^{n} C_n^k \, p_{\text{с}}^k (1-p_{\text{с}})^{n-k},$$

где $p_{\text{с}}$ — вероятность наличия положительных знаков у элемента выборки x_j при наличии сигнала.

Вероятность обнаружения $D_{\text{з}}$ является неубывающей функцией переменной $p_{\text{с}}$. Поэтому для построения гарантированных характеристик обнаружения достаточно определить значение $p_{\text{с0}}$, не превосходящее нижней границы возможных значений $p_{\text{с}}$ при действии помехи с произвольной плотностью $W_* \in \mathcal{P}_0$ и фиксированном отношении сигнал-шум $q = (\nu/\sigma)$.

Воспользовавшись неравенством Чебышева в форме $P(|x| > q) \leqslant \leqslant 1/q^2$ и учитывая, что $p_{\text{с}} \geqslant 1/2$ при $q > 0$, получаем

$$p_{\text{с0}} = \sup(1/2,\ 1 - q^2/2). \tag{7.71}$$

Подставив полученное значение $p_{\text{с0}}$ в (7.70), определим гарантированные характеристики обнаружения знакового обнаружителя

$$D_{\text{гар}}(\alpha, q) = \sum_{k=C+1}^{n} C_n^k \, p_{\text{с0}}^k (1-p_{\text{с0}})^{n-k}. \tag{7.72}$$

В [271] проведено сравнение гарантированных характеристик обнаружения (7.72) с характеристиками обнаружения, построенными для помех с нормальным, равномерным и лапласовским распределениями для ряда возможных значений α, n и q. Результаты сравнений подтверждают целесообразность использования гарантированных характеристик обнаружения для оценки качества обнаружителей сигналов.

7.3.4. Сравнение характеристик обнаружения асимптотически оптимальных алгоритмов

Характеристики обнаружения рассмотренных асимптотически оптимальных ранговых и знаково-ранговых обнаружителей имеют одинаковую форму, описываемую выражением (7.14) для детерминированного сигнала, и выражением (7.22) для квазидетерминированного сигнала. Анализ этих выражений показывает, что при заданной вероятности ложной тревоги α вероятность обнаружения определяется значением обобщенного отношения сигнал-шум $q_0 = (\nu/\sigma)I^{1/2}$.

Из выражений (7.4), (7.7) и (7.25) следует, что $(\nu/\sigma)^2$ представляет собой отношение энергии переменной составляющей сигнала $\nu s(t)$ к средней мощности флуктуаций шума $n(t)$, если рассматриваемый обнаружитель ранговый, или отношение полной энергии сигнала (с учетом постоянной составляющей) к средней мощности шума, если рассматриваемый обнаружитель знаково-ранговый, и не зависит от конкретной формы принимаемого сигнала.

Как известно [272], для любой плотности распределения $g(x)$ со средним a_g и дисперсией σ_g^2 количество информации Фишера удовлетворяет соотношению

$$I_g \geqslant \sigma_g^{-2}, \tag{7.73}$$

в котором знак равенства имеет место только при нормальном распределении; для нормированных плотностей $I_g \geqslant 1$.

Из неравенства $I_g \geqslant 1$ непосредственно следует $q_0 \geqslant q$.

Таким образом, обобщенное отношение сигнал-шум минимально и равно отношению сигнал-шум $q = (\nu/\sigma)$ только при нормальном распределении и превышает его при всех других распределениях. Следовательно, нормальному распределению соответствуют наихудшие характеристики обнаружения. При других распределениях соответствующие асимптотически оптимальные обнаружители обеспечивают равномерно лучшие, чем при нормальном распределении характеристики обнаружения, при этом обобщенное отношение сигнал-шум оказывается большим для плотностей, содержащих большее количество информации Фишера.

Поскольку структура и свойства оптимальных алгоритмов обнаружения сигналов широко известны, мы не проводим специального сравнительного анализа структуры и свойств параметрических и непараметрических обнаружителей. Структура и эффективность наилучших для рассмотренных задач обнаружения параметрических критериев рассмотрены в [268], где приведена форма критериев и сформулированы условия, при которых достигается наибольшая асимптотическая мощность. Сравнение значений асимптотической эффективности ранговых ($\rho_р$) и оптимальных неранговых ($\rho_{оп}$) обнаружителей показывает, что если оба обнаружителя асимптотически оптимальны для нормальной помехи, принимаемый сигнал соответствует ожидаемому, а плотность фактически действующей помехи $W_* \in \mathcal{P}$, то

$$\rho_р \geqslant \rho_{оп}, \tag{7.74}$$

при этом знак равенства достигается только при нормальном распределении. Доказательство этого результата дано Х. Черновым и И. Р. Саважем [273].

В соответствии с результатами п. 7.3.2 ранговый и знаково-ранговый обнаружители с одинаковой функцией нелинейности имеют в классе плотностей $\mathcal{P}_0$ одинаковую асимптотическую мощность. Следовательно, соотношение (7.74) справедливо и для знаково-рангового обнаружителя, если только плотность действующей помехи $W_* \in \mathcal{P}_0$.

7.4. Непараметрические обнаружители на перемешанных статистиках с линейным преобразованием входных данных

Непосредственная реализация в радиотехнических системах многих из известных непараметрических алгоритмов, основанных на знаках и рангах наблюдаемых данных, наталкивается на серьезные технические трудности, связанные с необходимостью запоминать и обрабатывать выборки большого объема за малые отрезки времени.

В этом разделе рассмотрены ранговые и знаково-ранговые алгоритмы обнаружения на перемешанных статистиках, использующие линейные преобразования наблюдаемых данных для формирования промежуточных статистик существенно меньшей размерности, чем размерность исходной выборкой из наблюдаемого процесса. Применение таких алгоритмов значительно облегчает практическую реализацию непараметрических обнаружителей благодаря сокращению необходимого для принятия решения числа операций, снижению требований к быстродействию элементов и уменьшению объема аппаратуры устройств обработки сигналов [282].

Вновь вернемся к задаче обнаружения сигнала $s(t)$ на основе наблюдения аддитивной смеси (7.1) сигнала и шума. Предположим, что интервал наблюдения T может быть разбит на n равных отрезков времени $\Delta T_j = \Delta T$, в каждом из которых функции, описывающие сигнал, отличаются только постоянными множителями, т. е.

$$s(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j s_э(t - t_j),\ 0 \leqslant t \leqslant T;\ s_э(t) = 0 \text{ при } t < 0,\ t > \Delta T, \tag{7.75}$$

а шум на всем интервале наблюдения является стационарным и допускает представление (7.2). Отсчеты помехи в разных интервалах ΔT_j независимы.

Функцию $s_э(t)$, описывающую форму сигнала в каждом из интервалов наблюдения $[t_{j-1} - t_j]$, будем называть элементарным сигналом, а величины λ_j — амплитудными множителями.

Рассмотрим последовательность задач проверки гипотезы $H_0(\nu = 0)$ против альтернативы $H_1(\nu > 0)$ на основе дискретных выборок из наблюдаемого процесса, имеющих соответственно характеру принимаемого сигнала блочную структуру вида

$$x_{i11}, \ldots, x_{i1k}, \ldots, x_{i1m}, \ldots, x_{ij1}, \ldots, x_{ijk}, \ldots, x_{ijm}, \ldots, x_{in1}, \ldots, x_{ink}, \ldots, x_{inm}, \tag{7.76}$$

с элементами

$$x_{ijk} = \nu\lambda_{ij}\, s_{ik} + \sigma\eta_{ijk} + \mu, \qquad (7.77)$$

где i — порядковый номер выборки; n — число блоков выборки, $1 \leqslant n < \infty$; j — номер блока, $1 \leqslant j \leqslant n$; m — число элементов выборки в блоке, $m \geqslant 1$; k — номер элемента в блоке $1 \leqslant k \leqslant m$; s_{ik} — значения элементарного сигнала, одинаковые для всех блоков; λ_{ij} — амплитудные множители, постоянные для всех значений элементарного сигнала внутри каждого блока; η_{ijk} — статистически независимые значения шума. Как и ранее, для сокращения записи будем опускать индексы i.

Пусть из исходной выборки (7.76) в результате линейного весового суммирования элементов в блоках образованы промежуточные статистики

$$V_j = \sum_{k=1}^{m} s_k\, x_{jk},\ j = \overline{1, n}. \qquad (7.78)$$

Используя формулу (7.77), преобразуем выражение (7.78) к виду

$$V_j = \nu s_j' + \sigma N_j + \mu_v, \qquad (7.79)$$

где $s_j' = \lambda_j E_s$; $N_j = \sum_{k=1}^{m} s_k\, \eta_{jk}$; $\mu_v = \mu\bar{s}$; $E_s = \sum_{k=1}^{m} s_k^2$ — энергия элементарного сигнала; $\bar{s} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} s_k$ — постоянная составляющая элементарного сигнала.

Промежуточные статистики (7.79) можно рассматривать как аддитивную смесь сигнала s_j' и шума $\sigma N_j + \mu$, $j = 1, \ldots, n$.

Полагая, что входной сигнал $s_{jk} = \lambda_i s_k$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant m$, удовлетворяет условиям типа (7.6), (7.7), можно показать, что сигнал с элементами s_j' также удовлетворяет аналогичным условиям, которые при $0 < E_s < \infty$ сводятся к ограничениям, наложенным на амплитудные множители:

$$\lim_{i\to\infty}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}(\lambda_{ij}-\bar{\lambda}_i)^2\left[\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{ij}-\bar{\lambda}_i)^2\right]^{-1}\right\} = 0;$$

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{ij}-\bar{\lambda}_i)^2 = \tilde{E}_\lambda.$$

Пусть действующая на входе помеха имеет плотность $W \in \mathcal{P}$. Тогда случайные величины N_j также имеют плотность $W_v(x)$ с конечным количеством информации Фишера I_v, нулевым средним и дисперсией $\sigma_v^2 = E_s$. Соответствующая $W_v(x)$ нормированная плотность $W_{v0}(x)$ содержит количество информации Фишера $W_{v0} = \sigma_h^2 I_v = E_s I_v$ и принадлежит классу $\mathcal{P}$.

Как следует из результатов § 7.1, асимптотически равномерное наиболее мощное решающее правило для задачи обнаружения сигна-

ла s_j, $j = 1, \ldots, n$, основанное на промежуточных статистиках V_j, имеет вид

$$Z_v^{\text{p}} \gtrless C(\alpha)\, d_v^{\text{p}}, \tag{7.80}$$

где

$$Z_v^{\text{p}} = E_s \sum_{j=1}^{n} \left(\lambda_j - \bar{\lambda}\right) \varphi_v \left(R_j^v/(n+1)\right); \tag{7.81}$$

$$\left(d_v^{\text{p}}\right)^2 = I_v\, E_s^2\, E_\lambda (1-\varepsilon_\lambda),\ \bar{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j,\ E_\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2,\ \varepsilon_\lambda = \left(\bar{\lambda}\right)^2 n E_\lambda^{-1}; \tag{7.82}$$

$\varphi_v(u)$ — характеристика нелинейного преобразователя, определяемая по (7.9) для плотности $W_v(x)$; R_j^v — ранг промежуточной статистики V_j в последовательности $V_1, \ldots, V_n$; $C(\alpha)$ — порог, получаемый из (7.13).

Если $W_v(x)$ — плотность распределения вероятностей с конечным количеством информации Фишера I_v, средним значением μ_v и дисперсией σ_v^2, а $W_{v_0}(x)$ — плотность с нулевым средним, единичной дисперсией и количеством информации Фишера I_{v_0}, относящаяся к тому же типу, что и $W_v(x)$, то соответствующие этим плотностям φ-функции $\varphi_v(u)$ и $\varphi_{v_0}(u)$ связаны соотношением [107]

$$\varphi_v(u) = (1/\sigma)\varphi_{v_0}(u), \tag{7.83}$$

а значения количества информации Фишера — уравнением

$$I_v = (1/\sigma_v^2) I_{v_0}. \tag{7.84}$$

Учитывая (7.83) и (7.84), можно преобразовать выражения (7.81) и (7.82) к виду

$$Z_v^{\text{p}} = E_s^{1/2} \sum_{j=1}^{n} \left(\lambda_j - \bar{\lambda}\right) \varphi_{v0}\left[R_{jv}/(n+1)\right];\ \left(d_v^{\text{p}}\right)^2 = I_{v0}\, E_s\, E_\lambda (1-\varepsilon_\lambda),$$

и представить алгоритм (7.80) в окончательной форме

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\lambda_j - \bar{\lambda}\right) \varphi_{v0}\left[R_{jv}/(n+1)\right] \gtrless C(\alpha)\left[I_{v0}\, E_\lambda (1-\varepsilon_\lambda)\right]^{1/2}. \tag{7.85}$$

Характеристики обнаружения рангового алгоритма (7.85) на перемешанных статистиках имеют вид

$$D_v^{\text{p}}(\alpha, q_v^{\text{p}}) = 1 - \Phi\left[C(\alpha) - q_v^{\text{p}}\right],$$

где обобщенное отношение сигнал-шум q_v^p составляет

$$q_v^{\text{p}} = (\nu/\sigma)\, d_v^{\text{p}} = (\nu/\sigma)\left[I_{v0}\, E_s\, E_\lambda (1-\varepsilon_\lambda)\right]^{1/2}.$$

Если ширина спектра шума $\Delta\omega_{\text{ш}}$ существенно превосходит ширину спектра элементарного сигнала $\Delta\omega_{\text{с}}$, т. е.

$$\Delta\omega_{\text{ш}} \gg \Delta\omega_{\text{с}}, \tag{7.86}$$

то элементы выборки x_{jk} в пределах каждого блока могут формироваться через отрезки времени, весьма малые по сравнению с длительностью элементарного сигнала. В этих условиях хорошим приближением для суммы (7.78) является корреляционный интеграл

$$V_j \approx \int_{t_{j-1}}^{t_j} s(t)\, x(t)\, dt, \qquad (7.87)$$

где t_{j-1}, t_j — границы интервала, в котором действует j-й элементарный сигнал, $t_0 = 0$, $t_n = T$. Интеграл (7.87) равен пределу суммы (7.78), если при $i \to \infty$ имеют место $m_i \to \infty$, $(\Delta\omega_c/\Delta\omega_ш) \to 0$.

Для определения значений интеграла (7.87) могут быть использованы широко известные корреляторы или согласованные фильтры.

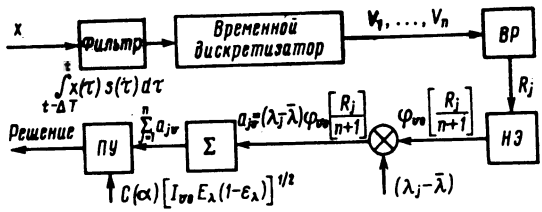


Рис. 7.5. Структурная схема РО на перемешанных статистиках с линейным преобразованием входных данных

Один из возможных вариантов структурной схемы обнаружителя, реализующего алгоритм (7.85) с помощью согласованного фильтра, представлен на рис. 7.5.

Если условие (7.86) выполняется, то в силу центральной предельной теоремы происходит нормализация промежуточных статистик, представляющих собой суммы (7.78) большого числа независимых случайных величин или корреляционные интегралы (7.87), являющиеся пределами этих сумм при $i \to \infty$.

При нормализации промежуточных статистик максимум вероятности обнаружения достигается при функции нелинейности $\varphi_{v_0}(u) = \Phi^{-1}(u)$ независимо от типа плотности шума на входе обнаружителя.

Сравним далее алгоритм (7.85) с асимптотически оптимальным ранговым алгоритмом (7.15), который с учетом принятой формы сигнала может быть переписан в виде

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (\lambda_j s_k - \overline{\lambda s})\, \varphi\,[R_{jk}/(mn+1)] \gtrless C(\alpha)\, d^p, \qquad (7.88)$$

где $\varphi(u)$ — функция нелинейности, соответствующая плотности $W(x)$ действующего шума; R_{jk} — ранг элемента x_{jk} в выборке (7.76); $(d^p)^2 = IE_\lambda E_s\,(1 - \varepsilon_\lambda\varepsilon_s)$; $\varepsilon_s = \overline{(s)}^2 m E_s^{-1}$.

Очевидно, что для реализации алгоритма (7.88) требуется запоминание mn элементов выборки, в то время как для реализации алгорит-

ма (7.85) — только n, т. е. в m раз меньше. Число элементарных операций при вычислении рангов пропорционально квадрату числа элементов; следовательно, применение линейной обработки для снижения размерности выборки может дать существенное снижение аппаратурных затрат, поскольку обычно $m \gg 1$, а определение значений промежуточных статистик не требует запоминания всех элементов выборки и может быть выполнено с помощью согласованных фильтров.

Асимптотическая эффективность обнаружителя (7.85) на перемешанных статистиках определяется соотношением

$$\rho_v = [I_{v0}(1 - \varepsilon_\lambda)]/[I(1 - \varepsilon_\lambda \varepsilon_s)]. \qquad (7.89)$$

Если действующая помеха имеет нормальную плотность и постоянная составляющая амплитудных множителей равна нулю, то обнаружитель (7.85) на перемешанных статистиках является асимптотически оптимальным, что следует из формулы (7.89) при $I = I_{v0} = 1$, $\varepsilon_\lambda = 0$. Снижение асимптотической эффективности обнаружителя (7.85) имеет место при любом отклонении плотности действующей помехи от нормальной (при этом $I > I_{v0} > 1$) и наличии постоянной составляющей у совокупности амплитудных множителей; в последнем случае степень снижения эффективности зависит также от постоянной составляющей элементарного сигнала.

Если шум не содержит неизвестной постоянной составляющей, то асимптотическая эффективность обнаружителя на перемешанных статистиках составит $\rho_v = (I_{v0}/I)(1 - \varepsilon_\lambda)$, что следует из (7.89) и (7.61).

Можно избежать снижения эффективности обнаружителя на перемешанных статистиках при наличии постоянной составляющей у амплитудных множителей, используя для обработки промежуточных статистик знаково-ранговые алгоритмы вместо ранговых. Для этого достаточно, чтобы сигнал удовлетворял условиям типа (7.24) и (7.25), а шум имел симметричную относительно нуля плотность и постоянную составляющую $\mu = 0$.

При выполнении указанных условий асимптотически оптимальный для промежуточных статистик знаково-ранговый алгоритм имеет вид

$$Z_v^{\text{зр}} \gtrless C(\alpha)\, d_v^{\text{зр}}, \qquad (7.90)$$

где

$$Z_v^{\text{зр}} = E_s^{1/2} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \operatorname{sign} V_j \, \varphi_{v0}\left[\frac{1}{2} + \frac{R_j^{\text{зр}}}{2(n+1)}\right];$$

$$\left(d_v^{\text{зр}}\right)^2 = I E_\lambda E_s;$$

$R_j^{\text{зр}}$ — ранг промежуточной статистики V_j в последовательности $|V_1|, \ldots, |V_n|$.

Характеристики обнаружения алгоритма (7.90) имеют вид

$$D_v^{\text{зр}} = 1 - \Phi\left[C(\alpha) - (\nu/\sigma)\, d_v^{\text{зр}}\right],$$

а асимптотическая эффективность составляет $\rho_v^{эр} = I_{v0}/I$ в общем случае и $\rho_v^{эр} = I^{-1}$ при нормализации промежуточных статистик.

Если функция нелинейного преобразователя $\varphi_{v0}(u)$ не соответствует плотности распределения промежуточных статистик, что возникающие при этом дополнительные потери эффективности можно определить, используя методы и результаты, изложенные в п. 7.3.1.

С помощью результатов § 7.1—7.3 можно установить структуру обнаружителей квазидетерминированного сигнала на перемешанных статистиках и вычислить их асимптотическую эффективность, которая не отличается от значений, полученных для обнаружителей детерминированного сигнала.

7.5. Двухвыборочные непараметрические обнаружители

На практике возникают ситуации, в которых для принятия решения о наличии или отсутствии сигнала можно использовать несколько выборок, отличающихся друг от друга определенными известными свойствами. В настоящем разделе рассмотрены двухвыборочные обнаружители, использующие для принятия решения две выборки, элементы которых характеризуются одинаковыми статистическими свойствами шумов. Если сигнал может содержаться только в одной выборке, именуемой в дальнейшем сигнальной, а вторая выборка, именуемая шумовой, содержит только значения шума, то соответствующий этим выборкам двухвыборочный обнаружитель будем называть одноканальным. В радиолокационных и связных системах для формирования сигнальной и шумовой выборок можно использовать фиксацию значений выходного колебания одного приемника, при этом сигнальная выборка формируется в моменты времени, соответствующие ожидаемому сигналу, а шумовая — на интервалах, в которых сигнал заведомо отсутствует.

Если сигнал может присутствовать одновременно в обеих выборках, то соответствующий двухвыборочный обнаружитель будем называть двухканальным.

Задачи с двумя сигнальными выборками характерны для радиоастрономии, геофизики, навигации и гидроакустики и обычно связаны с использованием разнесенных в пространстве приемных систем.

Одноканальные двухвыборочные обнаружители. Пусть сигнальная выборка

$$\mathbf{x}_c = (x_{c1}, \ldots, x_{cn}) \tag{7.91}$$

содержит элементы x_{cj}, $1 \leqslant j \leqslant n$, вида (7.4), а шумовая —

$$\mathbf{x}_ш = (x_{ш1}, \ldots, x_{шm}) \tag{7.92}$$

элементы

$$x_{шi} = \sigma\eta_i + \mu,$$

где случайные величины η_i имеют те же статистические характеристики, что и случайные величины η_j в выборке (7.4).

Представляет интерес выяснить, при каких условиях и в какой степени использование наряду с сигнальной выборкой $\mathbf{x}_c$ шумовой

выборки $\mathbf{x}_{\text{ш}}$ позволяет улучшить качественные показатели непараметрических обнаружителей.

Для этого сформируем объединенную выборку

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_p),\ 1 \leqslant j \leqslant p = n + m, \tag{7.93}$$

где $x_j = x_{cj}$ при $1 \leqslant j \leqslant n$; $x_j = x_{\text{ш}\, j-n}$ при $n < j \leqslant p$, и введем сигнал s', определяемый выражением

$$s'_j = s_j \text{ при } 1 \leqslant j \leqslant n;\ s'_j = 0 \text{ при } n < j \leqslant p. \tag{7.94}$$

Очевидно, что решение о наличии сигнала s в выборке (7.91) эквивалентно решению о наличии сигнала s' в объединенной выборке (7.93).

Задача обнаружения сигнала s' в выборке (7.93) полностью соответствует задачам обнаружения, рассмотренным ранее, а определенные в § 7.1, 7.2 асимптотически оптимальные непараметрические алгоритмы могут быть непосредственно использованы для обнаружения сигнала s, при этом они будут обладать свойствами, установленными в § 7.3.

Так, если K и K' — ранговые или знаково-ранговые обнаружители, асимптотически оптимальные по отношению к сигналам s и s' соответственно, действующие в одинаковых условиях, то эти обнаружители имеют одинаковую структуру, при этом обнаружитель K' оказывается несколько сложнее K только вследствие большего объема выборки, подлежащей обработке. Сравнение свойств обнаружителей K и K' приводит к следующим выводам. Если K и K' — знаково-ранговые обнаружители, то они имеют одинаковые характеристики обнаружения и значения эффективности как при соответствии, так и вызванном какими-либо отклонениями несоответствии принимаемого сигнала и плотности действующей помехи ожидаемым моделям. Если сигнал не содержит постоянной составляющей, то этот вывод остается справедливым и по отношению к ранговым обнаружителям K и K'.

Очевидно, что в указанных условиях переход от алгоритма K, основанного только на сигнальной выборке, к алгоритму K', использующему кроме сигнальной еще и шумовую выборку, не дает никакого выигрыша в эффективности или каких-либо других преимуществ и поэтому является нецелесообразным. Однако переход от рангового алгоритма K к ранговому алгоритму K' может оказаться полезным, если сигнал s содержит постоянную составляющую $\bar{s} \neq 0$. Действительно, в соответствии с (7.58) потери эффективности рангового обнаружителя K, связанные с наличием у сигнала ненулевой постоянной составляющей, характеризуются коэффициентом $\rho = 1 - \varepsilon$.

Используя определение (7.94) , можно вычислить отношение мощности постоянной составляющей сигнала s' к средней мощности этого сигнала и найти далее значение коэффициента ρ', характеризующего снижение эффективности обнаружителя K', обусловленное действием постоянной составляющей. В результате получим

$$\rho' = (\rho + m/n)\,(1 + m/n)^{-1}. \tag{7.95}$$

Поскольку $\rho < 1$ при $s \neq 0$, а m и n — целые положительные числа, то из (7.95) следует $\rho' > \rho$. Более того, если $(m/n) \to \infty$ при $i \to \infty$, то $\rho' \to 1$ при любых значениях ρ, $0 < \rho < 1$. Следовательно, обнаружитель K' оказывается эффективнее обнаружителя K благодаря снижению потерь, связанных с наличием у сигнала s ненулевой постоянной составляющей.

Если объем помеховой выборки по сравнению с объемом сигнальной неограниченно возрастает, то потери эффективности (из-за наличия у сигнала s постоянной составляющей) при использовании обнаружителя K' стремятся к нулю независимо от значения эффективности обнаружителя K, использующего только сигнальную выборку.

Адаптивные одноканальные двухвыборочные обнаружители. Рассмотрим вновь ранговый или знаково-ранговый обнаружитель K', использующий сигнальную выборку совместно с шумовой и предположим, что этот обнаружитель является асимптотически оптимальным для некоторых сигнала s и плотности шума W. Примем далее, что плотность фактически действующего шума W_* отличается от W (при этом, конечно, $W, W_* \in \mathcal{P}$ для рангового и $W, W_* \in \mathcal{P}_0$ для знаково-рангового обнаружителей). Тогда эффективность обнаружителя K' количественно выразится квадратом коэффициента корреляции r_η, определяемого соотношением (7.42), и может оказаться существенно меньше единицы.

Потерю эффективности, вызываемую отклонением плотности фактически действующего шума от предполагаемого, можно уменьшить. Для этого достаточно характеристику нелинейного преобразователя рангового алгоритма (7.15) или знаково-рангового алгоритма (7.26) привести в соответствие с плотностью фактически действующего шума. Эта идея может быть реализована путем построения адаптивного обнаружителя, который позволяет определять функции распределения шумов на основе анализа шумовой выборки, вычислять φ-функции по полученным эмпирическим распределениям и подстраивать характеристику нелинейного преобразователя согласно результатам вычислений.

На рис. 7.6 представлена структурная схема адаптивного обнаружителя; эта схема предполагает использование рангового алгоритма и может быть получена из структурной схемы рис. 7.1 путем добавления элементов адаптации. Аналогично может быть построена структурная схема адаптивного знаково-рангового алгоритма из структурной схемы рис. 7.2.

Напомним, что эмпирическая интегральная функция распределения может быть определена по выборке (7.92) с помощью соотношения [1]

$$\widehat{F}(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} h(x - x_{\text{ш}i}), \qquad (7.96)$$

где $h(x)$ — функция единичного скачка.

Если $\hat{F}(x)$ — одномерная интегральная функция распределения случайных величин $x_{\text{ш}i}$, одинаковая для всех i, $1 \leqslant i \leqslant m$, то при

$m \to \infty$ эмпирическая функция распределения сходится по вероятности к функции $F(x)$. Если характеристика нелинейного преобразователя соответствует эмпирическому распределению, то из сходимости распределений следует, что при $m, n \to \infty$ адаптивный ранговый обнаружитель со структурой, представленной на рис. 7.6, оказывается асимптотически оптимальным при действии помехи с любой плотностью $W_* \in \mathcal{P}$. Это утверждение остается справедливым и по отношению к адаптивному знаково-ранговому обнаружителю, если только плотность действующего шума $W_* \in \mathcal{P}_0$.

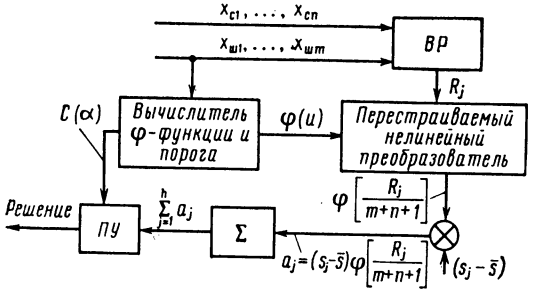


Рис. 7.6. Структурная схема адаптивного двухвыборочного РО

В качестве другого примера применения шумовой выборки для целей адаптации рассмотрим возможности использования знаково-рангового алгоритма (7.26) для обнаружения сигнала s на фоне шума с известным распределением W, симметричным относительно неизвестного среднего значения μ, $-\infty < \mu < \infty$. Как отмечалось в п. 7.3.2, непосредственное использование знаково-рангового алгоритма в этих условиях невозможно из-за утраты непараметрических свойств. При наличии помеховой выборки неизвестное среднее значение можно оценить, вычислив выборочное среднее $\widehat{\mu} = \frac{1}{m} \Delta \sum_{i=1}^{m} x_{ш i}$, которое при $m \to \infty$ сходится к неизвестному среднему значению μ.

Введем вместо сигнальной выборки модифицированную выборку

$$\mathbf{x}_c = \left(x_{с1} - \widehat{\mu}, \ldots, x_{сn} - \widehat{\mu}\right). \tag{7.97}$$

Можно заметить, что эта выборка вполне соответствует допущениям, принятым в § 7.2. Следовательно, при $i \to \infty$ знаково-ранговый алгоритм (7.26), использующий выборку (7.97), при выборе функции нелинейности соответственно плотности действующего шума будет асимптотически оптимальным алгоритмом, непараметрическим в классе $\mathcal{P}_0$, при этом асимптотическая оптимальность и непараметрические свойства будет сохраняться при любых значениях постоянной составляющей шума.

Двухвыборочные двухканальные обнаружители. Перейдем к рассмотрению двухканальных обнаружителей, использующих две сигнальные выборки:

$$\mathbf{x}_{c1} = (x_{11}, \ldots, x_{1n}); \tag{7.98}$$

$$\mathbf{x}_{c2} = (x_{21}, \ldots, x_{2m}). \tag{7.99}$$

Положим, что элементы обеих выборок при отсутствии сигнала образуют совокупность независимых случайных величин с одинаковыми одномерными плотностями распределения, а сигналы, которые могут присутствовать в выборках, имеют известную (необязательно одинаковую) форму и аддитивно взаимодействуют с шумами, при этом сигналы и шумы удовлетворяют всем введенным ранее ограничениям. Объединяя обе сигнальные выборки в одну

$$\mathbf{x}_c = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_p), \tag{7.100}$$

где $x_j = x_{1j}$ при $1 \leqslant j \leqslant n$; $x_j = x_{2(j-n)}$ при $n < j \leqslant p$, вновь приходим к рассмотренным ранее задачам обнаружения, что позволяет непосредственно устанавливать структуру асимптотически оптимальных непараметрических алгоритмов и использовать общие результаты анализа свойств этих алгоритмов в различных ситуациях.

Если мощности переменных составляющих сигналов в выборках (7.98) и (7.99) не равны нулю, то асимптотическая мощность рангового обнаружителя K', действующего по объединенной выборке (7.100), всегда будет превосходить асимптотическую мощность рангового обнаружителя K, действующего по одной из сигнальных выборок $\mathbf{x}_{c1}$ или $\mathbf{x}_{c2}$.

Аналогичное утверждение справедливо и для знаково-ранговых обнаружителей при условии, что средние мощности сигналов в выборках $\mathbf{x}_{c1}$ и $\mathbf{x}_{c2}$ отличаются от нуля.

В приложениях двухканальные двухвыборочные обнаружители могут применяться для обнаружения стохастических сигналов, которые в настоящей главе не рассматривались. Не вдаваясь в подробности, отметим, что наличие стохастического сигнала приводит к появлению статистической зависимости между элементами выборок $\mathbf{x}_{c1}$ и $\mathbf{x}_{c2}$, которая и используется для обнаружения сигнала [1].

7.6. Влияние отклонений от принятых допущений на характеристики обнаружителей

Зависимые выборки. Если шумовые элементы выборки образуют совокупность зависимых случайных величин с плотностью совместного распределения $W_n(y)$, которая не может быть представлена в виде

$$W_n(y_1, \ldots, y_n) = \prod_{j=1}^{n} W(y_i), \tag{7.101}$$

соответствующем независимым выборкам, то рассмотренные ранговые и знаково-ранговые обнаружители теряют свои непараметрические свойства по следующим причинам:

предельные распределения статистик обнаружителей могут отличаться от нормального ввиду несоблюдения в общем случае условий применимости центральной предельной теоремы;

параметры предельного нормального распределения при соблюдении условий применимости центральной предельной теоремы для зависимых случайных величин в значительной мере определяются характером и степенью статистической зависимости между элементами выборки.

В некоторых специальных случаях статистической зависимости, когда выборка может быть разбита на ряд независимых множеств, непараметрические обнаружители все же могут быть построены. Так, рассмотренный в § 7.4 обнаружитель на перемешанных статистиках, действующий по выборке (7.76), сохранит непараметрические свойства, если между элементами η_{ijk}, принадлежащими одному блоку, будет иметь место статистическая зависимость, а между элементами η_{ijk} и η_{ilk}, $l \neq j$, принадлежащими разным блокам, — не будет, что следует из очевидной независимости промежуточных статистик. При наличии статистической зависимости между значениями помехи η_{ijk}, $k = \overline{1, m}$, которой соответствует известная корреляционная матрица r_{kl}, одинаковая для всех j при каждом фиксированном i; $k, l = \overline{1, m_i}$, и независимости шумовых значений, принадлежащих разным блокам (с разными j), эффективность обнаружителя на перемешанных статистиках составит

$$\rho_v' = \rho_v \left[1 + E_s^{-1} \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} s_k s_l r_{kl} \right) \right]^{-1}, \qquad (7.102)$$

где ρ_v определяется из формулы (7.89).

Вывод формулы (7.102) основан на непосредственном вычислении среднего значения и дисперсии промежуточных статистик.

Нетрудно видеть, что $\rho_v' \leqslant \rho_v$, причем знак равенства имеет место только при $r_{kl} = 0$ для всех k и l, что соответствует статистической независимости элементов. Таким образом, статистическая зависимость между элементами в блоках снижает эффективность непараметрических обнаружителей на перемешанных статистиках.

В [1] рассматривалось применение знакового и знаково-рангового алгоритмов для обнаружения постоянного сигнала на фоне коррелированного шума, значения которого образуют случайную стационарную последовательность авторегрессии первого порядка. Полученные в этой работе результаты дают возможность количественно оценивать эффективность обнаружителей, которые, к сожалению, теряют свои непараметрические свойства в силу второй из вышеназванных причин.

Нестационарность шума. Если значения слагаемых шума в элементах выборки (7.4) независимы и соответствуют нестационарному процессу, то следует положить

$$W_n(y) = \prod_{j=1}^{n} W_j(y_j), \qquad (7.103)$$

где плотности распределения элементов, вообще говоря, не равны друг другу, т. е. $W_i(y) \neq W_j(y)$ при $i \neq j$ для всех или некоторых i и j.

Плотность (7.103), в отличие от плотности (7.101), не является в общем случае инвариантной относительно перестановок аргументов. Отсутствие инвариантности означает, что вероятности появления возможных реализаций рангового вектора при отсутствии сигнала не равны друг другу. Отсюда сразу следует вывод о потере непараметрических свойств ранговыми и знаково-ранговыми обнаружителями при нестационарном шуме. Исключение составляет знаковый обнаружитель, сохраняющий непараметрические свойства при плотности (7.103), если плотности элементов удовлетворяют условию

$$\int_{-\infty}^{0} W_j(y_j)\, dy_j = \int_{0}^{\infty} W_j(y_j)\, dy_j = \frac{1}{2}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Этому условию удовлетворяют все распределения с нулевой медианой и, в частности, симметричные относительно нуля распределения.

Асимметрия плотности шума. Если плотность шума асимметрична относительно нуля, то условию инвариантности к перестановкам не удовлетворяет плотность совместного распределения абсолютных значений наблюдений при отсутствии сигнала; эта плотность имеет форму, подобную (7.103). Отсюда следует вывод об утрате непараметрических свойств знаково-ранговым обнаружителем при асимметричных относительно нуля распределениях. Конечно, при асимметричных плотностях сохраняются непараметрические свойства рангового обнаружителя, а при нулевой медиане — также и знакового.

Разрывные плотности распределения шума. В соответствии с введенным в § 7.1 определением принадлежность плотности действующей помехи W непараметрическому классу $\mathcal{P}$ определяется количеством информации Фишера (7.5), которое должно быть ограничено. Ограниченность количества информации Фишера означает, что плотности из класса $\mathcal{P}$ описываются функциями, абсолютно непрерывными почти всюду на интервале $[-\infty, +\infty]$. Такие функции могут иметь ограниченное число конечных разрывов, которые характеризуются существованием в точках разрыва конечных пределов справа и слева.

Если плотность распределения описывается функцией, обращающейся в бесконечность хотя бы в одной из точек разрыва, то эта плотность называется разрывной, а соответствующее ей количество информации Фишера $I = \infty$.

Разрывные плотности можно приближенно аппроксимировать последовательностью непрерывных функций W_i, для которых $I_i \to \infty$ при $i \to \infty$, а точность приближения возрастает с увеличением i.

Используя результаты п. 7.3.4, можно убедиться, что значения асимптотической мощности D_i последовательности критериев, асимптотически оптимальных для последовательности плотностей W_i, возрастает с увеличением i.

Рост асимптотической мощности при приближении плотности действующего шума к разрывной функции позволяет сделать вывод о возможности построения сингулярных правил принятия решения при разрывных плотностях, позволяющих безошибочно обнаруживать сколь угодно слабый ненулевой сигнал. Примеры подобных плотностей легко привести. Так, для шума, который с вероятностями P_i может принять только одно из заданного множества дискретных значений ξ_i, $i = \overline{1, m}$, и описывается соответствующей разрывной плотностью

$$W(y) = \sum_{i=1}^{m} P_i \delta(y - \xi_i),$$

может быть построено сингулярное решающее правило, основанное на сравнении значений элементов выборки (7.4) с возможными значениями шума ξ_i. Выполнение условий $x_j \neq \xi_i$ при $j = \overline{1, n}$; $i = \overline{1, m}$ с вероятностью единица свидетельствует о наличии в выборке ненулевого сигнала.

В реальных системах передачи информации разрывные плотности помех практически не встречаются в силу ряда причин, среди которых в первую очередь следует отметить непременное наличие собственных шумов приемных устройств. Поэтому принятое в § 7.1 условие (7.5) практически всегда выполняется и, кроме того, оказывается полезным при теоретическом анализе для преодоления трудностей, связанных с появлением сингулярности.

Нули и совпадения выборочных значений. При теоретическом анализе не учитывались возможности появления нулевых или совпадающих элементов выборки, поскольку вероятности их появления равны нулю в силу абсолютной непрерывности плотностей из класса $\mathcal{P}$ почти всюду на числовой прямой $[-\infty, +\infty]$. Однако на практике ввиду ограниченной точности измерительных приборов, а также вследствие дискретизации наблюдаемых значений, применяемой в цифровых устройствах обработки сигналов, появление нулевых или совпадающих элементов может иметь конечные вероятности и оказывать заметное влияние на характеристики обнаружителей. Поэтому в реальных устройствах должна предусматриваться специальная обработка нулей и совпадений.

Появление нулей и совпадений связано с некоторой дополнительной потерей информации при формировании выборки и поэтому приводит в общем случае

к снижению эффективности обнаружителей. Степень этого снижения будет зависеть от принятого алгоритма обработки нулей и совпадений. Поэтому задание конкретного способа обработки нулей и совпадений является важным для практики, поскольку от выбора этого способа зависят непараметрические свойства, уровень фиксации ложных тревог и вероятность обнаружения сигнала.

Известны рандомизированные и нерандомизированные процедуры обработки нулей и совпадений. При использовании рандомизированных процедур знаки нулевым наблюдениям и ранги совпавшим элементам присваиваются на основе результатов дополнительного статистического эксперимента, не связанного с наблюдаемым процессом; нерандомизированные процедуры предполагают использование жестких правил обработки нулей и совпадений без использования дополнительных статистических экспериментов.

В статистической литературе рассмотрен ряд процедур обработки нулей и совпадений; здесь мы ограничимся описанием некоторых из известных процедур, применение которых представляется наиболее приемлемым в практически реализуемых устройствах обнаружения сигналов.

Сокращение объема выборки. В знаковых алгоритмах обработка нулей может быть основана на сокращении объема выборки за счет исключения нулевых элементов. Для практической реализации этого принципа достаточно при вычислении знаковых статистик положить $\operatorname{sign} x = 0$ при $x = 0$ и произвести коррекцию порога в соответствии с фактическим объемом выборки, полученной после исключения из исходной выборки нулевых элементов.

Сокращение объема выборки ведет к некоторой потере мощности, которая может еще увеличиться за счет снижения вероятности ложной тревоги относительно заданного уровня, если коррекция порога при исключении нулевых наблюдений не производится.

Д. Путтер в [274] проводит сравнение мощности нерандомизированного знакового критерия, использующего исключение нулей из выборки, с мощностью рандомизированного критерия, основанного на случайном присвоении нулевым наблюдениям знаков плюс или минус с вероятностью 1/2, в задаче обнаружения постоянного положительного сдвига при симметричном распределении шума. В этой работе показано, что мощность нерандомизированного критерия равна или больше мощности рандомизированного, а асимптотическая относительная эффективность нерандомизированного критерия по сравнению с рандомизированным всегда больше единицы, если имеют место нулевые наблюдения.

Средние ранги. Определим средний ранг элементов группы с одинаковыми значениями как среднее арифметическое значение рангов, которые имели бы эти элементы при отличии их значений друг от друга и сохранении отношений типа строгих неравенств с элементами выборки, не входящими в группу. Очевидно, что при наличии в группе только одного элемента его средний ранг совпадает с рангом в обычном определении. Средние ранги S_i элементов выборки $(x_1, \ldots, x_n)$ могут быть получены с помощью алгоритма [274]

$$S_i = 0{,}5\,[n_1 + n_2 + 1], \tag{7.104}$$

где n_1 — число элементов выборки, строго меньших x_i; n_2 — число элементов выборки, меньших или равных x_i.

Распространенный способ обработки совпадений при вычислении ранговых и знаково-ранговых статистик состоит в присвоении средних рангов совпавшим элементам. Такое присвоение будет обеспечиваться автоматически, если при ранжировке всех элементов выборки использовать алгоритм (7.104). Для практических целей этот алгоритм удобнее представить в форме

$$S_i = \left[\sum_{j=1}^{n} h(x_i - x_j) + \frac{1}{2} \right],$$

выражающей средние ранги непосредственно через значения элементов выборки, при этом функцию единичного скачка следует определить соотношениями: $h(t) = 1$ при $t > 0$; $h(t) = 0{,}5$ при $t = 0$; $h(t) = 0$ при $t < 0$.

Можно ожидать, что во многих практически важных случаях процедуры, использующие средние ранги, будут эффективнее процедур, основанных на сокращении объема выборки. Исключение совпавших ненулевых элементов при вычислении ранговых статистик может повлечь чрезмерное снижение вероятности обнаружения, так как в отброшенных элементах, имеющих большую величину, велика вероятность наличия сигналов.

Сравнение нерандомизированной процедуры обработки совпадений, использующей средние ранги, с рандомизированной процедурой присвоения рангов совпавшим элементам, выполненное в [274] для обнаружителя Манна—Уитни, показывает, что асимптотическая относительная эффективность нерандомизированного правила по отношению к рандомизированному при наличии совпадений оказывается больше единицы.

Влияние нулей и совпадений на свойства обнаружителя Вилкоксона рассмотрено в работе Д. Пратта [275]. Применение рандомизации, усредненных статистик и других методов обработки совпадений рассмотрены в [107, 276, 277 и др.]

Выборки конечного объема. Результаты синтеза структуры асимптотически оптимальных обнаружителей и оценки их эффективности в различных условиях функционирования справедливы асимптотически при неограниченном возрастании объема выборки и стремлении к нулю величины сигнала. В практически реализуемых системах объем выборки всегда ограничен, а интенсивность сигнала, при которой достигаются заданные показатели качества обнаружения, превосходит определенный фиксированный уровень. Можно ожидать, что асимптотически оптимальные структуры будут близки к оптимальным и при конечном объеме выборки, если этот объем велик ($n \gg 1$), а заданные показатели качества обнаружения достигаются при слабых сигналах ($q \ll 1$).

При малом объеме выборки (n — несколько единиц) достигнуть заданное качество обнаружения обычно оказывается возможным лишь при сильных сигналах ($q > 1$). В этом случае асимптотически оптимальные структуры могут оказаться неоптимальными, а получаемые при их использовании значения эффективности могут отличаться от значений, определенных по асимптотическим формулам.

В соответствии с фундаментальной леммой Неймана—Пирсона структура оптимального алгоритма обнаружения сигнала при конечном объеме выборки определяется однозначно (в отличие от асимптотически оптимальных алгоритмов) как процедура сравнения с порогом отношения правдоподобия наблюдаемой выборки. Отношение правдоподобия определяется статистическими характеристиками значений наблюдаемого процесса, информация о которых частично утрачивается при редукции данных до знаков и рангов.

Следовательно, в общем случае в силу однозначности оптимального решающего правила при выборках ограниченного объема невозможно построение оптимального обнаружителя, использующего только знаки и ранги элементов наблюдаемой выборки.

Однако та же лемма Неймана—Пирсона позволяет в принципе строить решающие правила, наилучшие в классах ранговых или знаково-ранговых алгоритмов. Построение таких правил требует выполнения сложных и громоздких расчетов, основанных на использовании распределений ранговых или знаково-ранговых статистик при гипотезах и альтернативах [107].

Следует ожидать, что преодоление вычислительных трудностей даст в этом случае громоздкие решающие алгоритмы, техническая реализация которых окажется весьма затруднительной. Поэтому на практике описанный метод синтеза непараметрических алгоритмов не получил распространения, и при выборках ограниченного объема используются асимптотически оптимальные алгоритмы или алгоритмы с простыми статистиками, структура которых устанавливается на эвристической основе с учетом удобства технической реализации.

Для оценки эффективности непараметрических алгоритмов при выборках малого объема широко используется математическое моделирование на вычислительных машинах.

Для аналитической оценки эффективности обнаружителей при выборках малого объема можно использовать определения относительной эффективности, не требующие контигуальности гипотезы и альтернативы [133, 278].

Многочисленные публикации, содержащие исследования непараметрических обнаружителей с конкретными структурами, показывают, что при малых объемах выборок эффективность обнаружителей может значительно отличаться от асимптотических значений; сравнительная оценка эффективности обнаружителей свидетельствует о том, что лучшими обычно при малом объеме выборки оказываются те обнаружители, которые лучше и асимптотически.

Подробный анализ структуры и свойств ряда непараметрических алгоритмов при выборках конечного объема содержится в гл. 6.

Усложнение моделей регрессии. При синтезе асимптотически оптимальных непараметрических алгоритмов предполагалось, что альтернатива отличается от гипотезы наличием регрессии в сдвиге. Это предположение соответствует аддитивному взаимодействию сигнала и помехи, которое наиболее часто имеет место в реальной обстановке.

Тем не менее на практике возможно возникновение ситуаций, в которых взаимодействие сигнала и помехи принимает другие формы. В частности, действие мультипликативной помехи соответствует появлению регрессии в масштабном коэффициенте; использование амплитудных и фазовых детекторов, а также других устройств нелинейной обработки наблюдаемого процесса для формирования промежуточных статистик может вызывать регрессию не только в сдвиге и масштабном коэффициенте, но и в форме плотности распределения.

Поэтому для практики представляет интерес исследование возможностей построения непараметрических алгоритмов для сложных моделей регрессии, не сводящихся к регрессии в сдвиге распределения при действии сигнала.

В книге Я. Гаека и З. Шидака [107] содержится исследование асимптотически оптимальных критериев для альтернатив с регрессией в масштабе распределения. Другие сложные модели регрессии рассматривались в работах Д. М. Чибисова [279], А. Ф. Кушнира [280] и Б. Р. Левина [1].

Глава 8

СТАТИСТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ЕДИНОГО АЛГОРИТМА ОБНАРУЖЕНИЯ-ИЗМЕРЕНИЯ

8.1. Постановка задачи

Обычная постановка задачи обнаружения в радиолокации, рассмотренная в предыдущих главах, такова: наблюдается радиолокационный сигнал $\mathbf{x}$, который при отсутствии объекта обнаружения представляет собой шум, а при наличии его — смесь отраженного (полезного) сигнала с шумом. Какая именно ситуация имеет место неизвестно. Необходимо по наблюдаемой реализации $\mathbf{x}$ принять решение о наличии или отсутствии объекта обнаружения. Речь идет об оптимальном способе обаружения, при котором ошибки, заключающиеся в ложном обнаружении или пропуске полезного сигнала, были бы минимальны. Под $\mathbf{x}$ для определенности понимается многомерная выборка из наблюдаемого сигнала за время наблюдения.

Поскольку радиолокационный сигнал представляет собой непрерывную функцию, а в многоканальных задачах — непрерывную векторную функцию, в конечных выражениях можно перейти к пределу, уменьшая интервал выборки и увеличивая ее объем.

Однако таким образом сформулированная задача обнаружения является слишком упрощенной и не может быть непосредственно применена к реальному радиолокационному процессу. Дело в том, что

трудно и даже невозможно выделить на временно́м интервале работы радиолокатора такой отрезок, в течение которого единственным решением было бы решение о присутствии или отсутствии объекта локации. Разумеется, можно считать, что в каждом такте радиолокационного наблюдения происходит обнаружение отраженного импульса. Задача обнаружения отраженного импульса полностью укладывается в вышеописанную постановку. Однако обнаружение отраженного импульса нельзя трактовать как обнаружение локационного объекта. Обычно требуется подтверждение: объект считается обнаруженным при обнаружении подряд или с некоторым пропуском серии отраженных импульсов. Таким образом, алгоритм обнаружения объекта оказывается значительно сложнее алгоритма обнаружения единичного импульса.

Чтобы различать их, обнаружение единичного отраженного импульса часто называют первичным обнаружением, а обнаружение самого объекта после надлежащего подтверждения — вторичным или окончательным. Дело в том, что обнаружение единичного отраженного импульса является внутренним решением радиолокационного наблюдателя, которое на выход радиолокатора не поступает. Обнаружение же серии отраженных импульсов влечет решение о наличии локационного объекта, поступающее уже на выход радиолокатора. Обычно это решение окончательно и связано с необратимыми действиями (объявление тревоги, включение другой аппаратуры и т. д.).

Следует отметить, что обнаружение единичных отраженных импульсов (в смысле бинарного решения «да — нет») может оказаться ненужным. Фактически обнаружение отраженных импульсов эквивалентно бинарному квантованию отраженного сигнала, которое загрубляет информацию, используемую для окончательного обнаружения, Далее следует отметить, что в случае обнаружения объекта должно автоматически указываться его местоположение, причем должен осуществляться постепенный переход на режим сопровождения объекта, т. е. на режим точного измерения его координат. Очевидно, что это свойство алгоритма обнаружения не может вытекать из классической постановки задачи обнаружения и требует использования специального аппарата.

Особо следует обсудить случай необнаружения объекта, т. е. принятия решения о его отсутствии. Если следовать букве этого решения, то оно должно повлечь остановку радиолокационного наблюдения и, следовательно, выключение радиолокатора. Однако такая ситуация малореальна. Она может иметь место лишь в следующем случае. Представим себе, что радиолокатор включен по целеуказанию от некоторой внешней системы оповещения. Ясно, что он должен продолжать процесс поиска и обнаружения объекта до момента обнаружения. Но можно предположить, что внешняя система оповещения дала ошибочное целеуказание и в действительности локационный объект отсутствует. Тогда радиолокатор рано или поздно получит аномально высокую апостериорную вероятность отсутствия объекта, после чего продолжение его работы станет бессмысленным и он будет выключен.

Описанный тип радиолокатора так и будем называть: «радиолокатор, работающий по целеуказанию». Для него характерны: наличие начального момента работы, совпадающего с моментом включения радиолокатора; остановка наблюдения и выключение радиолокатора в случае принятия решения об отсутствии объекта. Однако интервал работы радиолокатора, как правило, не фиксируется заранее: решение о наличии или отсутствии объекта принимается по мере накопления соответствующего статистического материала. Задача синтеза алгоритма обнаружения в этом случае укладывается в рамки классического последовательного анализа [17, 57].

Теория последовательного обнаружения сигналов, включая исследования, проведенные в последние годы, изложена в гл. 4 настоящей монографии. Однако ряд особенностей режима реального радиолокатора, даже работающего по целеуказанию, не охватывается классической теорией обнаружения. Дело в том, что при обнаружении объекта должны происходить одновременная оценка его координат и постепенный переход на режим сопровождения, т. е. точное измерение координат объекта. При этом нужно учитывать, что за время обнаружения объект может перемещаться, и фактически нужно обнаружить и затем сопровождать движущийся объект. Синтез оптимального алгоритма обнаружения в этих условиях требует расширения математического аппарата, в частности последовательного анализа.

Помимо радиолокаторов, работающих по целеуказанию, необходимо выделить еще класс радиолокаторов, которые можно назвать «радиолокаторами непрерывного наблюдения». Такие радиолокаторы наблюдают отведенные им области неограниченно долго, обнаруживая объекты по мере их появления в этих областях. Факт необнаружения объекта здесь не является командой к остановке наблюдения; просто регистрируется, что в данный момент времени объект отсутствует, но наблюдения продолжаются, так как в любой момент времени объект может появиться.

Задача синтеза оптимального алгоритма обнаружения объектов в такой постановке требует специальных критериев и специального математического аппарата. Математический аппарат для решения такого рода задач был разработан в трудах Р. Беллмана [283], А. Н. Ширяева [284], Р. Л. Стратоновича [4]. В работе А. Н. Ширяева [284] решалась задача обнаружения «разладок производственного процесса», близкая по постановке к задаче обнаружения объектов, случайно появляющихся в зоне ответственности радиолокатора. Более сложные задачи радиолокационного обнаружения были рассмотрены в книгах И. А. Большакова [7], Ю. Г. Сосулина [3], П. А. Бакута и др. [8]. В настоящей главе изложен математический аппарат и синтезируется алгоритм радиолокационного обнаружения как часть единого алгоритма, осуществляющего наряду с собственно обнаружением объекта оценку его координат и переходящего в алгоритм сопровождения объекта. Используемый аппарат позволяет ввести минимальное количество ограничений. В частности, объект может перемещаться, в том числе во время обнаружения, а также появляться в зоне ответственности радиолокатора во время работы последнего.

8.2. Априорное статистическое описание радиолокационной обстановки

При синтезе единого радиолокационного алгоритма обнаружения-измерения основополагающей является та идея, что радиолокатор в каждый момент времени должен строить апостериорную вероятность факта наличия объекта и апостериорное распределение вероятности его координат. Эти вероятности формируются на основе совокупности прошлых (по отношению к текущему моменту времени) наблюдений радиолокатора. Как только апостериорная неопределенность факта наличия объекта становится достаточно малой, принимается окончательное необратимое решение о наличии объекта. В частности, вероятность наличия объекта на каком-то этапе может быть принята равной единице и далее начинает формироваться только апостериорное распределение его координат. Можно считать, что именно в этот момент времени закончилось обнаружение и началось точное сопровождение объекта.

В такой постановке единый радиолокационный алгоритм обнаружения-измерения подобен алгоритмам фильтрации случайных процессов. Алгоритм фильтрации случайного процесса в классической постановке задачи заключается в построении в каждый момент времени апостериорного распределения вероятностей значений ненаблюдаемой компоненты случайного процесса. Однако при этом всегда имеется в виду процесс со значениями в числовом пространстве, возможно многомерном. В данном случае процесс, для которого строятся апостериорные вероятности, в качестве своих значений имеет такие элементы, как факт наличия или отсутствия цели, т. е. задача построения апостериорных вероятностей значений такого процесса сильно отличается от классической задачи фильтрации и требует специального рассмотрения.

Итак, введем в рассмотрение процесс $\lambda(t)$, апостериорные вероятности которого должны строиться в результате радиолокационных наблюдений. Будем его называть радиолокационной обстановкой. Изучим множество Λ «значений» этого процесса. Это множество не является числовым и состоит из элементов:

1) «объект отсутствует»;

2) «объект присутствует и имеет координаты $\boldsymbol{\vartheta}$».

Точка $\boldsymbol{\vartheta}$ может принимать любое значение из координатного пространства Θ, т. е. многомерного числового пространства. В задачах оценивания координат объекта и построения его траектории имеют дело только с этим пространством. Сейчас же совокупность значений процесса, т. е. пространства Λ, дополнилась еще элементом «объект отсутствует». Удобно элементы пространства Λ параметризовать и записать

$$\Lambda = \{0; (1, \boldsymbol{\vartheta}), \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta\}, \tag{8.1}$$

где элемент 0 отождествляется с фактом отсутствия объекта, а элемент $(1, \boldsymbol{\vartheta})$ — с фактом наличия объекта с координатами $\boldsymbol{\vartheta}$. Процесс с множеством значений (8.1) называется точечным потоком в прост-

ранстве Θ; значение 0 соответствует отсутствию точек, значение $(1, \vartheta)$ — наличию одной точки с координатами ϑ.

В многоцелевой радиолокации вводятся еще значения радиолокационной обстановки, соответствующие наличию двух, трех и т. д. объектов:

$$3)\ (2, \vartheta_1, \vartheta_2);\ \vartheta_1, \vartheta_2 \in \Theta;$$

$$4)\ (3, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3);\ \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3 \in \Theta$$

и т. д. Представление радиолокационной обстановки в виде точечного потока было введено И. А. Большаковым [7]. Это представление оказалось весьма плодотворным и позволило с единых позиций подойти к синтезу радиолокационных алгоритмов. Мы далее ограничимся одноцелевым случаем и множество значений радиолокационной обстановки примем в виде (8.1).

Введем в рассмотрение распределение вероятностей на множестве Λ. Оно задается вероятностью W_0 элемента 0 и плотностью вероятности $W_1(\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$, характеризующей распределение координаты объекта в случае его наличия. В силу нормировки

$$W_0 + \int_{\Theta} W_1(\vartheta)\, d\vartheta = 1. \tag{8.2}$$

Вероятности W_0 и $W_1(\vartheta)$ должны быть заданы априори и в дальнейшем будут уточняться апостериори на основе радиолокационных наблюдений. В силу нормировки (8.2) достаточно иметь только функцию $W_1(\vartheta)$, которую в этом случае уместно обозначить без индекса, т. е. $W(\vartheta)$. При этом $\int_{\Theta} W(\vartheta) d\vartheta$ будет представлять собой вероятность наличия объекта, а $1 - \int_{\Theta} W(\vartheta) d\vartheta = W_0$ — вероятность его отсутствия.

При изменении радиолокационной обстановки ее значения из пространства Λ изменяются. Рассмотрим для иллюстрации примеры последовательности значений радиолокационной обстановки в дискретном времени:

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}
$(1, \vartheta_1)$	$(1, \vartheta_2)$	$(1, \vartheta_3)$	$(1, \vartheta_4)$	$(1, \vartheta_5)$	$(1, \vartheta_6)$	$(1, \vartheta_7)$	$(1, \vartheta_8)$	$(1, \vartheta_9)$	$(1, \vartheta_{10})$
0	0	0	0	$(1, \vartheta_5)$	$(1, \vartheta_6)$	$(1, \vartheta_7)$	$(1, \vartheta_8)$	$(1, \vartheta_9)$	$(1, \vartheta_{10})$
0	0	$(1, \vartheta_3)$	$(1, \vartheta_4)$	$(1, \vartheta_5)$	$(1, \vartheta_6)$	0	0	0	0

Верхняя последовательность означает, что в течение всего времени работы радиолокатора объект присутствовал и перемещался по траектории $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{10}$. В случае средней последовательности объект до момента t отсутствовал, затем появился в точке ϑ_5 и двигался по траектории $\vartheta_5, \vartheta_6, \ldots, \vartheta_{10}$. Обычно точка, в которой объект появляется (в данном случае ϑ_5), находится на краю зоны ответственности радиолокатора: объект входит в зону извне. В случае нижней последовательности объект присутствовал в зоне ответственности радиолокатора с момента t_3 до момента t_6, двигаясь по траектории $\vartheta_3, \vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6$. Эту

ситуацию следует считать нереальной (радиолокационная цель не может исчезнуть), и приведена она лишь для иллюстрации.

Для задач синтеза оптимального алгоритма обнаружения должна быть задана априорная статистика процесса $\lambda(t)$, т. е. для любой последовательности моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$ должно быть задано многомерное распределение вероятностей $W_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Оно задано на множестве Λ и в связи со сложной структурой множества Λ представляет собой сложную конструкцию.

В дальнейшем ограничимся случаем марковского процесса $\lambda(t)$. Предположение о марковости весьма удобно для теоретических расчетов. Вопрос об адекватности марковского приближения действительности мы обсудим несколько позже, после более подробного изучения структуры марковского процесса $\lambda(t)$. Для марковского процесса основной характеристикой, определяющей его свойства, является переходное распределение вероятностей $W(\lambda, t_n/\lambda', t_{n-1})$, т. е. распределение вероятностей значений $\lambda(t_n)$ при условии, что $\lambda(t_{n-1}) = \lambda'$. В сделанных предположениях

$$W_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = W(\lambda_n, t_n \mid \lambda_{n-1}, t_{n-1}) \times$$
$$\times W(\lambda_{n-1}, t_{n-1} \mid \lambda_{n-2}, t_{n-2}) \times \ldots \times W(\lambda_2, t_2 \mid \lambda_1, t_1) W_{t_1}(\lambda_1). \quad (8.3)$$

Теперь структура многомерного распределения $W_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ довольно легко раскрывается. Чтобы не загромождать изложения несущественной общностью, ограничимся стационарным случаем, когда $W(\lambda_n, t_n \mid \lambda_{n-1}, t_{n-1})$ явно не зависит от t_n, t_{n-1}, а зависит лишь от их разности $t_n - t_{n-1} = T$, которую будем считать фиксированной, а из обозначений можно исключить: $W(\lambda_n, t_n \mid \lambda_{n-1}, t_{n-1}) = W(\lambda_n \mid \lambda_{n-1})$.

Учитывая структуру пространства Λ, мы должны ввести в рассмотрение следующие переходные вероятности:

$$W(0|0),\ W(0|(1, \vartheta)),\ W((1, \vartheta)|0) = W_{\text{п}}(\vartheta),\ W((1, \vartheta)|(1, \vartheta')) =$$
$$= W_{\text{пер}}(\vartheta|\vartheta'),$$

где 1-я соответствует вероятности непоявления объекта за время T, если он отсутствовал; 2-я — вероятности исчезновения объекта за время T, если он присутствовал в точке ϑ; 3-я — плотности вероятности появления объекта в точке ϑ за время T, если он отсутствовал; 4-я есть плотность вероятности перемещения объекта в точку ϑ из ϑ' за время T. Последняя плотность вероятности определяет динамику движения объекта. Первые три вероятности характеризуют априорную статистику изменения радиолокационной обстановки в смысле появления или исчезновения объекта. Вероятность исчезновения объекта $W(0|(1, \vartheta))$ можно положить равной 0, так как эту ситуацию следует считать нереальной. С учетом этого предположения можно записать следующие условия нормировки:

$$W(0|0) + \int_{\vartheta} W_{\text{п}}(\vartheta)\, d\vartheta = 1;\ \int_{\vartheta} W_{\text{пер}}(\vartheta|\vartheta')\, d\vartheta = 1. \quad (8.4)$$

В (8.3) входит еще начальная вероятность $W_{t_1}(\lambda_1)$. В силу предположения о стационарности индекс t_1 может быть опущен. Структура этой вероятности и относящиеся к ней обозначения были описаны выше [см. (8.2)].

9.3. Модели и статистические характеристики наблюдаемого радиолокационного сигнала

Пусть радиолокационная обстановка представляет собой процесс $\lambda(t)$. Рассмотрим радиолокатор, который для определенности будем предполагать импульсным. В моменты t_1, t_2, t_3, ..., разделенные периодом повторения T, радиолокатор производит зондирование пространства и получает сигналы x_1, x_2, x_3, ... Эти сигналы зависят соответственно от значений радиолокационной обстановки $\lambda(t_1)$, $\lambda(t_2)$, $\lambda(t_3)$ ..., которые будем обозначать просто λ_1, λ_2, λ_3, ... Радиолокационные сигналы x_1, x_2, x_3, ..., хотя они обозначены простыми символами, на самом деле представляют собой функции времени.

Обычная ситуация такова. На интервале $(t_1 - \tau_и, t_1)$ излучается зондирующий радиолокационный импульс, после чего на интервале $(t_1, t_2 - \tau_и)$, до начала излучения следующего импульса, ведется прием отраженного сигнала. Принимаемый сигнал представляет собой функцию времени $x_1(t)$, $t_1 < t < t_2 - \tau_и$. В следующем такте на интервале $(t_2 - \tau_и, t_2)$ излучается 2-й зондирующий импульс и на интервале $(t_2, t_3 - \tau_и)$ ведется прием отраженного сигнала. При этом регистрируется функция $x_2(t)$, $t_2 < t < t_3 - \tau_и$, и т. д.

Если считать, что в каждом такте локации идет свой отсчет времени от момента начала наблюдения, то все наблюдаемые сигналы $x_i(t)$ оказываются заданными на одном и том же временном интервале $(0, T - \tau_и)$. Если пренебречь фактом невозможности приема отраженного сигнала во время излучения импульса, имеющим скорее практический, чем теоретический характер, то наблюдаемые сигналы можно считать заданными на отрезке $(0, T)$.

Таким образом, сигнал, обозначенный x_i, в развернутом виде представляет собой функцию времени $x_i(t)$, $0 < t < T$. Более того, в случае многоканального приема функция $x_i(t)$ может быть векторной. Для удобства дальнейшего изложения заменим сигнал $x_i(t)$ совокупностью выборочных значений $(x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in})$, где $x_{ik} = x_i(t_k)$. Под x_i при этом будем понимать вектор выборочных значений. Если сигнал $x_i(t)$ сам по себе является векторной функцией, то размерность вектора x_i соответственно увеличивается. В конечных выражениях, содержащих x_i, будем переходить к пределу, уменьшая интервал выборки Δt и увеличивая ее объем n. Связь сигнала x_i с радиолокационной обстановкой λ_i, вообще говоря, вероятностная и характеризуется многомерной плотностью $W(\mathbf{x}|\lambda_i)$. Вычисление этой плотности обычно представляет собой сложную задачу, однако для гауссовского отраженного сигнала и аддитивных помех ее решение хорошо известно.

Отметим, что $W(\mathbf{x}|0) = W_0(\mathbf{x})$ есть плотность распределения вероятности шумового сигнала, поскольку объект по условию отсутствует; $W(\mathbf{x}|(1, \hat{\mathbf{v}})) = W_1(\mathbf{x}|\hat{\mathbf{v}})$ есть плотность распределения вероятно-

стей сигнала, отраженного от объекта с координатами ϑ(и, разумеется, смешанного с шумами). Отношение

$$l(\vartheta) = W_1(\mathbf{x}|\vartheta)/W_0(\mathbf{x})$$

называется отношением правдоподобия и играет важную роль в задачах обнаружения.

Рассмотрим ряд наиболее употребительных моделей радиолокационных сигналов и запишем для них отношение правдоподобия.

Простейшая модель такова:

$$x(t) = s(t-\tau) + n(t),$$

где $s(t)$ — импульс известной формы; $\tau = 2R/c$ — задержка; R — дальность до объекта; $n(t)$ — шум. Если $n(t)$ — белый шум со спектральной плотностью интенсивности N_0, то

$$W_0(\mathbf{x}) = \left(\frac{2\pi N_0}{\Delta t}\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\Delta t}{2N_0}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\};$$

$$W_1(\mathbf{x}) = \left(\frac{2\pi N_0}{\Delta t}\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\Delta t}{2N_0}\sum_{i=1}^{n}(x_i - s(t_i-\tau))^2\right\}; \qquad (8.5)$$

$$l(R) = \exp\left\{\frac{\Delta t}{N_0}\sum_{i=0}^{n} x_i s(t_i-\tau) - \frac{E}{2N_0}\right\},$$

где Δt — интервал выборки; $E = \int_0^T s^2(t-\tau)dt$.

Константа E играет роль энергии сигнала. Отметим, что обычно длительность импульса значительно меньше периода радиолокации T, благодаря чему E не зависит от задержки сигнала τ. В данном случае сигнал зависит только от одной координаты объекта — дальности. Ясно, что приведенная модель весьма идеализирована и далека от реальных радиолокационных задач и поэтому применяется для простейших иллюстраций.

Обычно для радиолокационных расчетов используется следующая модель. Предполагается, что прием отраженного сигнала ведется n каналами, которым соответствуют комплексные диаграммы направленности $g_1(\alpha, \beta)$, $g_2(\alpha, \beta)$, ..., $g_n(\alpha, \beta)$. Обозначив через $\mathbf{g}(\alpha, \beta)$ вектор-столбец из этих диаграмм, можем сказать, что принимается векторный сигнал

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{Re}\, E\mathbf{g}(\alpha, \beta)s(t-\tau)\exp\{i\omega_0 t\} + \mathbf{n}(t), \qquad (8.6)$$

где $s(t)$ — импульс известной формы; $\tau = 2R/c$ — задержка; R — дальность до объекта; α, β — его угловые координаты; E — случайная гауссовская комплексная амплитуда отраженного сигнала, определяющаяся отражающей поверхностью объекта, фазовыми набегами при распространении и фазой отражения, ослаблением при распро-

странении и т. д.; $\mathbf{n}(t)$ — векторный шум с независимыми компонентами.

Чтобы записать функционал отношения правдоподобия для сигнала (8.6), необходимо вычислить его корреляционную матрицу

$$M[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}^+(t_2)] = \mathbf{B}(t_1, t_2) = p\,\mathrm{Re}\,\mathbf{g}(\alpha, \beta)\mathbf{g}^+(\alpha, \beta) \times$$
$$\times s(t_1 - \tau)s^*(t_2 - \tau)\exp\{i\omega_0(t_1 - t_2)\} + IN_0\delta(t_1 - t_2), \quad (8.7)$$

где $+$ — операция транспонирования; $p = 0{,}5M[|E|^2]$ (предполагается, что из-за равномерно распределенной фазы $ME^2 = 0$); I — единичная матрица; N_0 — спектральная плотность шума в одном канале (предполагается, что шумы белые, независимые в различных каналах, одинаковые по интенсивности).

Далее вычисляется обратная корреляционная матрица $\mathbf{B}^{-1}(t_1, t_2)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\int_1^T \mathbf{B}(t_1, t_2)\,\mathbf{B}^{-1}(t_2, t_3)\,dt_2 = I\delta(t_1 - t_3). \quad (8.8)$$

Решение уравнения (8.8) имеет вид

$$\mathbf{B}^{-1}(t_2, t_3) = v\,\mathrm{Re}\,\mathbf{g}(\alpha, \beta)\mathbf{g}^{+*}(\alpha, \beta)s(t - \tau)s^*(t - \tau) \times$$
$$\times \exp\{i\omega_0(t_2 - t_3)\} + I\delta(t_2 - t_3)/N_0, \quad (8.9)$$

где v — неизвестная константа. Подстановка (8.7) и (8.9) в (8.8) дает

$$(pv/2)|\mathbf{g}(\alpha, \beta)|^2 + p/N_0 + vN_0 = 0,$$

откуда

$$v = -\frac{P}{N_0}\Big/\left(N_0 + \frac{P}{2}|\mathbf{g}(\alpha, \beta)|^2\right). \quad (8.10)$$

Здесь использовано нормировочное условие

$$\int_0^T |s(t-\tau)|^2\,dt = 1. \quad (8.11)$$

Плотность вероятности n-мерной выборки с интервалом Δt из значений процесса (8.6), как известно, выражается формулой [17]

$$W_1(\mathbf{x}|\vartheta) = c_n(p)\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n}\mathbf{x}_i^+\,\mathbf{B}_{ij}^{-1}\,\mathbf{x}_j(\Delta t)^2\right\}, \quad (8.12)$$

где $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(t_i)$; $\mathbf{B}_{i,j}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}(t_i, t_j)$; $c_n(p)$ — нормировочная константа, зависящая от интенсивности полезного сигнала, для определения которой имеем [17]

$$\frac{\partial \ln c_n(p)}{\partial p} = -\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n}\mathrm{tr}\,\frac{\partial \mathbf{B}_{ij}}{\partial p}\,\mathbf{B}_{ij}^{-1}(\Delta t)^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n}\mathrm{tr}\,\mathrm{Re}\,\mathbf{g}(\alpha, \beta)\,\mathbf{g}^{+*}(\alpha, \beta)\,s(t_i - \tau)\,s^*(t_j - \tau) \times$$

$$\times \exp\{i\omega_0(t_i - t_j)\}\,[v\,\mathrm{Re}\,\mathbf{g}(\alpha,\beta)\,\mathbf{g}^{+*}(\alpha,\beta)\,s(t_i-\tau)\,s^*(t_j-\tau)\times$$

$$\times \exp\{i\omega_0(t_i-t_j)\} + \frac{1}{\Delta t N_0} I\delta_{ij}\Big](\Delta t)^2 \approx$$

$$\approx -\frac{1}{2}\left[\frac{v}{2}\left|\mathbf{g}(\alpha,\beta)\right|^4 + \frac{1}{N_0}\left|\mathbf{g}(\alpha,\beta)\right|^2\right].$$

Учитывая (8.10), легко получить

$$c_n(p) = \left(\frac{2\pi N_0}{\Delta t}\right)^{-\frac{n}{2}} \Big/ \left(1 + \frac{p\,|\mathbf{g}(\alpha,\beta)|^2}{2N_0}\right).$$

Окончательно

$$W_1(\mathbf{x}\,|\,\vartheta) = W_1(\mathbf{x}\,|\,\alpha,\beta,R) = \left[\left(\frac{2\pi N_0}{\Delta t}\right)^{-\frac{n}{2}} \Big/ \left(1 + \frac{p\,|\mathbf{g}(\alpha,\beta)|^2}{2N_0}\right)\right]\times$$

$$\times \exp\left\{\frac{1}{N_0}\,\frac{1/(2N_0)}{1 + \dfrac{p\,|\mathbf{g}(\alpha,\beta)|^2}{2N_0}}\left|\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i^+\,\mathbf{g}(\alpha,\beta)\,s(t_i-\tau)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times \exp\{i\omega_0 t_i\}\,\Delta t\right|^2 - \frac{1}{2N_0}\sum_{i=0}^{n}\mathbf{x}_i^2\,\Delta t\right\}.$$

При $p = 0$ это распределение переходит в $W_0(\mathbf{x})$. Отсюда функционал отношения правдоподобия оказывается равным

$$l(\alpha,\beta,R) = \frac{1}{1 + p\,|\mathbf{g}(\alpha,\beta)|^2/(2N_0)} \exp\left\{\frac{1}{N_0}\,\frac{p/(2N_0)}{1 + p\,|\mathbf{g}(\alpha,\beta)|^2/(2N_0)}\times\right.$$

$$\left.\times\left|\int_0^T \mathbf{x}^+(t)\,\mathbf{g}(\alpha,\beta)\,s(t-\tau)\exp\{i\omega_0 t\}\,dt\right|^2\right\}. \qquad (8.13)$$

Рассмотрим еще одну модель, характерную для оптической локации. В задачах локации с помощью оптических сигналов нужно предполагать, что наблюдается не просто векторный сигнал, а поле на некоторой входной апертуре локатора. Это поле может быть записано в следующем виде:

$$x(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\,\xi(t)s(t-\tau)\exp\{i\omega_0(t - |r - \mathbf{R}|/c)\} + n(\mathbf{r},t), \qquad (8.14)$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор объекта; $\tau = 2R/c$ — задержка; $s(t)$ — импульс известной формы; $\xi(t)$ — случайная комплексная (амплитудно-фазовая) модуляция импульса, обусловленная относительной широкополосностью (частичной когерентностью) лазерных сигналов, мерцаниями яркости объекта в когерентном свете в связи с интерференцией отражений от микронеоднородностей поверхности объекта (в $\xi(t)$ включены также ослабление сигнала оптического диапазона при распро-

странении в атмосфере и общая интенсивность отраженного сигнала); $n(\mathbf{r}, t)$ — пространственно-временной шум на апертуре, обусловленный внешними шумовыми источниками, который с большой точностью можно полагать белым. Поскольку размеры приемной апертуры всегда значительно меньше расстояния до объекта, т. е. $r \ll R$, то можно использовать приближение

$$|\mathbf{r} - \mathbf{R}| \approx R - \mathbf{n}\mathbf{r} + r^2/(2R),$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ — единичный вектор направления на объект, характеризующий угловое положение объекта. Сохранение квадратичного по r члена в этом разложении, характеризующего френелевское приближение, весьма существенно для оптического диапазона волн.

Корреляционная функция поля (8.14) равна

$$\begin{aligned} M[x(\mathbf{r}_1, t_1)x(\mathbf{r}_2, t_2)] &= B(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \\ &= p\,\mathrm{Re}\,\rho(t_1 - t_2)s(t_1 - \tau)s^*(t_2 - \tau)\times \\ \times \exp\{i\omega_0[t_1 - t_2 - \mathbf{n}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/c + (r_1^2 - r_2^2)/(2Rc)]\} &+ \\ + N_0\delta(t_1 - t_2)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), & \end{aligned} \tag{8.15}$$

где $2p\rho(t_1 - t_2) = M[\xi(t_1)\xi^*(t_2)]$ — корреляционная функция случайной комплексной модуляции сигнала, причем использована нормировка $\rho(0) = 1$. Обратная функция $B^{-1}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_0^T \int_{s_A} B(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) B^{-1}(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_3, t_3)\, d\mathbf{r}_2\, dt_2 = \delta(t_1 - t_3)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3), \tag{8.16}$$

где s_A — входная апертура. Решение уравнения (8.16) имеет вид

$$\begin{aligned} B^{-1}(\mathbf{r}_2 t_2; \mathbf{r}_3 t_3) &= \mathrm{Re}\, v(t_2, t_3)\, s(t_2 - \tau)\, s^*(t_3 - \tau)\times \\ \times \exp\left\{i\omega_0\left[t_2 - t_3 - \frac{\mathbf{n}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)}{c} + \frac{r_2^2 - r_3^2}{2Rc}\right]\right\} &+ \\ + \frac{1}{2N_0}\delta(t_2 - t_3)\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3). & \end{aligned} \tag{8.17}$$

Подстановка (8.17) и (8.15) в (8.16) дает

$$\begin{aligned} p\frac{s_A}{2}\int_0^T \rho(t_1 - t_2)\,|s(t_2 - \tau)|^2\, v(t_2, t_3)\, dt_2 + \\ + \frac{p}{N_0}\rho(t_1 - t_3) + N_0 v(t_1, t_3) = 0. \end{aligned} \tag{8.18}$$

Ввиду значительной относительной широкополосности лазерных сигналов функция $\rho(t_1 - t_2)$ и, следовательно, $v(t_2, t_3)$ имеют вид узких пиков, ширина которых существенно меньше длительности им-

пульса $|s(t_2-\tau)|^2$. Поэтому уравнение (8.18) может быть переписано в виде

$$\frac{ps_A}{2}\int_0^T \rho(t_1-t_2)\,v(t_2-t_3)\,dt_2\,|s(t_3-\tau)|^2+$$

$$+\frac{p}{N_0}\rho(t_1-t_3)+N_0 v(t_1,\,t_3)=0.$$

Преобразуя это равенство по Фурье по переменной t_1, получаем

$$\frac{ps_A}{2}s(\omega)\int_0^T v(t_2,\,t_3)\exp\{-i\omega t_2\}\,dt_2\,|s(t_3-\tau)|^2+$$

$$+\frac{p}{N_0}s(\omega)\exp\{-i\omega t_3\}+N_0\int_0^T v(t_1,\,t_3)\exp\{-i\omega t_1\}\,dt_1=0.$$

Отсюда

$$\int_0^T v(t_1,\,t_3)\exp\{-i\omega t_1\}\,dt_1=\frac{(-p/N_0)\,s(\omega)\exp\{-i\omega t_3\}}{N_0+(ps_A/2)\,s(\omega)\,|s(t_3-\tau)|^2};$$

$$v(t_1,\,t_3)\approx\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-p/N_0)\,s(\omega)\exp\{i\omega(t_1-t_3)\}\,d\omega}{N_0+(ps_A/2)\,s(\omega)\,|s(t_3-\tau)|^2}. \qquad (8.19)$$

Разумеется, это решение имеет место при $\tau_k \ll T$, где τ_k — время корреляции процесса $\xi(t)$ (ширина пика функции $|\rho(t)|$).

Плотность вероятности n-мерной выборки из поля $x(\mathbf{r},\,t)$ имеет вид

$$W_1(\mathbf{x}\,|\,\vartheta)=c_n(p)\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n}\mathbf{B}_{ij}^{-1}x_i x_j(\Delta v)^2\right\}\left(\frac{2\pi N_0}{\Delta t}\right)^{-n/2},$$

где Δv — объем пространственно-временно́го элемента дискретизации. Для определения нормировочной константы имеем соотношение

$$\frac{\partial \ln c_n(p)}{\partial p}=-\frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{n}\operatorname{tr}\frac{\partial \mathbf{B}_{ij}}{\partial p}\mathbf{B}_{ij}^{-1}(\Delta v)^2=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{ps_A}{2}\operatorname{Re}\sum_{i,\,j}^{n}\rho(t_i-t_i)\,v^*(t_i,\,t_j)\,|s(t_i-\tau)|^2\,|s(t_j-\tau)|^2(\Delta t)^2+$$

$$+\frac{s_A}{N_0}p\approx-\int_0^T\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(\omega)\,|s(t-\tau)|^2}{N_0+(ps_A/2)\,|s(t-\tau)|^2\,s(\omega)}\,d\omega dt.$$

Отсюда $c_n(p) \approx \exp\{-\int_0^T \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln(1+\frac{ps_A}{2N_0}|s(t-\tau)|^2 s(\omega))d\omega dt\}$. Теперь мы можем записать функционал отношения правдоподобия

$$l(\vartheta) = l(R, \mathbf{n}) = \exp\left\{-\int_0^T \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln\left(1+\frac{ps_A}{2}|s(t-\tau)|^2 s(\omega)\right) \times \right.$$

$$\times d\omega dt - \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T\int_{s_A}\int_{s_A} v(t_1, t_2)\, s(t_1-\tau)\, s^*(t_2-\tau) \times$$

$$\left.\times x(\mathbf{r}_1, t_1)\, x(\mathbf{r}_2, t_2) \exp\left\{i\omega_0\left(t_1-t_2-\frac{\mathbf{n}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}{c}+\frac{\mathbf{r}_1^2-\mathbf{r}_2^2}{2Rc}\right)\right\} dt_1\, dt_2\, d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_2\right\}. \tag{8.20}$$

Таким образом, выражения (8.5), (8.19), (8.20) дают конкретные примеры отношения правдоподобия $l(\vartheta) = W_1(\mathbf{x}|\vartheta)/W_0(\mathbf{x})$ для различных локационных задач. Подчеркнем, что в качестве сигнала $\mathbf{x}$ здесь, в порядке усложнения, выступают отрезок одномерного случайного процесса, отрезок n-мерного случайного процесса, отрезок случайного поля из некоторой пространственно-временной области.

Сделаем еще одно предположение, которое обычно выполняется. Будем считать, что сигналы $x_1, x_2, x_3, \ldots$, наблюдаемые в различных тактах локации, независимы между собой.

8.4. Структура единого алгоритма обнаружения-измерения

Общей задачей радиолокационного наблюдения является формирование апостериорных вероятностей текущего состояния радиолокационной обстановки на основе последовательности наблюдений, предшествующих текущему моменту. Если с момента t_1 начала работы радиолокатора до текущего момента t_n были приняты сигналы $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то радиолокатор должен построить апостериорную вероятность значения радиолокационной обстановки λ_n при заданных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

В случае, если наблюдаемые сигналы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ независимы, а последовательность значений радиолокационной обстановки $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ априори марковская, для формирования $W_n(\lambda)$ может быть записан рекуррентный алгоритм, установленный в наиболее общем виде Р. Л. Стратоновичем [4]:

$$W_n(\lambda) = \widetilde{W}_n(\lambda)\, W(x_n|\lambda) \Big/ \int_\Lambda \widetilde{W}_n(\lambda)\, W(x_n|\lambda)\, d\lambda; \tag{8.21}$$

$$W_n(\lambda) = \int_\Lambda W(\lambda|\lambda')\, W_{n-1}(\lambda')\, d\lambda'. \tag{8.22}$$

Этот алгоритм состоит из двух частей. Формула (8.22) осуществляет экстраполяцию радиолокационной обстановки на период локации T вперед на основе априорных данных о динамике радиолокационной обстановки. Предполагается, что к моменту t_{n-1} радиолокатор сформировал апостериорную вероятность $W_{n-1}(\lambda)$. К моменту t_n, когда будет произведено следующее зондирование, радиолокационная обстановка изменится. Никакой информации, кроме априорной, о динамике ее изменения мы не имеем. На основе априорной переходной вероятности радиолокационной обстановки $W(\lambda|\lambda')$ формируется распределение вероятностей радиолокационной обстановки $\widetilde{W}_n(\lambda)$ на момент времени t_n. В этот момент времени производится зондирование, принимается сигнал x_n и формируется апостериорное распределение вероятностей радиолокационной обстановки $W_n(\lambda)$ на момент t_n; вероятность $\widetilde{W}_n(\lambda)$ выступает при этом расчете как априорная.

Конкретизируем алгоритм (8.21), (8.22), учитывая структуру пространства Λ и используя введенные в § 8.2 обозначения

$$W_{n0} = \widetilde{W}_{n0} W_0(x_n) \Big/ \left[\widetilde{W}_{n0} W_0(x_n) + \int_{\Theta} \widetilde{W}_{n1}(\vartheta) W_1(x_n \mid \vartheta)\, d\vartheta \right]; \tag{8.23}$$

$$W_{n1}(\vartheta) = \widetilde{W}_{n1}(\vartheta) W_1(x_n \mid \vartheta) \Big/ \left[\widetilde{W}_{n0} W_0(x_n) + \int_{\Theta} \widetilde{W}_{n1}(\vartheta) W_1(x_n \mid \vartheta)\, d\vartheta \right];$$

$$\widetilde{W}_{n0} = W(0 \mid 0) W_{(n-1)0}; \tag{8.24}$$

$$\widetilde{W}_{n1}(\vartheta) = W_{\text{п}}(\vartheta) W_{(n-1)0} + \int_{\Theta} W_{\text{пер}}(\vartheta \mid \vartheta') W_{(n-1)1}(\vartheta')\, d\vartheta'.$$

Разделив в (8.23) числитель и знаменатель на $W_0(x_n)$, получим

$$W_{n0} = \frac{\widetilde{W}_{n0}}{\widetilde{W}_{n0} + \int_{\Theta} \widetilde{W}_{n1}(\vartheta) l_n(\vartheta)\, d\vartheta}; \quad W_{n1}(\vartheta) = \frac{\widetilde{W}_n(\vartheta) l_n(\vartheta)}{\widetilde{W}_{n0} + \int_{\Theta} \widetilde{W}_{n1}(\vartheta) l_n(\vartheta)\, d\vartheta}.$$

Учитывая, что $W_0 + \int_{\Theta} W_1(\vartheta) d\vartheta = 1$, можем упростить алгоритм, оставив только закон формирования плотности $W_{n1}(\vartheta)$. Получим

$$W_{n1}(\vartheta) = \widetilde{W}_{n1}(\vartheta) l_n(\vartheta) \Big/ \left[1 + \int_{\Theta} \widetilde{W}_{n1}(\vartheta) (l_n(\vartheta) - 1)\, d\vartheta \right]; \tag{8.25}$$

$$\widetilde{W}_{n1}(\vartheta) = W_n(\vartheta) + \int_{\Theta} [W_{\text{пер}}(\vartheta \mid \vartheta') - W_{\text{п}}(\vartheta)] W_{(n-1)1}(\vartheta')\, d\vartheta'. \tag{8.26}$$

Формулы (8.25) и (8.26) дают полный алгоритм обработки радиолокационных сигналов и включают в себя как составную часть алго-

ритмы обнаружения и измерения координат объекта. Чтобы началась работа радиолокатора согласно алгоритму (8.25), (8.26), в начальный момент времени должна быть заложена исходная плотность вероятности нахождения объекта в точке $W_{01}(\vartheta)$. В частности, может быть $W_{01}(\vartheta) = 0$. Это означает, что объект в момент включения радиолокатора отсутствовал. Может быть задано, что $\int_{\vartheta} W_{01}(\vartheta) d\vartheta = 1$. Это означает, что объект в момент включения радиолокатора присутствует.

На рис. 8.1 изображена блок-схема алгоритма (8.25), (8.26). В ней выделены три основных блока: блок формирования отношения правдоподобия (*1*), блок формирования апостериорной вероятности (*2*) и блок экстраполяции (*3*). Блок формирования отношения правдоподобия преобразует входной сигнал в функцию $l(\vartheta)$ в пространстве координат.

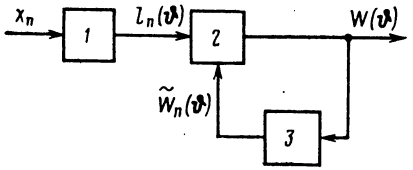


Рис. 8.1. Блок оптимального алгоритма обнаружения-измерения

При традиционном подходе к задачам обнаружения дело ограничивалось этим блоком, простой системой накопления отношений правдоподобия и пороговым устройством.

В общем случае, как видно из рис. 8.1, система накопления представляет собой систему с обратной связью со сложным алгоритмом функционирования. Пороговых устройств не требуется.

Приведенная схема отражает принципиальную суть алгоритма обработки, но малопригодна с точки зрения реализации. Дело в том, что в этой схеме производятся операции над функциями $f(\vartheta)$, заданными на пространстве радиолокационных координат. Чтобы реализовать эти операции, нужно, по меньшей мере, заменить функции совокупностями значений на некоторой достаточно плотной сетке значений $\vartheta : \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_N$. При этом алгоритм может быть представлен в виде операции над массивом значений функций: $f(\vartheta_1), f(\vartheta_2), \ldots, f(\vartheta_N)$. Обычно массив этот весьма велик, и алгоритм в таком виде громоздок для реализации. Поэтому представляет интерес предложить другой способ аппроксимации функций $f(\vartheta)$, содержащий минимальный массив числовых характеристик аппроксимации. Наиболее адекватным сути дела является аппроксимация с помощью гауссовских сплайнов, т. е. представление функций в виде суммы гауссоид.

Рассмотрим отношение правдоподобия $l(\vartheta) = W_1(\mathbf{x}|\vartheta)/W_0(\mathbf{x})$. Оно имеет вид пиков, сосредоточенных в окрестности истинных координат объектов, на некотором достаточно малом случайном фоне. Рассмотрим для иллюстрации простейший сигнал $x(t) = s(t-\tau) + n(t)$. Логарифм функционала отношения правдоподобия для него имеет вид (8.5), т. е.

$$\ln l(R) = \frac{1}{N_0} \int_0^T x(t)\, s(t-\tau)\, dt - \frac{1}{2N_0} \int_0^T s^2(t-\tau)\, dt .$$

Если в действительности имеется объект на дальности $R_{ист}$, то

$$\ln l(R) = \frac{1}{N_0}\int_0^T s(t-\tau_{ист})\, s(t-\tau)\, dt - \frac{1}{2N_0}\int_0^T s^2(t-\tau)\, dt + \xi(\tau),$$

где $\xi(\tau) = \frac{1}{N_0}\int_0^T n(t)\, s(t-\tau)\, dt.$

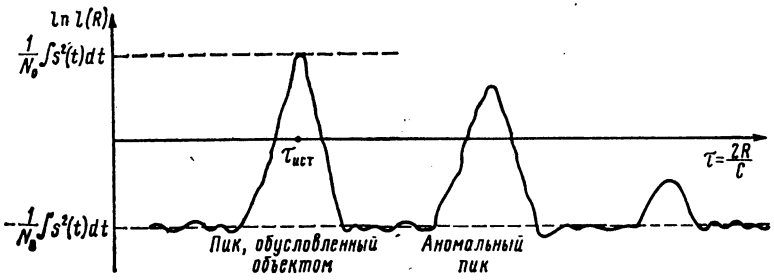


Рис. 8.2. Типовая реализация отношения правдоподобия

Регулярная часть $\ln l(R)$ имеет вид пика в точке $\tau_{ист}$ высоты $\frac{1}{N_0}\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt$, возвышающегося над уровнем $-\frac{1}{2N_0}\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt$. На эту картину наложен случайный фон $\xi(\tau)$ с корреляционной функцией

$$M[\xi(\tau_1)\,\xi(\tau_2)] = \frac{1}{N_0}\int_0^T s(t-\tau_1)\, s(t-\tau_2)\, dt,$$

совпадающей с формой пика. Среднеквадратический уровень фона равен $\sqrt{1/N_0\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt}$. Если отношение сигнал-шум $\frac{1}{N_0}\int_0^T s^2(t-\tau)dt$ — мало, то уровень фона в среднем весьма низок, хотя может иметь аномальные выбросы, по форме напоминающие регулярный пик.

Типовая реализация $\ln l(R)$ изображена на рис. 8.2. Потенцирование этой функции, очевидно, сохранит ее пиковую структуру, а нижний уровень сведет практически к нулевому. Аналогичный вид $l(\vartheta)$ будет иметь и в общем случае. Средний уровень отношения правдоподобия при отсутствии объекта, очевидно, равен $\int_{\frac{W_1(\mathbf{x}\mid\vartheta)}{W_0(\mathbf{x})}<C} \frac{W_1(\mathbf{x}\mid\vartheta)}{W_0(\mathbf{x})}\, W_0(\mathbf{x})d\mathbf{x} =$ $= \beta$, т. е. вероятности пропуска цели. Поэтому отношение правдоподобия можно аппроксимировать суммой гауссоид над ненулевым уровнем β:

$$l_n(\vartheta)=\beta+\sum_{i=1}^{n} l_{in}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\vartheta-\vartheta_{in}^{*})^{+}\mathbf{A}_{in}(\vartheta-\vartheta_{in}^{*})\right\}\sqrt{\frac{\det\mathbf{A}_{in}}{(2\pi)^{m}}}, \tag{8.27}$$

где m — размерность вектора ϑ.

При наличии объекта $l(\vartheta)$ обычно будет иметь вид пика в точке, соответствующей истинным координатам объекта. Кроме того, возможны и побочные пики, обусловленные выбросом шума, хотя и с малой вероятностью. Однако возможно пропадание истинного пика и $l(\vartheta)$ либо вообще не будет содержать пиков, либо только шумовые пики; эти события также маловероятны. Тем не менее, вообще говоря, $l(\vartheta)$ будет иметь вид пиков в точках ϑ_i^* с амплитудами l_i и формой вершин, определяемых матрицами $\mathbf{A}_i$.

Для построения аппроксимации (8.27) может быть предложена процедура сравнения $l(\vartheta)$ с порогом; пики регистрируются по превышениям порога. Точные координаты пиков (их максимумов) $\hat{\vartheta}_1$, $\hat{\vartheta}_2$, ..., $\hat{\vartheta}_n$, а также матричные характеристики формы их вершин $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, ..., $\mathbf{A}_n$ определяются в результате детального анализа отношения правдоподобия $l(\vartheta)$ в местах превышений порога. Эта процедура является, по сути дела, процедурой первичного обнаружения. Пики называются первичными локационными отметками.

Процедура вычисления координат пиков ϑ_1^*, ϑ_2^*, ..., ϑ_n^* есть процедура первичного оценивания координат; она совпадает, очевидно, с методом максимального правдоподобия. Точки $\hat{\vartheta}_i$ являются первичными замерами координат лоцируемого объекта; матрицы $\mathbf{A}_i^{-1}$ — корреляционными матрицами ошибок первичных замеров. Коэффициенты l_i определяются измерением уровней пиков и представляют собой веса единичных отметок; в среднем нужно ожидать, что для истинных отметок (соответствующих реальным объектам) эти веса больше, для ложных отметок — меньше. Тем не менее критерием для регистрации отметки является факт превышения порога. Значение порога влияет на точность аппроксимации: чем ниже порог, тем большее число пиков будет зарегистрировано и тем точнее аппроксимация. Однако возрастают соответственно сложность аппроксимации и массив ее параметров.

Таким образом, традиционные алгоритмы первичной обработки (формирование отношения правдоподобия, пороговое сравнение, оценки положений и параметров пиков) весьма естественно вписываются в общую процедуру единого радиолокационного алгоритма обнаружения-измерения как аппроксимации отношения правдоподобия. Подчеркнем, что эти обычные в практической радиолокации алгоритмы окажутся ненужными, если появится техническая возможность точной регистрации, запоминания и преобразования отношения правдоподобия $l(\vartheta)$ на всем множестве значений ϑ.

Аналогично введем аппроксимацию апостериорной плотности $W_{n1}(\vartheta)$ суммой гауссовских сплайнов и некоторого плавного уровня:

$$W_{n1}(\vartheta)=\mu_n(\vartheta)+\sum_{i=1}^{m} w_{in}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\vartheta-\widehat{\vartheta}_{in})^{+}\times\right.$$

$$\times K_{in}^{-1}(\vartheta - \widehat{\vartheta}_{in})\Big\}\big(\sqrt{(2\pi)^m \det K_{in}}\big)^{-1}. \qquad (8.28)$$

Здесь второе слагаемое представляет собой сумму пиков, характеризующих возможное апостериорное положение локационного объекта. Эта сумма сформировалась в результате появления истинной или ложных первичных отметок. Уровень $\mu_n(\vartheta)$ характеризует апостериорное положение локационного объекта в случае, если отметки от него не получены, а также если априори существует возможность появления объекта во время наблюдения. Важно отметить, что функция $\mu_n(\vartheta)$ является плавной, примерно постоянной в пределах каждого из гауссовских пиков. Разумеется, ввиду априорного предположения о наличии одного объекта $W_{n1}(\vartheta)$ с большой вероятностью будет содержать один пик, однако из-за возможного появления ложных отметок, особенно на начальном этапе обнаружения, нужно предполагать наличие нескольких апостериорных пиков местоположения объекта.

Исходя из аппроксимации (8.28), рассчитаем вид экстраполированной плотности $\widetilde{W}_{n+1}(\vartheta)$. Учтем, что период локации T представляет собой весьма малую величину по сравнению с характерными временами динамики изменения радиолокационной обстановки. Будем траекторию объекта аппроксимировать диффузионным марковским процессом с векторным коэффициентом сноса $\mathbf{a}$ и матричным коэффициентом диффузии $\mathbf{b}$. Уравнение движения объекта при этом может быть записано в виде

$$d\vartheta = \mathbf{a}dt + \mathbf{b}d\xi(t), \qquad (8.29)$$

где ξ — векторный винеровский процесс с независимыми коэффициентами и нормировкой $M[d\xi d\xi^+] = Idt$.

Будем считать снос и диффузию постоянными, не зависящими от ϑ. Класс процессов, определяемых уравнением (8.29), даже с постоянными коэффициентами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ очень широк и включает большинство практически интересных радиолокационных случаев. Из (8.29) вытекает, что переходная плотность вероятности траектории

$$W(\vartheta \mid \vartheta') = \exp\Big\{-\frac{1}{2}(\vartheta - \vartheta' - \mathbf{a}T)^+ (\mathbf{b}\mathbf{b}^+ T)^{-1}(\vartheta - \vartheta' - \mathbf{a}T)\Big\} \times$$

$$\times \frac{\det \mathbf{b}\sqrt{T}}{(2\pi)^{n/2}}. \qquad (8.30)$$

Экстраполируя плотность (8.28) в соответствии с законом (8.26) с помощью переходной плотности (8.30), получаем

$$\widetilde{W}_{n+1}(\vartheta) = \widetilde{\mu}_{n+1}(\vartheta) + \sum_{i=1}^{m} \widetilde{w}_{i(n+1)} \exp\Big\{-\frac{1}{2}(\vartheta - \widetilde{\widehat{\vartheta}}_{i(n+1)}) \times$$

$$\times \widetilde{\mathbf{K}}_{i(n+1)}^{-1}(\vartheta - \widetilde{\widehat{\vartheta}}_{i(n+1)})\Big\} \Big/ \sqrt{(2\pi)^m \det \widetilde{\mathbf{K}}_{i(n+1)}}, \qquad (8.31)$$

где введены обозначения:

$$\widetilde{w}_{i\,(n+1)} = w_{in}; \tag{8.32}$$

$$\mu_{n+1}(\vartheta) = \left(1 - \int_{\Theta} \mu_n(\vartheta)\, d\vartheta - \sum_{i=1}^{m} w_{in}\right) W_n(\vartheta) + \int_{\Theta} W_{\text{пер}}(\vartheta \mid \vartheta')\, \mu_n(\vartheta')\, d\vartheta'; \tag{8.33}$$

$$\widetilde{\widehat{\vartheta}}_{i\,(n+1)} = \widehat{\vartheta}_{in} + \mathbf{a}T; \tag{8.34}$$

$$\widetilde{\mathbf{K}}_{i\,(n+1)} = \mathbf{K}_{in} + \mathbf{b}\mathbf{b}^{+}T. \tag{8.35}$$

Смысл экстраполяции очень прост: максимумы пиков сдвинулись по траектории; пики «расплылись» из-за диффузии, причем к исходной корреляционной матрице пика при экстраполяции просто прибавилась диффузионная матрица; веса и число пиков не изменились.

Перейдем теперь к формированию апостериорной плотности по формуле (8.25). Подставляя (8.31) и (8.27) в (8.25), получаем:

$$W_{(n+1)\,1}(\vartheta) = \mu_{n+1}(\vartheta) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k} W_{i\,(n+1)} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det \widetilde{\mathbf{K}}_{i\,(n+1)}}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\vartheta - \widetilde{\widehat{\vartheta}}_{i\,(n+1)}\right)^{+} \widetilde{\mathbf{K}}_{i\,(n+1)}^{-1} \left(\vartheta - \widetilde{\widehat{\vartheta}}_{i\,(n+1)}\right)\right\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k} \mu(\vartheta^{*}_{i\,(n+1)})\, l_{i\,(n+1)} \sqrt{\frac{\det \mathbf{A}_{i\,(n+1)}}{(2\pi)^m}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\vartheta -\right.$$

$$\left. - \vartheta^{*}_{i\,(n+1)})^{+} \mathbf{A}_{i\,(n+1)} (\vartheta - \vartheta^{*}_{i\,(n+1)})\right\} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_{ij\,(n+1)} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}(\vartheta - \widehat{\vartheta}_{ij\,(n+1)})^{+} \mathbf{K}_{ij\,(n+1)}^{-1} (\vartheta - \widehat{\vartheta}_{ij\,(n+1)})\right\} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det \mathbf{K}_{ij\,(n+1)}}}; \tag{8.36}$$

$$k = 1 + \sum_{i=1}^{n} l_{i\,(n+1)}\, \mu(\vartheta^{*}_{i\,(n+1)}) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{l_{i\,(n+1)}\, \widetilde{w}_{j\,(n+1)}}{\sqrt{(2\pi)^m \det \mathbf{K}_{ij\,(n+1)}}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\widetilde{\widehat{\vartheta}}_{i\,(n+1)} - \vartheta^{*}_{j\,(n+1)}\right)^{+} \mathbf{K}_{ij\,(n+1)}^{-1} \left(\widetilde{\widehat{\vartheta}}_{i\,(n+1)} - \vartheta^{*}_{j\,(n+1)}\right)\right\}; \tag{8.37}$$

$$\mu_{n+1}(\vartheta) = \widetilde{\mu}_{n+1}(\vartheta)/k; \tag{8.38}$$

$$\mathbf{K}_{ij\,(n+1)} = \left(\widetilde{\mathbf{K}}_{i\,(n+1)}^{-1} + \mathbf{A}_{j\,(n+1)}\right)^{-1}; \tag{8.39}$$

$$\widehat{\vartheta}_{ij\,(n+1)} = \mathbf{K}_{i\,(n+1)}^{-1} \mathbf{A}_{j\,(n+1)}\, \vartheta^{*}_{j\,(n+1)} + \mathbf{K}_{ij\,(n+1)}\, \widetilde{\mathbf{K}}_{i\,(n+1)}^{-1} \times$$

$$\times \widetilde{\widehat{\vartheta}}_{i\,(n+1)} + \mathbf{K}_{ij\,(n+1)}\, \widetilde{\mathbf{K}}_{i\,(n+1)}^{-1}\, \widetilde{\widehat{\vartheta}}_{i\,(n+1)}; \tag{8.40}$$

$$w_{ij\,(n+1)} = \frac{1}{k} \frac{\widetilde{w}_{i\,(n+1)}\; l_{l\,(n+1)}}{\sqrt{(2\pi)^m \det\left(\mathbf{A}_j^{-1}{}_{(n+1)} + \widetilde{\mathbf{K}}_{i\,(n+1)}\right)}} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{1}{2}\left[\widehat{\vartheta}^{+}_{ij\,(n+1)}\, \mathbf{K}^{-1}_{ij\,(n+1)}\, \widehat{\vartheta}_{ij\,(n+1)} - \vartheta^{*+}_{j\,(n+1)}\, \mathbf{A}_{j\,(n+1)} \times\right.\right.$$

$$\left.\left. \times\, \vartheta^{*}_{j\,(n+1)} - \widetilde{\widehat{\vartheta}}_{i\,(n+1)}\, \widetilde{\mathbf{K}}_{i\,(n+1)}\, \widetilde{\widehat{\vartheta}}_{i\,(n+1)}\right]\right\}. \qquad (8.41)$$

Формулы (8.31)—(8.41) определяют рекуррентный алгоритм преобразования апостериорной плотности вероятности. Основные элементы алгоритма следующие:

1. Осуществляется пересчет плотности вероятности положения объекта, от которого не было отметок (необнаруженного). Этот пересчет производится по формулам (8.33), (8.38), (8.37).

2. Сохранились пики экстраполированной апостериорной плотности в предположении, что полученные отметки ложные. Веса этих пиков уменьшились по закону $\widetilde{w}_{i(n+1)} = w_{in}/k$.

3. Появились новые пики, соответствующие полученным отметкам, в предположении, что отметки от объекта появились впервые. Веса этих пиков равны $\mu\,(\vartheta^{*}_{l(n+1)}) l_{i(n+1)}/k$, т. е. пропорциональны вероятности нахождения в точке отметки необнаруженного объекта и весу отметок.

4. Каждый из существующих апостериорных пиков преобразуется в предположении, что он подтвержден полученной отметкой. При этом рассматриваются все mn вариантов подтверждения i-го пика j-й отметкой.

Веса подтвержденных пиков даются формулой (8.41), а их параметры — формулами (8.39), (8.40). Отметим, что формулы (8.39), (8.40) вместе с формулами (8.34), (8.35) представляют собой не что иное, как алгоритм Калмана сглаживания единичных замеров [285]. Разумеется, практически сохранить пик апостериорной плотности нужно лишь в том случае, если вблизи него не появилось отметок; точно так же формировать новый пик из полученной отметки нужно лишь в том случае, если вблизи нет построенных ранее пиков апостериорной плотности; наконец, в качестве подтверждающих отметок нужно брать лишь ближайшие к апостериорному пику отметки. Формально это проявится в том, что многие веса в (8.36) окажутся пренебрежимо малыми.

Таким образом, процедуру формирования апостериорной плотности нужно дополнить сравнением весов апостериорных пиков с порогом и отбрасыванием пиков с достаточно малыми весами. Значения порогов как в блоке первичной обработки при аппроксимации отношения правдоподобия, так и в блоке формирования апостериорной вероятности зависят от мощности вычислительных средств, используемых для обработки информации. Как уже отмечалось, идеальным случаем был такой, когда пороги берутся нулевыми и тем самым не вводится никакой аппроксимации функций $l\,(\vartheta)$ и $w_{n1}\,(\vartheta)$.

8.5. Оптимальный алгоритм обнаружения-измерения для локаторов оптического диапазона

Рассмотрим в качестве примера применение общей методики построения алгоритмов обнаружения-измерения к задаче обнаружения объекта локатором оптического диапазона. Отношение правдоподобия для этого случая было вычислено выше и выражается формулой (8.20). Первый блок обнаружителя должен преобразовывать входное поле $x(\mathbf{r}, t)$ в отношение правдоподобия $l(R, \mathbf{n})$, где R — дальность до объекта; $\mathbf{n}$ — единичный вектор направления на объект.

Чтобы дать структурную схему этого блока, введем упрощающие предположения. Будем предполагать, что форма зондирующего импульса $s(t)$ прямоугольна. В силу того, что функция $v(t_1, t_2)$ имеет вид пика малой ширины по отношению к $s(t_1 - \tau)$, ядро $-0{,}5v(t_1, t_2) \times \times s(t_1 - \tau)s^*(t_2 - \tau)$ в (8.20) может быть записано в виде

$$-\frac{1}{2} v(t_1, t_2)\, s(t_1-\tau)\, s^*(t_2-\tau) \approx -\frac{1}{2} v(t_1-t_2) \mid s(t_2-\tau) \mid^2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\omega) \mid s(t_2-\tau) \mid^2 p/(2N_0)}{N_0 + s(\omega) \mid s(t_2-\tau) \mid^2 p s_{\text{А}}/2} \exp\{i\omega(t_1-t_2)\}\, d\omega =$$

$$= \mid s(t_2-\tau) \mid^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\omega) \exp\{i\omega(t_1-t_2)\}\, p/(2N_0)}{N_0 + s(\omega)\, p\, s_{\text{А}}/(2\tau_{\text{и}})} =$$

$$= \mid s(t_2-\tau) \mid^2 v_0(t_1-t_2),$$

где

$$v_0(t_1-t_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\omega)\, p/(2N_0)}{N_0\, s(\omega)\, p s_{\text{А}}/(2\tau_{\text{и}})} \exp\{i\omega(t_1-t_2)\}\, d\omega.$$

Здесь мы использовали нормировку

$$\int_0^T \mid s(t-\tau) \mid^2 dt \approx \mid s \mid^2 \tau_{\text{и}} = 1,$$

где $|s|$ — амплитуда импульса; $\tau_{\text{и}}$ — его длительность.

Введем теперь в рассмотрение фильтр с импульсной реакцией $h(t)$ такой, что

$$v_0(t_1-t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t-t_1)\, h(t-t_2)\, dt. \qquad (8.42)$$

Легко видеть, что частотная характеристика такого фильтра

$H(i\omega) = \int h(t) \exp\{i\omega t\}\, dt$ обладает свойством

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{s(\omega)\, p/(2N_0)}{N_0 + s(\omega)\, ps_A/(2\tau_и)}, \qquad (8.43)$$

т. е. $$H(i\omega) = \sqrt{\frac{s(\omega)\, p/(2N_0)}{N_0 + s(\omega)\, ps_A/(2\tau_и)}}\, \exp\{ig(\omega)\},$$

где $g(\omega)$ — фазочастотная характеристика фильтра, не определяемая условиями (8.42), (8.43) и поэтому произвольная. Ее нужно выбрать так, чтобы обеспечить физическую реализуемость фильтра. Выражение (8.20) может быть переписано в виде

$$l(R, \mathbf{n}) \approx \exp\left\{-\Delta f \tau_и \ln\left(1 + \frac{ps_A}{2N_0 \tau_и \Delta f}\right)\right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left| \int_0^T \int_{s_A} h^*(t - t_1)\, x(\mathbf{r}_1, t_1) \exp\left\{i\omega_0\left(t_1 + \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}_1}{c} - \frac{r_1^2}{2RC}\right)\right\} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times dt_1\, d\mathbf{r}_1 \right|^2 dt \right\}, \qquad (8.44)$$

где $\Delta f = \Delta\omega/(2\pi)$; $\Delta\omega$ — эффективная ширина спектра сигнала $s(t)$.

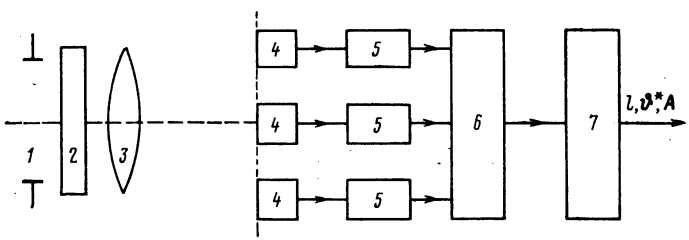


Рис. 8.3. Структурная схема оптимального приемника локационных сигналов оптического диапазона

Структурная схема устройства, формирующего логарифм отношения правдоподобия (8.44), изображена на рис. 8.3. Проанализируем эту схему. На входную апертуру s_A *1* падает поле $x(\mathbf{r}, t)$. Сразу за входной апертурой стоит фильтр оптических частот *2* с импульсной реакцией $\mathrm{Re}\, h(t) \exp(i\omega_0 t)$. После прохождения фильтра поле принимает вид

$$\mathrm{Re} \exp\{i\omega_0 t\} \int_{-\infty}^{\infty} h(t - t_1) \exp(i\omega_0 t_1)\, x(\mathbf{r}_1, t_1)\, dt_1.$$

Далее стоит квадратичная линза *3* с фокусным расстоянием F. После прохождения линзы поле приобретает квадратичный фазовый сдвиг

$$\mathrm{Re} \exp\left\{i\omega_0\left(t - \frac{l_0 - r^2/(2F)}{c}\right)\right\} \int_{-\infty}^{\infty} h(t - t_1) \exp\{-i\omega_0 t_1\}\, x(\mathbf{r}_1, t_1)\, dt_1,$$

где l_0 — оптическая толщина линзы в центре (при $r = 0$).

Далее поле свободно распространяется и в точке наблюдения будет иметь вид

$$\mathrm{Re}\int\limits_{s_A}\frac{\exp\{i\omega_0(t_0-l_0/c+r^2/(2F)-|\rho-\mathbf{r}|/c)\}}{|\rho-\mathbf{r}|}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(t-t_1)\exp(-i\omega_0 t_1)\,x(\mathbf{r}_1,t_1)\,dt_1\,d\mathbf{r}_1.$$

Полагая, что $|\rho|\gg|\mathbf{r}|$, воспользуемся разложением

$$|\rho-\mathbf{r}|=\rho-\mathbf{nr}/\rho+r^2/2\rho,$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор из центра линзы в точку наблюдения.

Выбирая фокусное расстояние линзы и расстояние до точки наблюдения так, чтобы $1/\rho+1/F=1/R$, получаем, что поле в точке наблюдения имеет вид

$$\mathrm{Re}\frac{1}{\rho}\exp\left\{i\omega_0\left(t-\frac{l_0+\rho}{c}\right)\right\}\int\limits_{s_A}\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(t-t_1)\exp\left\{-i\omega_0 t_1+\right.$$

$$\left.+i\omega_0\frac{\mathbf{nr}}{c}+i\omega\frac{r^2}{2Fc}\right\}x(\mathbf{r},t_1)\,dt_1\,d\mathbf{r}.$$

В точке наблюдения стоит оптический детектор *4*, на выходе которого получаем

$$\frac{k}{\rho^2}\left|\int\limits_{s_A}\int\limits_{-\infty}^{\infty}h^*(t-t_1)\exp\left\{i\omega_0\left(t_1-\frac{\mathbf{nr}}{c}-\frac{r^2}{2Fc}\right)\right\}x(\mathbf{r}_1,t_1)\,dt_1\,d\mathbf{r}_1\right|^2,$$

где коэффициент k представляет собой крутизну детектора.

Далее стоит фильтр видеочастот *5* с импульсной реакцией $|s(-t)|^2$, согласованной с формой импульса (напомним, что начало отсчета времени выбрано так, что $s(t)=0$ при $t>0$, что автоматически обеспечивает физическую реализуемость фильтра видеочастот). На выходе фильтра видеочастот получаем напряжение

$$u(\mathbf{n},\tau)=\frac{k}{\rho^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|s(\tau-t)|^2\,dt\int\limits_{s_A}\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(t-t_1)\times$$

$$\times\exp\left\{i\omega_0\left[t_1-\frac{\mathbf{nr}}{c}+\frac{r^2}{2Fc}\right)\right\}x(\mathbf{r},t)\,dt_1\,d\mathbf{r}. \qquad (8.45)$$

Сравнивая выражение (8.45) с (8.44), легко видеть, что

$$\ln l(R,\mathbf{n})=\Delta f\tau_{\text{и}}\ln\left(1+\frac{pS_A}{2\tau_{\text{и}}N_0\Delta_f}\right)+\frac{\rho^2}{k}u\left(-\mathbf{n},\frac{2R}{c}\right). \qquad (8.46)$$

Таким образом, напряжения на выходе видеофильтров практически совпадают с логарифмом отношения правдоподобия.

Выходные напряжения видеофильтров поступают на пороговое устройство *6*, которое фиксирует значения выходных напряжений видеофильтров, превышающих порог. Пики отношения правдоподобия, превысившие порог, в соответствии с общей теорией должны аппроксимироваться гауссовскими функциями. Следовательно, пики логарифма отношения правдоподобия должны аппроксимироваться параболическими функциями. Пусть выходные напряжения u $(-\mathbf{n}, \tau)$ превысили порог в точках $(-\mathbf{n}, \tau)_i$ $i=1, 2, \ldots, n$, и эти напряжения равны u_i. Обозначим соответствующую точку в координатном пространстве $\left(\mathbf{n}, \frac{c\tau}{2}\right)_i = \boldsymbol{\vartheta}_i$. Имеем соотношения

$$\ln l(\boldsymbol{\vartheta}_i) = \Delta f \tau_{\text{и}} \ln\left(1 + \frac{ps_{\text{A}}}{2N_0 \tau_{\text{и}} \Delta f}\right) + \frac{\rho^2}{k} u_i. \qquad (8.47)$$

В блоке *7* осуществляется параболическая аппроксимация логарифма отношения правдоподобия, который имеет вид

$$\ln l(\boldsymbol{\vartheta}) = a + 0{,}5\,(\boldsymbol{\vartheta} - \boldsymbol{\vartheta}^*)^+ \mathbf{A}\,(\boldsymbol{\vartheta} - \boldsymbol{\vartheta}^*), \qquad (8.48)$$

где $\boldsymbol{\vartheta}^*$ — точка максимума отношения правдоподобия; $\mathbf{A}$ — матрица, характеризующая форму пика отношения правдоподобия; a характеризует величину отношения правдоподобия в точке максимума.

Подставляя (8.48) в (8.47), получаем систему уравнений

$$a - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\vartheta}_i - \boldsymbol{\vartheta}^*)^+ \mathbf{A}\,(\boldsymbol{\vartheta}_i - \boldsymbol{\vartheta}^*) = \Delta f \tau_{\text{и}} \ln\left(1 + \frac{ps_{\text{A}}}{2N_0 \tau_{\text{и}} \Delta f}\right) + \frac{\rho^2}{k} u_i, \quad i = \overline{1, n}, \qquad (8.49)$$

Из этой системы уравнений находятся параметры аппроксимации a, $\boldsymbol{\vartheta}^*$, $\mathbf{A}$ как функции выходных напряжений u_i, превысивших порог. Преобразование значений выходных напряжений приемника u_i в единичные замеры $\boldsymbol{\vartheta}^*$, матрицы точностей единичных замеров $\mathbf{A}$ и веса замеров a и составляет суть первичной обработки локационной информации. Отметим, что вес замера l, фигурирующий в формуле (8.27), связан с величиной a соотношением $l = (\exp a)\sqrt{(2\pi)^m/(\det \mathbf{A})}$.

Дальнейшая обработка полученных первичных характеристик протекает в соответствии с алгоритмами (8.31)—(8.41). Эта обработка не имеет специфики, связанной с видом радиолокатора, диапазоном используемых волн, характеристиками сигнала.

Таким образом, изложенный подход позволяет синтезировать единый алгоритм оптимальной обработки радиолокационных сигналов, не разбивая его предварительно на обнаружительную и измерительную части. Однако работа единого алгоритма довольно четко распадается на два этапа, которые можно классифицировать как «обнаружение» и «измерение координат объекта». Этап «обнаружение» характеризуется формированием апостериорной вероятности наличия объекта. Одновременно формируется и оценка координат объекта, однако формирование апостериорной вероятности наличия объекта является от-

личительным признаком этого этапа. Этап «измерение координат» начинается с момента, когда апостериорная вероятность наличия объекта принимается равной единице. Вообще говоря, переход к этому режиму не обязателен, поскольку оценки координат формируются и в режиме «обнаружение». Однако формирование и пересчет апостериорной вероятности наличия объектов сильно усложняет алгоритм, особенно когда эта вероятность становится близкой к единице.

Список литературы

1. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники в 3-х кн.— М.: Сов. радио, 1976. — Кн. 3.— 285 с.
2. **Репин В. Г., Тартаковский Г. П.** Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптации информационных систем.— М.: Сов. радио, 1977.— 432 с.
3. **Сосулин Ю. Г.** Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. — М.: Сов. радио, 1978, 320 с.
4. **Стратонович Р. Л.** Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления.— М.: МГУ, 1966.
5. **Левин Б. Р., Кушнир А. Ф., Пинский А. И.** Асимптотически оптимальные алгоритмы обнаружения и различения сигналов на фоне коррелированных помех.— Радиотехника и электроника, 1971, т. 16, № 5.
6. **Миддлтон Д., Эспозито Р.** Новые результаты в теории одновременного обнаружения сигналов и оценки их параметров в сумме.— Проблемы передачи информации, 1970, т. 6, № 2.
7. **Большаков И. А.** Статистические проблемы выделения потока сигналов из шума. — М.: Сов. радио, 1969.— 464 с.
8. **Бакут П. А., Иванчук Н. А., Жулина Ю. В.** Обнаружение движущихся объектов.— М.: Сов. радио, 1980. — 288 с.
9. **Амиантов И. Н.** Избранные вопросы статистической теории связи. — М.: Сов. радио, 1971.—416 с.
10. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.— 1108 с.
11. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц: Пер. с англ.— М.: Наука, 1969.
12. **Беляев Ю. К.** Распределение максимума случайного поля и его приложение к задачам надежности.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1970, № 2.
13. **Быков В. В.** Цифровое моделирование в статистической радиотехнике.— М.: Сов. радио, 1971.— 326 с.
14. **Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д.** Выделение сигналов на фоне случайных помех.— М.: Сов. радио, 1960.
15. **Ван Трис Г.** Теория обнаружения, оценок и модуляции в 4-х т.: Пер с англ. — М.: Сов. радио, 1972.— Т.1.— 744 с.
16. **Варакин Л. Е.** Обнаружение сложных сигналов и измерение их параметров. — Радиотехника и электроника, 1973, т. 18, № 8.
17. **Вопросы** статистической теории радиолокации в 2-х т./П. А. Бакут, И. А. Большаков, Б. М. Герасимов и др.; Под ред. Г. П. Тартаковского.— М.: Сов. радио, 1963.— Т.1.
18. **Вудворд Ф. М.** Теория вероятностей и теория информации с применениями в радиолокации: Пер. с англ.— М.: Сов. радио, 1955.
19. **Горяинов В. Т.** Требования к точности тактовой синхронизации в системах передачи двоичной информации. — Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника, 1970, т. 13, № 7.
20. **Гуткин Л. С.** Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах.— М.: Сов. радио, 1972.— 447 с.
21. **Деч Р.** Нелинейные преобразования случайных процессов: Пер. с англ.—М.: Сов. радио, 1965.
22. **Ибрагимов И. А., Хасьминский Р.З.** Оценка параметров разрывного сигнала в белом гауссовом шуме.— Проблемы передачи информации, 1975, т. 11, № 3.
23. **Кендалл М., Стьюарт А.** Теория распределений. — М.: Наука, 1966.

24. **Крамер Г.** Математические методы статистики.— М.: Мир, 1975,— 648 с.
25. **Крамер Г., Лидбеттер М.** Стационарные случайные процессы. М.: Мир, 1969.
26. **Кремер И. Я., Владимиров В. И., Карпухин В. И.** Модулирующие помехи и прием радиосигналов.— М.: Сов. радио, 1972.— 480 с.
27. **Куликов Е. И., Трифонов А. П.** Оценка параметров сигналов на фоне помех. — М.: Сов. радио, 1978.— 296 с.
28. **Лебедев Н. Н.** Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963.
29. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники в 3-х кн.— М.: Сов. радио, 1975. — Кн. 2.—391 с.
30. **Маршаков В. К., Трифонов А. П.** Теоретическое и экспериментальное исследования приемника максимального правдоподобия. — Радиотехника и электроника, 1974, т. 19, № 11.
31. **Миддлтон Д.** Введение в статистическую теорию связи в 2-х т.: Пер. с англ.— М.: Сов. радио, 1962.— Т. 2.
32. **Морозов А. К., Тратас Ю. Г.** О возможности применения гауссовой аппроксимации при оценке помехоустойчивости приема. — Радиотехника, 1970, т. 25, № 11.
33. **Обрезков Г. В., Резевиг Б. Д.** Методы анализа срыва слежения. — М.: Сов. радио, 1972.—239 с.
34. **Полляк Ю. Г.** Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах.— М.: Сов. радио, 1971.— 400 с.
35. **Радченко Т. А. Трифонов А. П.** О характеристиках обнаружения квазидетерминированного сигнала.— Радиотехника и электроника, 1976, т. 21, № 7.
36. **Радченко Т. А., Трифонов А. П.** О характеристиках байесовского приемника. — Радиотехника и электроника, 1978, т. 23, № 4.
37. **Радченко Т. А., Трифонов А. П.** О характеристиках максимумов стационарных гауссовских процессов.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1979, № 5.
38. **Радченко Ю. С., Трифонов А. П.** Прием сложных сигналов приемником максимального правдоподобия.— Радиотехника и электроника, 1978, т. 23, № 8.
39. **Сарманов О. В.** Исследование стационарных марковских процессов методом разложения по собственным функциям. — Труды МИАН СССР, 1961, т. 60, 238.
40. **Случайные** процессы. Выборочные функции и пересечения: Сб. статей; Пер. с англ.— М.: Мир, 1978.
41. **Стратонович Р. Л.** Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961.
42. **Тихонов В. И.** Статистическая радиотехника.— М.: Сов. радио, 1982.— 624 с.
43. **Тихонов В. И.** Выбросы случайных процессов.— М.: Наука, 1970,—392 с.
44. **Тихонов В. И., Миронов М. А.** Марковские процессы.— М.: Сов. радио, 1977, 488 с. с ил.
45. **Тихонов В. И., Кульман Н. К.** Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов.— М.: Сов. радио, 1975.—704 с.
46. **Трифонов А. П.** Асимптотические характеристики оптимального обнаружения квазидетерминированного сигнала на фоне гауссовой помехи.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1971, № 4.
47. **Трифонов А. П.** Прием разрывного квазидетерминированного сигнала на фоне гауссовой помехи.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1978, № 4.
48. **Трифонов А. П.** Предельная форма оптимального оператора одновременного обнаружения сигналов и оценки их параметров.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1972, № 3.
49. **Трифонов А. П.** Прием сигнала с неизвестной длительностью на фоне белого шума.— Радиотехника и электроника, 1977, т. 22, № 1.
50. **Трифонов А. П.** Прием разрывного радиосигнала на фоне белого шума.— Радиотехника и электроника, 1979, т.24, № 11.
51. **Трифонов А. П.** Прием случайного сигнала с неизвестной частотой.— Радиотехника и электроника, 1980, т. 25, № 4.
52. **Тузов Г. И.** Статистическая теория приема сложных сигналов. — М.: Сов. радио, 1977.—400 с.
53. **Фалькович С. Е.** Прием радиолокационных сигналов на фоне флуктуационных помех.— М.: Сов. радио, 1961.
54. **Фалькович С. Е.** Оценка параметров сигнала.— М.: Сов. радио, 1970.—334 с.

55. **Федорюк М. В.** Метод перевала.— М.: Наука, 1977.— 368 с.
56. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения в 2-х т.: Пер. с англ.— М.: Мир, 1967.—Т.2.
57. **Хелстром К.** Статистическая теория обнаружения сигналов: Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1963.
58. **Цикин И. А.** О помехоустойчивости приема сигнала в канале с неизвестными параметрами. — Радиотехника, 1966, т. 21, № 6.
59. **Mc Fadden I. A.** On a class of Gaussian process for which the mean rate of crossing is infinite. — J. Roy. Statist. Soc., 1967, v. B29, p. 489—502.
60. **Pickands J.** Upcrossing probabilities for stationary Gaussian process.— Trans. Amer. Math. Soc., 1969, 145, November.
61. **Seidman L. P.** An upper bound on average estimation error in nonlinear systems. — IEEE Trans., 1968, v. IT-14, March.
62. **Shepp L. A.** Radon-Nicodym derivatives of Gaussian measures. — Ann. Math. Statist., 1966, v. 37, p. 321—354.
63. **Zakai M., Ziv J.** On the threshold effect in radar range estimation. — IEEE Trans., 1969, v. IT-15, 1, p. 167.
64. **Богданович В. А.** Обнаружение когерентной пачки импульсов в шумах с неизвестной мощностью. — Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника, 1971, т. 14, № 7.
65. **Богданович В. А.,** Регулярный способ построения максимального инварианта в задачах проверки сложных гипотез. — Радиотехника и электроника, 1972, т. 17, № 4, с. 873—876.
66. **Богданович В. А.** Применение принципа инвариантности в задачах обнаружения с априорной неопределенностью.— Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника, 1973, т. 16, № 1, с. 43—47.
67. **Богданович В. А.** Многоальтернативные несмещенные правила обнаружения сигналов.— Радиотехника и электроника, 1973, т. 18, № 11, с. 2294—2301.
68. **Богданович В. А.** Инвариантное правило приема ортогональных сигналов в шумах с неизвестными характеристиками. —Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника, 1973, т. 16, № 11, с. 36—42.
69. **Богданович В. А., Прокофьев В. Н.** Несмещенные правила обнаружения сигналов при негауссовых распределениях с неизвестными параметрами. — Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника, 1974, т. 17, № 4, с. 80—84.
70. **Богданович В. А.** Способ построения инвариантных статистик.— Проблемы передачи информации, 1975, т. 11, № 1, с. 114—116.
71. **Богданович В. А.** Прием сигналов при априорной неопределенности помеховой обстановки.— В кн.: Электромагнитная совместимость судового радиооборудования.— Л.: Судостроение, 1977.
72. **Богданович В. А.** Прием сигналов при воздействии сосредоточенной помехи с неопределенными параметрами. — Радиотехника и электроника, 1978, т. 23, № 1, с. 187—190.
73. **Богданович В. А., Прокофьев В. Н.** Двухвыборочные непараметрические правила обнаружения сигналов.— В кн.: Адаптивные системы и их приложения/Под ред. А. В. Медведева.— Новосибирск: Наука, 1978, 191 с. с ил.
74. **Большев Л. Н., Смирнов Н. В.** Таблицы математической статистики. —М.: Наука, 1965.
75. **Ван Трис Г.** Теория обнаружения, оценок и модуляции в 4-х т.: Пер. с англ. — М.: Сов. радио, 1977.—Т.3.—662 с.
76. **Грибанов Ю. И., Мальков В. Л.** Спектральный анализ случайных процессов. — М.: Энергия, 1974.—239 с. с черт.
77. **Закс Ш.** Теория статистических выводов: Пер. с англ./Под ред. Ю. К. Беляева.— М.: Мир, 1975,—776 с.
78. **Ипатов В. П.** Полное подавление боковых лепестков периодической корреляционной функции фазоманипулированных сигналов. — Радиотехника и электроника, 1977, т. 22, № 8, с. 1600—1606.
79. **Кириллов Н. Е.** Помехоустойчивая передача сообщений по линейным каналам со случайно изменяющимися параметрами.— М.: Связь, 1971.— 256 с.
80. **Кловский Д. Д., Сойфер В. А.** Обработка пространственно-временных сигналов.— М.: Связь, 1976.—207 с.

81. **Кокс Д., Хинкли Д.** Теоретическая статистика: Пер. с англ./ Под ред. Ю. К. Беляева.— М.: Мир, 1978.
82. **Корадо В. А.** Об оптимальном обнаружении сигналов на фоне помех с неизвестными параметрами при ограниченной вероятности ложной тревоги.— Радиотехника и электроника, 1970, т. 15, № 7, с.1419—1427.
83. **Корадо В. А.** Минимаксное обнаружение квазидетерминированного сигнала на фоне гауссовской помехи с неизвестной корреляционной матрицей. — Радиотехника и электроника, 1978, т. 23, № 2, с. 326 — 333.
84. **Кузьмин С. З.** Основы теории цифровой обработки радиолокационной информации.— М.: Сов. радио, 1974.— 432с.
85. **Кузнецов В. П.** Инвариантность решений по отношению к мешающим параметрам.— Проблемы передачи информации, 1971, т. 7, № 4, с. 36—44.
86. **Левин Б. Р., Скворцов Г. И.** Обнаружение гармонической составляющей в нормальном шуме с неизвестными параметрами спектра.— Радиотехника и электроника, 1974, т. 19, № 1, с.
87. **Леман Э.** Проверка статистических гипотез: Пер. с англ. Ю. В. Прохорова.— М.: Наука, 1979.
88. **Линник Ю. В.** Статистические задачи с мешающими параметрами.—М.: Наука, 1966.
89. **Прокофьев В. Н.** Инвариантное обнаружение флуктуирующего сигнала по наблюдениям из гамма-распределения с неизвестными параметрами. — Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника, 1977, т. 20, № 3, с. 3—11.
90. **Прокофьев В. Н.** Инвариантное обнаружение одного из M ортогональных сигналов в белом гауссовском шуме с неизвестной мощностью.— Радиотехника, 1977, т. 32, № 9, с. 22—27.
91. **Прокофьев В. Н.** Обнаружение квазигармонического сигнала с неизвестной частотой в шуме неизвестной мощности и формы спектра.— Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника, 1978, т. 21, № 7, с. 108—111.
92. **Прокофьев В. Н.** Инвариантный алгоритм приема сигналов на фоне белого гауссова шума и сосредоточенных помех. — Радиотехника и электроника, 1979, т. 24, № 11, с. 70—74.
93. **Функции** с двойной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике: Пер. с англ. М. К. Размахнина, В. П. Яковлева.— М.: Сов. радио, 1971.—256 с.
94. **Рухин А. Л., Самсоненко С. В.** О процедуре обнаружения, инвариантной относительно интенсивности сигнала и помехи.— Радиотехника и электроника, 1972, т. 17, № 1, с. 170—172.
95. **Савина А. И.** Обнаружение сигналов с частотно-селективными замираниями в шумах с неизвестным спектром.— Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника, 1980, т. 23, № 4, с. 93—95.
96. **Шереметьев А. Г.** Статистическая теория лазерной связи.— М.: Связь, 1971. — 264 с.
97. **Шишкин А. Д.** Инвариантное правило обнаружения целей для РЛС с высоким разрешением.— Радиотехника и электроника, 1974, т. 19, № 7.
98. **Шлома А. М.** Последовательный алгоритм обнаружения сигналов на фоне нормальных помех с неизвестной дисперсией.— Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника, 1977, т. 20, № 9, с. 51—56.
99. **Gupta S. D.** Optimum classification rules for classification into two multivariate normal populations.— Ann. Math. Statist., 1965, N 4.
100. **Rao C. R.** A general theory of discrimination when the information about alternative populations is based on sample.— Ann. Math. Statist.,, 1954, № 4.
101. **Scharf L. L., Lytle D. W.** Signal detection in gaussian noise of unknown level. — IEEE Trans., IT-17, 1971, N 4, p. 404—439.
102. **Вопросы** статистической теории радиолокации в 2-х т./ П. А. Бакут, И. А. Большаков, Б. М. Герасимов и др.; Под ред. Г. П. Тартаковского.— М: Сов. радио, 1963.— Т.2.
103. **Блекуэлл Д., Гиршик М. А.** Теория игр и статистических решений: Пер. с англ./Под ред. Б. А. Севастьянова.— М.: ИЛ, 1958.—374 с.
104. **Большаков И. А., Левин Б. Р., Репин В. Г., Тартаковский Г. П.** Некоторые вопросы статистического синтеза информационных систем.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1970, № 2, с. 153—170.
105. **Буров В. А., Дмитриев О. В.** Применение метода максимального правдопо-

добия в задаче обнаружения шумовых сигналов.— Радиотехника и электроника, 1973, т. 18, № 6, с. 1276—1279.
106. **Вадьд А.** Статистические решающие функции.— В кн.: Позиционные игры/ Под ред. К. Н. Воробьева.— М.: Наука, 1967, с. 300—522.
107. **Гаек Я., Шидак З.** Теория ранговых критериев: Пер. с англ./ Под ред. Л. Н. Большева.— М.: Наука, 1967.— 375 с.
108. **Гуткин Л. С.** Оптимизация радиоэлектронных устройств по совокупности показателей качества.— М.: Сов. радио, 1975. — 367 с.
109. **Богданович В. А.** Способ построения подобных правил обнаружения сигналов при априорной неопределенности. — Радиотехника и электроника, 1973, № 4, с. 763—770.
110. **Дмитриенко А. Н., Корадо В. А.** Характеристики обнаружения пакета независимо флуктуирующих импульсов на фоне гауссовой помехи с неизвестной интенсивностью. — Радиотехника и электроника, 1967, т. 12, № 7.
111. **Дмитриенко А. Н., Корадо В. А.** Характеристики обнаружения когерентной пачки импульсов с неизвестной интенсивностью.— Радиотехника и электроника, 1968, т. 13, № 9, с. 1698—1700.
112. **Дмитриенко А. Н., Корадо В. А.** Характеристики обнаружения когерентной пачки импульсов со случайной начальной фазой с неизвестной интенсивностью. — Радиотехника и электроника, 1968, т. 13, № 12, с. 2245—2246.
113. **Дмитриенко А. Н., Корадо В. А.** Эффективность обнаружения случайного сигнала на фоне гауссовой помехи с неизвестной интенсивностью. — Труды 4-й конф. по теории передачи и кодирования информации. Секция 2. — Москва — Ташкент, 1969, с. 32—36.
114. **Дмитриенко А. Н., Корадо В. А.** О непараметрических свойствах обнаружителей, оптимальных для гауссовой помехи с неизвестной интенсивностью.— Радиотехника и электроника, 1972, т. 17, № 10, с. 2071—2075.
115. **Захаров С. И., Корадо В. А.** Объединение независимых каналов обнаружения сигнала на фоне помех с неизвестными интенсивностями по критерию максимального правдоподобия. — Радиотехника и электроника, 1982, т. 27, № 1, с. 61—64.
116. **Каценбоген М. С.** Характеристики обнаружения.— М.: Сов. радио, 1965.
117. **Корадо В. А.** Оптимальное обнаружение случайных сигналов на фоне случайных помех неизвестной интенсивности при условии постоянства вероятности ложной тревоги. — Радиотехника и электроника, 1968, т. 13, № 5.
118. **Корадо В. А.** Оптимальное обнаружение детерминированных сигналов со случайными параметрами на фоне помех с неизвестной интенсивностью при условии постоянства вероятности ложной тревоги. — Радиотехника и электроника, 1968, т. 13, № 6, с. 1115—1118.
119. **Корадо В. А.** Об оптимальном обнаружении сигналов при воздействии помех с неизвестными параметрами.— Радиотехника и электроника, 1969, т. 14, № 2, с. 239—248.
120. **Корадо В. А.** Оптимальное объединение независимых каналов обнаружения сигналов на фоне гауссовых помех с неизвестными интенсивностями.— Радиотехника и электроника, 1972, т. 17, № 3, с. 618—620.
121. **Корадо В. А.** Минимаксное многоальтернативное обнаружение сигналов на фоне помех с неизвестными параметрами.— М., 1972. — (Депонированная рукопись/НИИЭИР, № Д-2950).
122. **Корадо В. А.** О минимаксном обучении различению сигналов, — Проблемы передачи информации, 1977, т. 13, № 1, с. 40—57.
123. **Корадо В. А.** Оптимальное многоканальное обнаружение-различение квазидетерминированных сигналов на фоне гауссовских помех с неизвестной междуканальной корреляционной матрицей. — Радиотехника и электроника, 1980, т. 25, № 1, с. 85—92.
124. **Корадо В. А.** Характеристики обнаружения квазидетерминированного сигнала на фоне помех с неизвестной корреляционной матрицей.— Радиотехника и электроника, 1980, т. 25, № 2, с. 296—303.
125. **Корадо В. А.** О последовательном синтезе минимаксных решающих правил.— М., 1973.— (Депонированная рукопись/ВИМИ, № ВМ ДР583).
126. **Корадо В. А.** Минимаксное обнаружение случайного сигнала с неизвестной корреляционной матрицей на фоне помехи с неизвестной корреляционной матрицей.— Радиотехника и электроника, 1981, т. 26, № 1, с. 92—99.

127. **Красненкер В. М.** Стабильные методы обнаружения сигналов на фоне помех (Обзор).— Автоматика и телемеханика, 1980, № 5, с. 65—88.
128. **Кузнецов В. П.** Минимаксные линейные обнаружители Неймана-Пирсона при неточно известном сигнале и шуме.— Радиотехника и электроника, 1974, т. 19, № 12, с. 2539—2548.
129. **Линник Ю. В.** Приближенно минимаксное обнаружение векторного сигнала при гауссовской помехе.— Теория вероятностей и ее применение, 1966, № 4, с. 561—578.
130. **Оуэн Д. Б.** Сборник статистических таблиц.— М.: ВЦ АН СССР, 1966, 586 с.
131. **Слуцкий Е. Е.** Таблицы для вычисления неполной χ^2-функции и функции вероятности.— М.— Л.: АН СССР, 1950.—71 с.
132. **Прокофьев В. Н.** Максиминное решение задачи обнаружения с векторным информативным параметром.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1978, № 5, с. 145—149.
133. **Рао С. Р.** Линейные статистические методы и их применения: Пер. с англ./ Под ред. Ю. В. Линника.— М.: Наука, 1968.— 548 с.
134. **Садов Д. Д.** Об обнаружении случайного сигнала при наличии двух случайных помех с неизвестными интенсивностями.— Радиотехника и электроника, 1974, т. 19, № 11, с. 2410—2412.
135. **Ширман Я. Д.** Разрешение и сжатие сигналов — М.: Сов. радио, 1974.
136. **Ширман Я. Д., Манжос В. Н.** Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех.— М.: Радио и связь, 1981.— 416 с.
137. **Шеффе Г.** Дисперсионный анализ: Пер. с англ. Б. А. Севастьянова и В. П. Чистякова.— М.: Наука, 1980.— 512 с.
138. **Шметтерер Л.** Введение в математическую статистику. — М.: Наука, 1976.
139. **Cogburn R.** Stringent solutions to statistical decision problems.— Ann. Math. Statist., 1967, v. 38, N 2, p. 447—463.
140. **Nelson W.** Minimax solution of statistical decision problems by iteration.— Ann. Math. Statist., 1966, v. 37, N 6, p. 1643—1657.
141. **Pachares J.** A table of bias levels useful in radar detection problems.— IRE Trans., 1958, v. IT-4, p. 38—45.
142. **Pearson K.** Tables of the incomplete beta-function. — University press, Cambridge, 1934, p. 494.
143. **Shwartz R. E.** Locally minimax tests.—Ann. Math. Statist., 1967, v. 38, N 2.
144. **Tuteur O. B.** Optimum detection of a stochastic signal in a Gaussian noise of unknown strength.— Proc. IEEE, 1965, v. 53, p. 487.
145. **Wald A.** Tests of statistical hypotheses conserning several parameters when the number of obserwations is large.— Trans. Amer. Math. Soc., 1943, N 54.
146. **Wesler O.** Invariance theory and a modified minimax principle.— Ann. Math. Statist., 1959, v. 30, N 1, p. 1—20.
147. **Wijsman R. A.** Gross-sections of orbits and their application to densities of maximal invariants.— Proc. Fifth. Berkeley Symp. Math. Stat. and Probab., 1967, 1, p. 389.
148. **Zidek J. V.** A representation of bayes invariant procedures in terms of Haar measure.— Ann. Inst. Statist. Math., 1969, v. 21, N 2, p. 291—308.
149. **Вальд А.** Последовательный анализ: Пер. с англ./Под ред. Б. А. Севастьянова.— М.: Физматгиз, 1960.
150. **Вальд А., Вольфовиц Дж.** Оптимальный характер последовательного критерия отношения вероятностей. — В кн. [149], с. 308.
151. **Фу К.** Последовательные методы в распознавании образов и обучении машин: Пер. с англ. — М.: Наука, 1971.— 255 с.
152. **Башаринов А. Е., Флейшман Б. С.** Методы статистического последовательного анализа и их приложения.— М.: Сов. радио, 1962.
153. **Хазен Э. М.** Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления.— М.: Сов. радио, 1968.—255 с.
154. **Синдлер Ю. Б.** Метод двухступенчатого статистического анализа и его приложения в технике.— М.: Наука, 1973.— 191 с.
155. **М. Де Гроот.** Оптимальные статистические решения: Пер. с англ./Под ред. Ю. В. Линника и А. М. Когана.— М.: Мир, 1974.
156. **Справочник** по радиолокации в 4-х т.: Пер. с англ./Под ред. К. Н. Трофимова.— М.: Сов. радио, 1976.— Т.1.— 455 с.

157. **Сосулин Ю. Г., Фишман М.М.** Оптимальное последовательное обнаружение при информационной стоимости наблюдений.—Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1974, № 3, с. 169—176.
158. **Сосулин Ю. Г., Тартаковский А. Г., Фишман М. М.** Последовательное обнаружение коррелированного гауссовского сигнала в белом шуме.— Радиотехника и электроника, 1979, т. 24, № 4, с. 720—732.
159. **Колмогоров А. Н., Прохоров Ю. В.** О суммах случайного числа случайных слагаемых.— УМН, 1949, т. 4, вып. 4, с. 168—172.
160. **Власов И. Б.** К расчету длительности последовательного анализа.— Радиотехника и электроника, 1974, т. 19, № 1, с. 187—189.
161. **Розанов Б. А.** Распределение накопленного значения решающей статистики при последовательном анализе. Радиотехн. и электрон., 1972, т. 17, № 10.
162. **Бусганг Дж., Мидлтон Д.** Оптимальное последовательное обнаружение сигналов в шуме.— В кн.: Прием сигналов при наличии шума.— М.: ИЛ, 1960.
163. **Крапивин В. Ф.** Таблицы распределения Вальда.— М.: Наука, 1965.
164. **Girchick M. A.** Contributions to the theory of sequential analysis. — Ann. Math. Statist., 1946, v. 17, p. 282—298.
165. **Фомин Я. А.** Теория выбросов случайных процессов. — М.: Связь, 1980.
166. **Бусленко Н. П., Шрейдер Ю. А.** Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) и его реализация в цифровых машинах. М.: Физматгиз, 1961.
167. **Голенко Д. И.** Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах. — М.: Наука, 1965.
168. **Соболь И. М.** Численные методы Монте-Карло.— М.: Наука, 1973.—311 с.
169. **Marcus M. S., Swerling P.** Sequential detection in radar with multiple resolution elements.— IRE Trans., v. IT-8, 1962, N 4, p. 237—245.
170. **Blasbalg H.** Experimental result in sequential detection. — IRE Trans., v. IT-5, N 6, p. 41—51.
171. **Ван дер Варден Б.Л.** Математическая статистика. М.: ИЛ, 1960.
172. **Хан Г., Шапиро С.** Статистические модели в инженерных задачах. Пер. с англ. под ред. В. В. Налимова. — М.: Мир, 1969.
173. **Student.** The probable error of a mean.— Biometrica, v. 6, p. 1—25. 1908.
174. **Stein Ch.** A two sample test for a linear hypothesis whose power is independent of the variance. — Ann. Math. Stat., 1945, v. 16, p. 243—258.
175. **Seelbinder B. И.** On Stein's two-stage scheme. — Ann. Math. Statist., 1953, v. 24, p. 640—649.
176. **Moshman J.** A method for selecting the size of the initial sample in Stein's two sample procedure.—Ann. of Math Statist., 1958, v. 29, p. 1271—1275.
177. **Rushton S.** On a two-sided sequential t-test. — Biometrica, 1952, v. 39, part 3,4, p. 302—308.
178. **Шлома А. М.** Последовательный анализ сигналов, приводящий к статистике Стьюдента — Стейна. — Изв. АН СССР. Технич. кибернетика, 1974, № 2, с. 131—135.
179. **Шлома А. М.** Усеченный последовательный анализ сигналов в условиях априорной неопределенности. — Изв. вузов. Радиоэлектроника, т. 20, 1977, № 11, с. 120—123.
180. **Розанов Б. А., Власов И. Б.** Об инвариантных свойствах последовательного анализа.— Радиотехника и электроника, т. 21, 1976, № 4, с. 877—879.
181. **Горяинов В. Т., Журавлев А. Г., Тихонов В. И.** Примеры и задачи по статистической радиотехнике.— М.: Сов. радио, 1970.
182. **Власов И. Б., Ерыкалов В. Н.** Об адаптивном обнаружении сигнала на фоне гауссовской помехи неизвестной мощности. — Радиотехника и электроника, № 3, 1979, т. 24, с. 626—630.
183. **Розанов Б. А., Соловьев Г. Н., Солдаткина Л. И.** Об оптимальном времени измерения интенсивности нестационарной помехи. — Труды МВТУ. Вопросы радиоэлектроники, 1974, вып. 199, с. 129—133.
184. **Розанов Б. А., Солдаткина Л. И., Профатилова Г. А.** Исследование экстраполяционно-фазового метода приема когерентных импульсных последовательностей с неизвестным допплеровским сдвигом. — Труды МВТУ. Вопросы радиоэлектроники, 1976, вып. 235, с. 104—111.
185. **Кузьмин С. З.** Цифровая обработка радиолокационной информации.— М.: Сов. радио, 1967.

186. **Ширман Я. Д., Голиков В. Н., Бусыгин И. Н.** и др. Теоретические основы радиолокации/Под ред. Я. Д. Ширмана.— М.: Сов. радио, 1970, 560 с. с черт.
187. **Березин Л. В., Венцель В. А.** Принципы обработки результатов в фазовых измерительных радиосистемах.— Труды МАИ, 1970, вып. 201, с. 5—28.
188. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники в 3-х т. — М.: Сов. радио, 1974.— Кн. 1.—728 с.
189. **Розанов Б. А.** Характеристика оптимального приемника когерентного сигнала с неточно известной начальной фазой.— Радиотехника и электроника, 1976, т. 21, № 6, с. 1538—1540.
190. **Шлома А. М.** Распределение длительности многоканальной последовательной процедуры.— Радиотехника и электроника, 1977, т. 22, № 7, с. 1283.
191. **Финн.** Новый подход к проблеме последовательного обнаружения в радиолокационных системах с фазированными решетками. — Зарубежная радиоэлектроника, 1964, № 8, с. 18—32.
192. **Розанов Б. А., Власов И. Б.** Последовательный анализ в многоканальной системе с неравными энергиями в каналах. — Труды II науч. техн. конф. «Проблемы оптимальной фильтрации». — МЭИС, НТОРиЭС им. Попова. — М., 1968, вып. 2, с. 45—52.
193. **Wirth W. D.** Fast and efficient target search with phased array radars. — Proc. IEEE Internat. Radar Conf., 1975, p. 198—203.
194. **Wirth W. D.** Signal processing for target detection in experimental phased-array radar ELRA. — IEE Proc. F., Comun., Radar & Signal Proc., 1981, 128 (5), p. 311—316.
195. **Тысяцкий Г. С.** Последовательное обнаружение при наличии независимых каналов приема с шумами. — Радиотехника и электроника, 1966, т. 11, № 6.
196. **Лихарев В. А.** Цифровые методы и устройства в радиолокации. — М.: Сов. радио, 1973.— 456 с.
197. **Шлома А. М.** Последовательный анализ на экстремальных статистиках.— Радиотехника и электроника, 1974, т. 19, № 11, с. 2276—2284.
198. **Розанов Б. А., Соловьев Г. Н.** К оценке эффективности многоканального последовательного анализа с одновременным принятием решений в каналах. — Радиотехника и электроника, 1976, т. 21, № 6, с. 1233—1241.
199. **Бугаев В. А.** Многоканальное последовательное обнаружение с линейно возрастающим нижним порогом. Радиотехн. и электроника, 1965, т. 10, № 10.
200. **Власов И. Б., Кузьмина Е. К., Соловьев Г. Н.** Последовательная процедура с комбинированной статистикой для обнаружения сигнала в многоканальных системах. — Радиотехника и электроника, 1983, т. 28, — № 9.
201. **Сосулин Ю. Г., Фишман М. М.** О последовательном обнаружении сигналов на фоне помех. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1973, № 2.
202. **Власов И. Б., Розанов Б. А., Соловьев Г. Н.** Последовательное обнаружение сигналов. — Труды МВТУ. Вопросы радиоэлектроники, вып. 305, 1979.
203. **Кузьмина Е. К., Михайлицкий В. П., Профатилова Г. А.** Оценка параметров сигнала при адаптивном последовательном обнаружении. — Труды МВТУ. Вопросы радиоэлектроники, 1979, вып. 305, с. 42—60.
204. **Lehmann E. L.** The power of rank tests.— Ann. Math. Stat., 1953, v. 24.
205. **Capon J.** On the asymptotic efficiency of locally optimum detectors.— IRE Trans., 1961, v. IT-4, p. 67—71.
206. **Вакин С. А., Шустов Л. Н.** Основы радиопротиводействия и радиотехнической разведки.— М.: Сов. радио, 1968.— 448 с.
207. **Защита** от радиопомех/Под ред. М. В. Максимова. — М.: Сов. радио, 1976.
208. **Радиотехнические** системы в ракетной технике /Под общ. ред. В. И. Галкина и др.— М.: Воениздат, 1974.— 340 с.
209. **Валеев В. Г.** Характеристика маскирующей способности случайных помех.— Радиотехника и электроника, 1972, т. 17, № 5, с. 944—950.
210. **Антонов О. Е.** Оптимальное обнаружение сигналов в негауссовских помехах.— Радиотехника и электроника, 1967, т. 12, № 4, с. 579—587.
211. **Валеев В. Г., Данилов В. А.** Вероятностные и энергетические характеристики колебаний, модулированных нормальными случайными процессами.— Радиотехника и электроника, 1971, т. 16, № 22, с. 428—431.
212. **Trunk G. V.** Radar properties of non-Rayleigh sea clutter.— IEEE Trans., 1972. AES-8 N 2, p. 196—204.

213. **Jakeman E., Russey P. N.** A model tor non-Rayleigh sea echo. — IEEE Trans., 1976, AP-24, p. 806—814.
214. **Fay F. A., Clark J., Peters R. S.** Weibull distribution applied to sea clutter. — Radar-77, Int. Conf., London, 1977, p. 101—104.
215. **Jakeman E., Pussey P. N.** Statistics of non-Rayleigh microwave sea echo.— Radar-77, Int. Conf., London, 1977, p. 105—109.
216. **Вакман Д. Е., Рубичев Н. А.** Об одном способе формирования случайного процесса с заданным одномерным распределением и корреляционной функцией. — В кн.: Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей, секция 2: Тез. докл. VI Всесоюз. Симп. — Л., 1973.
217. **Валеев В. Г.** Оценка точности марковских моделей при синтезе и анализе систем обработки информации.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1972, № 5, с. 161—166.
218. **Валеев В. Г., Гонопольский В. Б.** Точность марковских моделей в задачах линейной фильтрации.— Радиотехника и электроника, 1976, т. 21, № 8.
219. **Валеев В. Г.** Оптимальная оценка параметров сигнала при наличии негауссовских помех.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1971, № 2, с. 135—146.
220. **Левин Б. Р., Кушнир А. Ф.** Асимптотически оптимальные алгоритмы обнаружения и различения сигналов на фоне помех.— Радиотехника и электроника, 1969, т. 14, № 2, с. 249—258.
221. **Валеев В. Г., Сосулин Ю. Г.** Многоканальный прием сигналов на фоне помех при негауссовских распределениях наблюдаемых данных. I ч.—Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1970, № 2, с. 190—201.
222. **Валеев В. Г., Сосулин Ю. Г.** Многоканальный прием сигналов на фоне помех при негауссовских распределениях наблюдаемых данных. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1970, № 4, с. 133—144.
223. **Валеев В. Г.** О нелинейной нормализации при оптимальном приеме сигналов на фоне негауссовских помех. Радиотехн. и электроника, 1973,т. 18; № 4.
224. **Зачепицкий А. А., Марескин В. М., Пахомов Ю. И.** Обнаружение слабых сигналов на фоне узкополосных помех.— Радиотехника и электроника, 1972, т. 17, № 10, с. 2055—2063.
225. **Валеев В. Г., Гонопольский В. Б.** Метод амплитудного подавления негауссовских помех. Радиотехника и электроника, 1981, т. 26, № 11, с. 2301.
226. **Валеев В. Г., Сосулин Ю. Г.** Обнаружение слабых когерентных сигналов в коррелированных негауссовских помехах.— Радиотехника и электроника, 1969, т. 14, № 2, с. 230—238.
227. **Уилкс С.** Математическая статистика.— М.: Наука, 1967.— 632.
228. **Гонопольский В. Б., Валеев В. Г.** Обнаружение сигналов в присутствии помех с шумовой частотной модуляцией. — Радиотехника и электроника, 1977, т. 22, № 4, с. 849—853.
229. **Антонов О. Е., Панкратов В. С.** Подоптимальное обнаружение слабых сигналов на фоне амплитудно-частотно-модулированных помех.— Радиотехника и электроника, 1975, т. 20, № 1, с. 182—186.
230. **Sheehy I. I.** Optimum detection of signals in non-Gaussian noise.— Acoust. Soc. Am., 1978, v. 63 (1), Jan., p. 81—90.
231. **Слока В. К.** Вопросы обработки радиолокационных сигналов. — М.: Сов. радио, 1970, 256 с.
232. **Томас Дж. Б.** Непараметрические методы обнаружения сигналов: Пер. с англ./Под ред. Б. Р. Левина. ТИИЭР, 1970, т. 58, № 5, с. 23—31.
233. **Сколник М.** Введение в технику радиолокационных систем: Пер. с англ./ /Под ред. К. Н. Трофимова.— М.: Мир, 1965.— 748 с.
234. **Kassam S. A.** A bibliography on nonparametric detection. — IEEE Trans., v. IT-26, 1980, N 5, p. 592—602.
235. **Trunk G. V., George S. F.** Detection of targets in non-Gaussian sea clutter.— IEEE Trans., 1970, v. AES-6, N 5, p. 620—628.
236. **Goldstein G. B.** Fable-alarm regulation in log-normal and Weibul clutter.— IEEE Trans., 1973, v. AES-9, N 1, p. 84—92.
237. **Schleher D. C.** Radar detection in weibull clutter.— IEEE Trans., 1976, v. AES-12, N 6, p. 736—743.
238. **Dillard G. M., Antoniak E. Ch.** A practical distribution-free procedure for multiple-range-bin radars.— IEEE Trans., 1970, v. AES-6, N 5, p. 629.

239. **Хансен В. Г., Ользен Б. А.** Непараметрическое обнаружение сигналов с использованием обобщенного знакового критерия.— Зарубежная радиоэлектроника, 1972, № 9, с. 28—41.
240. **Акимов П. С.** Непараметрическое обнаружение сигналов.— Радиотехника, 1977, т. 32, № 11, с. 17—30.
241. **Акимов П. В., Ефремов В. С., Кубасов А. Н.** Непараметрический бинарный обнаружитель Неймана — Пирсона.— Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1978, т. 21, № 4, с. 78—83.
242. **Акимов П. С., Ефремов В. С.** Ранговое обнаружение сигнала с большим динамическим диапазоном.— Радиотехника, 1978, т. 33, № 4, с. 66—69.
243. **Акимов П. С., Кубасов А. Н.** Ранговое обнаружение импульсного сигнала на фоне шума и хаотической импульсной помехи. — Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1977, т. 20, с. 68—74.
244. **Рытов С. М.** Связь распределения квазимонохроматического стационарного процесса с распределением его огибающей.— ЖЭТФ, 1955, № 11.
245. **Акимов П. С., Ефремов В. С., Кубасов А. Н.** Об устойчивости непараметрического теста при некогерентной обработке.— Радиотехника и электроника, 1978, т. 23, № 6, с. 1164—1173.
246. **Акимов П. С., Кубасов А. Н.** Ранговое обнаружение оптического сигнала. — Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1977, т. 20, № 7, с. 29—35.
247. **Акимов П. С., Кубасов А. Н., Миначева А. В.** Оценка качества обнаружения слабого оптического сигнала.— Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1979, т. 22, № 4, с. 61—67.
248. **Акимов П. С., Миначева А. В.** Оценка помехоустойчивости непараметрического обнаружения слабого оптического сигнала, прошедшего через турбулентную атмосферу. — Радиотехника, 1980, т. 35, № 10, с. 8—12.
249. **Акимов П. С., Ефремов В. С.** Характеристики обнаружения рангового радиолокационного обнаружителя. — Радиотехника и электроника, 1977, т. 29, № 7, с. 1527—1531.
250. **Tantarantana S., Thomas J. B.** On sequential sign detection of a constant signal. — IEEE Trans., 1977, v. IT-23, N 3, p. 304—315.
251. **Акимов П. С., Ефремов В. С.** Ранговая последовательная процедура обнаружения некогерентного сигнала. — Радиотехника и электроника, 1975, т. 20, № 1, с. 118—122.
252. **Акимов П. С., Ефремов В. С.** Оптимальное ранговое последовательное обнаружение импульсного сигнала.— Радиотехника и электроника, 1975, т. 20, № 11, с. 2286—2296.
253. **Шлома А. Н.** Непараметрический многоканальный последовательный анализ на экстремальных статистиках. — Радиотехника и электроника, 1975, т. 20, № 12,
254. **Акимов П. С., Ефремов В. С., Кубасов А. Н.** Последовательная ранговая бинарная процедура обнаружения.— Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1978, т. 21, № 4, с. 84—88.
255. **Акимов П. С., Кубасов А. Н.** Ранговое последовательное обнаружение сигнала на фоне шума и хаотической импульсной помехи.— Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1978, т. 21, № 5, с. 60—64.
256. **Акимов П. С., Ефремов В. С., Кубасов А. Н.** Об устойчивости последовательной ранговой процедуры обнаружения.— Радиотехника и электроника, 1978, т. 23, № 7, с. 1427—1431.
257. **Акимов П. С., Ефремов В. С.** Ранговая последовательная усеченная процедура многоканального обнаружения.— Радиотехника и электроника, 1976, т. 21, № 7, с. 1452—1457.
258. **Акимов П. С., Ефремов В. С.** Характеристики рангового последовательного многоканального обнаружителя.— Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1976, т. 19, № 4, с. 5—9.
259. **Акимов П. С.** Адаптация ранговой бинарной процедуры обнаружения.— Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1979, т. 22, № 7, с. 31—37.
260. **Акимов П. С., Кубасов А. Н., Одинцов В. А.** Адаптивный ранговый последовательный обнаружитель.— Радиотехника, 1980, т. 35, № 7, с. 50—53.
261. **А. с. 862091** (СССР). Адаптирующийся ранговый обнаружитель/Авт. П.С. Акимов, В. С. Ефремов, А. Н. Кубасов.— Опубл. в Б. И. 1981, № 30.

262. **Menon M. V.** Estimation of the shape and scale parameters of the wiebull distribution.— Technometrics, 1963, v. 5, N 2, p. 175—182.
263. **Лихарев В. А., Бруханский А. В.** Адаптивно-непараметрический подход к построению обнаружителей с постоянным уровнем ложных тревог в условиях коррелированной помехи.— В кн.: Аналоговые и цифровые методы обработки сигналов в современных радиосистемах /ЛЭТИ.— Л., 1977.
264. **Акимов П. С.** Знаковое обнаружение сигнала на фоне коррелированной помехи.— Радиотехника и электроника, 1979, т. 24, № 9, с. 1928—1932.
265. **Акимов П. С.** Вопросы непараметрического обнаружения сигналов на фоне коррелированной помехи.— Труды МВТУ.— М., 1979, № 305, с. 13—23.
266. **Акимов П. С., Кубасов А. Н., Литновский В. Я.** Ранговое бинарное обнаружение детерминированного сигнала на фоне марковской помехи.— Радиотехника и электроника, 1980, т. 25, № 7, с. 1454—1459.
267. **Акимов П. С., Ефремов В. С., Косолапов А. С.** Реализация непараметрического раигового обнаружителя.— Радиотехника, 1976, т. 31, № 7, с. 95—97.
268. **Hajek J.** Asymptotically most powerful rank-order tests.—Ann. Math. Statist., 1962, v. 33, p. 1124—1147.
269. **Левин Б. Р., Кушнир А. Ф.** Асимптотически оптимальные ранговые алгоритмы обнаружения сигналов на фоне помех. — Радиотехника и электроника, 1969, т. 14, № 2, с. 259—266.
270. **Бриккер А. М.,** Структура и эффективность непараметрического знаково-рангового обнаружителя сигналов.— Вопросы радиоэлектроники. Сер ОТ, 1978, вып. 10, с. 32—39.
271. **Бриккер А. М.** Оценка эффективности непараметрического знакового обнаружителя сигналов при произвольном объеме выборки.— Вопросы радиоэлектроники. Сер. ОТ, 1978, вып. 11, с. 86—91.
272. **Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р.** Характеризационные задачи математической статистики.— М.: Наука, 1972.—656с.
273. **Chernoff H., Savage I. R.** Asymptotic normality and efficiency of certain nonparametric tests statistics. — Ann. Math. Statist., 1958, v. 29, p. 972—992.
274. **Putter J.** The treatment of ties in some non-parametric tests.— Ann. Math. Statist., 1955, v. 26, p. 368—386.
275. **Pratt J. W.** Remarks on zeros and ties in the Wilcoxon signed rank procedures. — J. Amer. Statist. Assoc., 1959, v. 54, p. 655—667.
276. **Pradley J. V.** Distribution free statistical tests. — Prentice - Hall, 1968.
277. **Кендал М.** Ранговые корреляции: Пер. с англ.— М.: Статистика, 1975.
278. **Тарасенко Ф. П.** Непараметрическая статистика.— Томск: ТГУ, 1976.
279. **Чибисов Д.М.** Теорема о допустимых критериях и ее применение к одной асимптотической задаче проверки гипотез. — Теория вероятностей и ее применения, 1967, т. 12, № 1.
280. **Кушнир А. Ф.** Асимптотически оптимальные критерии для регрессионной задачи проверки гипотез.— Теория вероятностей и ее применения, 1968, т. 13, вып. 4, с. 682—700.
281. **Бриккер А. М.** Гарантированные характеристики обнаружения непараметрических обнаружителей сигналов.— Радиотехника, 1982, т. 37, № 3.
282. **Бриккер А. М.** Непараметрические алгоритмы обнаружения сигналов на перемешанных статистиках с линейным преобразованием входных данных. — Радиотехника и электроника, 1981, т. 26, № 10, с. 2119—2128.
283. **Белман Р.** Динамическое программирование: Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1960.
284. **Ширяев А. Н.** Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976.
285. **Ли Р.** Оптимальные оценки, определение характеристик и управления.— М.: Наука, 1966.

Оглавление

Введение 3

Глава 1. Обнаружение сигналов с неизвестными параметрами 12

1.1. Структура асимптотически оптимального обнаружителя 12
1.2. Характеристики обнаружения сигнала с неизвестными неэнергетическими параметрами 26
1.3. Характеристики обнаружения разрывных сигналов с неизвестными неэнергетическими параметрами 46
1.4. Характеристики обнаружения сигналов с неизвестной энергией. . . 67
1.5. Сигнал с неизвестными неэнергетическими параметрами при многоканальном приеме 74

Глава 2. Несмещенные и инвариантные правила обнаружения сигналов 89

2.1. Принципы несмещенности и подобия в задачах проверки сложных гипотез 89
2.2. Несмещенные правила обнаружения и различения сигналов 105
2.3. Принцип инвариантности в задачах проверки сложных гипотез . . 119
2.4. Инвариантные правила обнаружения и различения сигналов 125

Глава 3. Минимаксные правила обнаружения сигналов 145

3.1. Минимаксные критерии оптимизации обнаружения сигналов на фоне шумов с неизвестными параметрами 145
3.2. Оптимальное обнаружение сигналов на фоне шума с неизвестными параметрами 160
3.3. Обнаружение случайного гауссовского сигнала на фоне гауссовского шума с неизвестной интенсивностью 178

Глава 4. Последовательное обнаружение сигналов 202

4.1. Основные положения 202
4.2. Методы расчета характеристик последовательных процедур различения простых гипотез 206
4.3. Последовательное обнаружение при наличии мешающих параметров 231
4.4. Последовательное обнаружение сигналов в многоканальных системах 252

Глава 5. Обнаружение сигналов в негауссовских помехах 266

5.1. Постановка задачи 266
5.2. Вероятностные модели негауссовских помех 269
5.3. Оптимальное обнаружение сигналов на фоне негауссовских помех с независимыми значениями 273
5.4. Оптимальное обнаружение сигналов на фоне коррелированных негауссовских помех 285
5.5. Оптимальное обнаружение сигналов на фоне негауссовских помех с полосовым спектром. 297
5.6. Защита типовых трактов обработки сигнала от негауссовских помех в когерентных и некогерентных обнаружителях 301

Глава 6. Непараметрические обнаружители сигналов при конечном числе наблюдений 325

6.1. Основные виды непараметрических тестов 325
6.2. Обнаружение при фиксированном объеме выборки 331
6.3. Ранговое последовательное обнаружение 344
6.4. Адаптация ранговых последовательных обнаружителей 350
6.5. Непараметрическое обнаружение сигналов на фоне коррелированного шума 360

Глава 7. Непараметрические асимптотически оптимальные обнаружители сигналов 368

7.1. Ранговые обнаружители 368
7.2. Знаково-ранговые обнаружители 374
7.3. Сравнение ранговых и знаково-ранговых обнаружителей 377
7.4. Непараметрические обнаружители на перемешанных статистиках с линейным преобразованием входных данных 390
7.5. Двухвыборочные непараметрические обнаружители 395
7.6. Влияние отклонений от принятых допущений на характеристики обнаружителей 399

Глава 8. Статистический синтез единого алгоритма обнаружения-измерения 404

8.1. Постановка задачи 404
8.2. Априорное статистическое описание радиолокационной обстановки 407
8.3. Модели и статистические характеристики наблюдаемого радиолокационного сигнала 410
8.4. Структура единого алгоритма обнаружения-измерения 416
8.5. Оптимальный алгоритм обнаружения-измерения для локаторов оптического диапазона 424
Список литературы 428

ТЕОРИЯ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ